CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES I

OPTION SCIENTIFIQUE

Mercredi 15 mai 1996, de 14 h à 18 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées : *Règles graduées.*
Calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm x 15 cm de large, sans limitation de nombre.

Dans tout le problème, p désigne un entier naturel supérieur ou égal à deux. On note $M_p(\mathbf{R})$ l'algèbre des matrices carrées à coefficients réels et I_p la matrice identité. Pour tout élément M de $M_p(\mathbf{R})$ et pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, on note $a_{i,j}(M)$ le coefficient de M situé sur la ième ligne et la jème colonne.

Une matrice M appartenant à $M_p(\mathbf{R})$ est dite *stochastique* si elle satisfait aux deux conditions suivantes:

(i) Pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, $a_{i,j}(M) \geq 0$.
(ii) Pour tout entier i compris entre 1 et p, $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}(M) = 1$.

On dit qu'une suite indexée par n, $(M_n) = (M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots)$ de matrices appartenant à $M_p(\mathbf{R})$ converge vers un élément M de $M_p(\mathbf{R})$ si, pour tout couple (i,j), la suite des coefficients $a_{i,j}(M_n)$ converge vers $a_{i,j}(M)$; on dit alors que M est la limite de la suite (M_n).

Etant donnée une matrice A appartenant à $M_p(\mathbf{R})$, pour tout entier $n \geq 0$, on note C_n la matrice définie par la relation:

$$C_n = \frac{1}{n+1}[I_p + A + A^2 + \cdots + A^n] \tag{1}$$

On dit enfin qu'une matrice A de $M_p(\mathbf{R})$ est $r-$périodique où r est un entier strictement positif, si $A^r = I_p$.

L'objectif du problème est d'étudier quelques propriétés des matrices stochastiques et notamment, la convergence de la suite (C_n) lorsque A est stochastique et $r-$périodique.

I. Etude d'exemples.

1. Soit α un nombre réel. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}[1 + \alpha + \alpha^2 \cdots + \alpha^n]$$

a). Calculer γ_n, en distinguant deux cas: $\alpha \neq 1$ et $\alpha = 1$.
b). Etudier en fonction de α, la convergence de la suite (γ_n) et, en cas de convergence, préciser sa limite.

2. Premier exemple d'étude de (C_n).
On prend $p = 3$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a). Calculer A^2 et A^3. En déduire A^k pour tout entier k. On distinguera trois cas selon que $k = 3h$, $k = 3h + 1$, et $k = 3h + 2$.
b). Pour tout entier q, calculer C_{3q}, C_{3q+1} et C_{3q+2}. En déduire que la suite (C_n) converge et préciser sa limite C.
c). Soient (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$ et v l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement associé à C. Déterminer le noyau F de v et prouver que son image G est la droite vectorielle $\mathbf{R}e$ de vecteur directeur $e = \frac{1}{3}[e_1 + e_2 + e_3]$. Prouver que les sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires et que v est le projecteur de $\mathbf{R}^3$ sur G parallèlement à F.

3. Deuxième exemple d'étude de (C_n).

On prend $p = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On note w l'endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à A.
a). Déterminer les valeurs propres de w et une base (f_1, f_2) de vecteurs propres de w.
b). Déterminer une matrice inversible P telle que:

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

En déduire une expression de A^k, pour tout entier $k \geq 0$.

c). Déterminer deux matrices U et V appartenant à $M_2(\mathbf{R})$, telles que, pour tout $k \geq 0$,

$$A^k = U + (-\frac{1}{6})^k V$$

d). Pour tout entier $n \geq 0$, exprimer C_n en fonction de n, U et V et déterminer la limite C de la suite (C_n).
e). Prouver que l'endomorphisme v de $\mathbf{R}^2$ canoniquement associé à C est un projecteur dont on précisera le noyau F et l'image G.

II. Etude de (C_n) lorsque A est $r-$périodique.
On désigne par r un entier strictement positif.

1. Soit (α_k) une suite $r-$périodique de nombres réels, c'est-à-dire telle que, pour tout entier naturel $k \geq 0$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On pose:

$$\gamma = \frac{1}{r}[\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{r-1}]$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose:

$$\gamma_n = \frac{1}{n+1}[\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n] \qquad (2)$$

a). Prouver que pour tout entier $k \geq 0$,

$$\gamma = \frac{1}{r}[\alpha_k + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_{k+r-1}]$$

b). Montrer que la suite de terme général

$$\beta_n = (n+1)\gamma_n - (n+1)\gamma$$

est $r-$périodique. En déduire que (β_n) est bornée.
c). Etablir que (γ_n) converge et préciser sa limite.

2. Soit A une matrice $r-$périodique appartenant à $M_p(\mathbf{R})$.

a). Montrer que, pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et p, la suite de terme général $\alpha_k = a_{i,j}(A^k)$ est $r-$périodique. En déduire que la suite (C_n) converge vers:

$$C = \frac{1}{r}[I_p + A + \cdots + A^{r-1}]$$

b). Soient $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $\mathbf{R}^p$, u et v les endomorphismes de $\mathbf{R}^p$ canoniquement associés aux matrices A et C. Prouver que $u^r = I$, où I est l'endomorphisme identique de $\mathbf{R}^p$. Montrer que $v \circ u = u \circ v$ et que $u \circ v = v$.

c). Soit x un élément de $\mathbf{R}^p$. Prouver que $u(x) = x$ si et seulement si $v(x) = x$, puis que x appartient à $\operatorname{Im} v$ si et seulement si $u(x) = x$. En déduire que $\operatorname{Im} v = \ker(u - I)$.

d). Montrer que v est le projecteur sur $G = \operatorname{Im} v$ parallèlement à $F = \ker v$.

e). Etablir enfin que $\ker v = \operatorname{Im}(u - I)$: on pourra d'abord prouver que $\operatorname{Im}(u - I) \subset \ker v$.

3 a). Soit (α_k) une suite de nombres réels $r-$périodique *à partir d'un certain rang positif* m, c'est-à-dire telle que pour tout $k \geq m$, $\alpha_{k+r} = \alpha_k$. On définit (γ_n) par la relation (2). Prouver que γ_n admet une limite que l'on précisera. Pour cela, on pourra considérer la suite $\alpha'_k = \alpha_{k+m}$,

observer que (α'_k) est $r-$périodique, et prouver que, γ'_n étant associée à (α'_k) par la relation (2), $\gamma'_n - \gamma_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

b). Soit A une matrice de $M_p(\mathbf{R})$ $r-$périodique *à partir d'un certain rang positif* m, c'est-à-dire telle que, pour tout entier $k \geq m$, $A^{k+r} = A^k$. Prouver que la suite (C_n) admet une limite C que l'on précisera.

III. Etude de matrices stochastiques.

On note S_p l'ensemble des matrices *stochastiques* de $M_p(\mathbf{R})$ et D_p l'ensemble des matrices *déterministes*, c'est-à-dire stochastiques et dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou 1. Enfin, on note Δ_p l'ensemble des matrices déterministes et inversibles.

1. Matrices stochastiques.

a) Prouver que, pour tout couple (λ, μ) de nombres réels tels que $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ et $\lambda + \mu = 1$, et pour tout couple (M, N) d'éléments de S_p, $\lambda M + \mu N$ appartient encore à S_p.

b). Prouver que le produit MN de deux éléments M et N de S_p appartient à S_p.

c). Soit A un élément de S_p. Prouver que, pour tout entier $n \geq 0$, C_n (définie par (1)) appartient à S_p. Que peut-on en déduire pour la limite C de (C_n), lorsqu'elle existe?

2. Matrices déterministes.

a). Montrer qu'une matrice M est déterministe si et seulement si tous ses coefficients sont égaux à 0 ou à 1 et si chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1.

b). En déduire que D_p est un ensemble fini et préciser le nombre de ses éléments.

c). Montrer que le produit MN de deux éléments M et N de D_p appartient à D_p.

d). Soit A une matrice déterministe. Prouver qu'il existe un entier $r \geq 1$ et un entier $m \geq 0$ tels que $A^{m+r} = A^m$. En déduire que, dans ces conditions, A est $r-$périodique *à partir de ce rang* m et que si de plus A est inversible, A est $r-$périodique.

e). Soit A une matrice déterministe inversible. Prouver que A^{-1} l'est aussi.

3. Etude de la suite (C_n) associée à une matrice A déterministe.

a). En utilisant les résultats de la partie II, établir le résultat suivant: soit A une matrice déterministe *inversible*, alors (C_n) converge vers une matrice stochastique C telle que $C^2 = C$.

b). Etendre ce résultat au cas où A est déterministe *non inversible*.

4. Matrices stochastiques inversibles.

Soient X et Y des éléments de S_p tels que $XY = I_p$. On se propose de montrer que X et Y sont déterministes inversibles.

a). Prouver que Y est une matrice inversible et que X l'est aussi.

b). On pose $X = (\alpha_{i,j})$, $Y = (\beta_{i,j})$ et, pour tout j compris entre 1 et p,

$$\mu_j = \max\{\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \ldots, \beta_{p,j}\}$$

Prouver que $\mu_j = 1$. Pour cela, on pourra calculer le coefficient $a_{j,j}(XY)$.

c). Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \beta_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j$. En déduire que tous les coefficients de Y sont égaux à 0 ou à 1.

d). Prouver que Y et X appartiennent à Δ_p.

e). Plus généralement, soient U et V deux matrices de S_p telles que le produit UV appartient à Δ_p. Prouver que U et V appartiennent à Δ_p. (On pourra utiliser le résultat de la question **III.2.e)**.)

FIN.

I Etude d'exemples

Q1 a) Soit $n\in\mathbb{N}$.

Si $\alpha=1$: $\sigma_n=\frac{1}{n+1}(n+1)=1$

Si $\alpha\neq 1$: $\sigma_n=\frac{1}{n+1}\,\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$. $\sigma_n=\begin{cases}1 & \text{si } \alpha=1\\ \frac{1}{n+1}\,\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha\neq 1.\end{cases}$

b) 1er cas.. $|\alpha|<1$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha^{n+1}=0$.

Par conséquent : $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0

2ème cas.. $\alpha=1$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sigma_n=1$. $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.

3ème cas.. $\alpha=-1$. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ et la suite $\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)_{n\geq 0}$ est bornée (elle ne prend que deux valeurs) ; par conséquent : $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

4ème cas.. $|\alpha|>1$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sigma_n=\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{n+1}\,\alpha^{n+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{1-\alpha}=0$; la suite $\left(\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{1-\alpha}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\right|=+\infty$ (croissance comparée) donc la suite $\left(\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ diverge.

La suite $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ est alors divergente comme "somme" d'une suite convergente et d'une suite divergente.

$(\sigma_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si $|\alpha|\leq 1$.

Pour $|\alpha|<1$ et $\alpha=-1$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=0$. Pour $\alpha=1$: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=1$.

Q2 a) $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$; $A^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

$\forall k\in\mathbb{N}$, $A^{3k}=(A^3)^k=I_3^k=I_3$; $A^{3k+1}=A^{3k}A=I_3A=A$; $A^{3k+2}=A^{3k}A^2=A^2$.

Donc $A^\ell=\begin{cases}I_3 & \text{si } \exists k\in\mathbb{N},\ \ell=3k \quad (\ell\equiv 0\,[3])\\ A & \text{si } \exists k\in\mathbb{N},\ \ell=3k+1 \quad (\ell\equiv 1\,[3])\\ A^2 & \text{si } \exists k\in\mathbb{N},\ \ell=3k+2 \quad (\ell\equiv 2\,[3])\end{cases}$

Remarque.. A est stochastique et 3-périodique.

b) Soit $q\in\mathbb{N}$. $C_{3q}=\frac{1}{3q+1}\left[\sum\limits_{k=0}^{q}A^{3k}+\sum\limits_{k=0}^{q-1}A^{3k+1}+\sum\limits_{k=0}^{q-1}A^{3k+2}\right]=\frac{1}{3q+1}\left[(q+1)I_3+qA+qA^2\right]$

$$C_{3q+1} = \frac{1}{3q+2}\left[\sum_{k=0}^{q} A^{3k} + \sum_{k=0}^{q} A^{3k+1} + \sum_{k=0}^{q-1} A^{3k+2}\right] = \frac{1}{3q+2}\left[(q+1)\, I_3 + (q+1)\, A + q\, A^2\right].$$

$$C_{3q+2} = \frac{1}{3q+3}\left[(q+1)\, I_3 + (q+1)\, A + (q+1) A^2\right] = \frac{1}{3}\left[I_3 + A + A^2\right].$$

Notons que : si $n = 3q$ $E(\frac{n+3}{3}) = q+1$, $E(\frac{n+2}{3}) = q$, $E(\frac{n+1}{3}) = q$

si $n = 3q+1$ $E(\frac{n+3}{3}) = q+1$, $E(\frac{n+2}{3}) = q+1$, $E(\frac{n+1}{3}) = q$

si $n = 3q+2$ $E(\frac{n+3}{3}) = q+1$, $E(\frac{n+2}{3}) = q+1$, $E(\frac{n+1}{3}) = q+1$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = \frac{1}{n+1} E(\frac{n+3}{3})\, I_3 + \frac{1}{n+1} E(\frac{n+2}{3})\, A + \frac{1}{n+1} E(\frac{n+1}{3})$.

Rappelons que : $E(x) \underset{+\infty}{\sim} x$ (pour $x>0$: $1 - \frac{1}{x} < \frac{E(x)}{x} \leqslant 1$)

donc $\frac{1}{n+1} E(\frac{n+3}{3}) \sim \frac{1}{n+1}\, \frac{n+3}{3} \sim \frac{1}{3}$; $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} E(\frac{n+3}{3}) = \frac{1}{3}$; de même :

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} E(\frac{n+2}{3}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} E(\frac{n+1}{3}) = \frac{1}{3}$.

Finalement : $(C_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\frac{1}{3}\left[I_3 + A + A^2\right]$. $C = \frac{1}{3}\left[I_3 + A + A^2\right]$.

c) $C = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$ un élément de $\mathbb{R}^3$.

$u \in \operatorname{Ker} \sigma \Leftrightarrow \sigma(u) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x+y+z=0.$

$F = \operatorname{Ker} \sigma$ est donc le plan d'équation $x+y+z=0$ dans la base (e_1, e_2, e_3).

$F = \operatorname{Ker} \sigma = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2, e_2 - e_3)$.

$G = \operatorname{Im} \sigma = \operatorname{Vect}\left(\sigma(e_1), \sigma(e_2), \sigma(e_3)\right) \underset{\uparrow}{=} \operatorname{Vect}\left(\frac{1}{3}(e_1+e_2+e_3)\right) = \operatorname{Vect}(e_1+e_2+e_3)$. Donc :

$\sigma(e_1) = \sigma(e_2) = \sigma(e_3) = \frac{1}{3}(e_1+e_2+e_3)$.

$G = \operatorname{Im} \sigma = \mathbb{R} e$ avec $e = \frac{1}{3}(e_1+e_2+e_3)$

- $e \notin F$ car $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} \neq 0$; donc $\operatorname{Vect}(e) \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$; $F \cap G = \{0_E\}$.
- $\dim F + \dim G = \dim \operatorname{Ker} \sigma + \dim \operatorname{Im} \sigma = \dim \mathbb{R}^3$ (théorème du rang).

Ainsi F et G sont supplémentaires.

Montrons que v est la projection de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F.

Soit $u \in \mathbb{R}^3$. $\exists!\,(u_1,u_2)\in F\times G$, $u=u_1+u_2$. $\exists \lambda\in\mathbb{R}$, $u_2=\lambda e$.

$v(u)=v(u_1)+v(u_2)=0+\lambda v(e)=\frac{\lambda}{3}[v(e_1)+v(e_2)+v(e_3)]=\frac{\lambda}{3}[e+e+e]=\lambda e=u_2$.

Donc si $u\in\mathbb{R}^3$ et si $u=u_1+u_2$ avec $u_1\in F$ et $u_2\in G$: $v(u)=u_2$;

v est bien la projection de $\mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à F.

Q3 a) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $A-\lambda I_2=\begin{bmatrix}1/3-\lambda & 2/3\\ 1/2 & 1/2-\lambda\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1/2 & 1/2-\lambda\\ 1/3-\lambda & 2/3\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1/2 & \frac{1}{2}-\lambda\\ 0 & \frac{2}{3}-2(\frac{1}{3}-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)\end{bmatrix}$

$L_1 \leftrightarrow L_2$; $L_2 \leftarrow L_2 - 2(\frac{1}{3}-\lambda)L_1$

$\lambda\in\operatorname{Spec}A \Leftrightarrow A-\lambda I_2$ non inversible $\Leftrightarrow \frac{2}{3}-2(\frac{1}{3}-\lambda)(\frac{1}{2}-\lambda)=0 \Leftrightarrow 2-(1-3\lambda)(1-2\lambda)=0$

$\lambda\in\operatorname{Spec}A \Leftrightarrow -6\lambda^2+5\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ou $\lambda=-1/6$. $\operatorname{Spec} w=\operatorname{Spec}A=\{-1/6, 1\}$.

Les valeurs propres de w sont $-\frac{1}{6}$ et 1.

Soit $u=xe_1+ye_2\in\mathbb{R}^2$ ((e_1,e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$)

$w(u)=-\frac{1}{6}u \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1/3 & 2/3\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}1/3\,x+2/3\,y=-1/6\,x\\ 1/2\,x+1/2\,y=-1/6\,y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=0\\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=0$

Par conséquent le sous-espace propre de w associé à la valeur propre $-\frac{1}{6}$ est la droite vectorielle engendrée par : $f_2=4e_1-3e_2$.

$w(u)=u \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=x\\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=0\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y$

Le sous-espace propre de w associé à la valeur propre 1 est la droite vectorielle engendrée par $f_1=e_1+e_2$.

$\therefore$ w admet deux valeurs propres distinctes et $\dim\mathbb{R}^2=2$; w est diagonalisable.

(f_1,f_2) est une base de vecteurs propres de w.

b) Soit P la matrice de passage de la base (e_1,e_2) à la base (f_1,f_2). $P=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

P est inversible comme matrice de passage.

Soit A' la matrice de w dans la base (f_1,f_2). 1°. $A'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1/6\end{pmatrix}$

2°. $A'=P^{-1}AP$

Ceci donne directement $A=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1/6\end{pmatrix}P^{-1}$.

$\begin{cases} f_1 = e_1 + e_2 \\ f_2 = 4e_1 - 3e_2 \end{cases}$; $\begin{cases} 3f_1 + f_2 = 7e_1 \\ 4f_1 - f_2 = 7e_2 \end{cases}$; $\begin{cases} e_1 = \frac{1}{7}(3f_1 + f_2) \\ e_2 = \frac{1}{7}(4f_1 - f_2) \end{cases}$ donc $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = \left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/6 \end{pmatrix}P^{-1}\right)^k = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/6 \end{pmatrix}^k P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/6)^k \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{7}P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1/6)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}P\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ (-\frac{1}{6})^k & -(-\frac{1}{6})^k \end{pmatrix}$$

$$A^k = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ (-\frac{1}{6})^k & -(-\frac{1}{6})^k \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 + 4(-\frac{1}{6})^k & 4 - 4(-\frac{1}{6})^k \\ 3 - 3(-\frac{1}{6})^k & 4 + 3(-\frac{1}{6})^k \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 + 4(-\frac{1}{6})^k & 4 - 4(-\frac{1}{6})^k \\ 3 - 3(-\frac{1}{6})^k & 4 + 3(-\frac{1}{6})^k \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^k\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) En posant $U = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $V = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ on obtient : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = U + (-\frac{1}{6})^k V$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} U + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{6}\right)^k V = U + \frac{1}{n+1}\,\frac{1 - (-\frac{1}{6})^{n+1}}{1 - (-\frac{1}{6})}\,V$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = U + \frac{6}{7}\,\frac{1}{n+1}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)V$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{6}{7}\,\frac{1}{n+1}\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{6}{7}\,\frac{1}{n+1} - \frac{6}{7}\,\frac{1}{n+1}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right] = 0$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} C_n = U = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = C$.

e) $C^2 = \frac{1}{7^2}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7^2}\begin{pmatrix} 21 & 28 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = C$

Par conséquent $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $v \circ v = v$. v est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

Soit $u = xe_1 + ye_2 \in \mathbb{R}^2$

$v(u) = u \iff \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x + 4y = 7x \\ 3x + 4y = 7y \end{cases} \iff x = y$

$v(u) = 0 \iff \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 3x + 4y = 0$

v est le projecteur de $\mathbb{R}^2$ de noyau $F = \mathrm{Vect}(4e_1 - 3e_2) = \mathrm{Vect}(f_2)$ et d'image $G = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2) = \mathrm{Vect}(f_1)$

II Etude de (C_n) lorsque A est r-périodique.

Q1 a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\alpha_k+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+r-1}=\sum_{i=k}^{k+r-1}\alpha_i=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i+\sum_{i=r}^{k+r-1}\alpha_i-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i=r\gamma+\sum_{i=r}^{k+r-1}\alpha_i-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i.$$

$$\alpha_k+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+r-1}\underset{\substack{\uparrow\\ i=j+r \text{ dans la 2e } \Sigma}}{=}r\gamma+\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_{j+r}-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\underset{\substack{\uparrow\\ \alpha_{j+r}=\alpha_j}}{=}r\gamma+\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j-\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i=r\gamma$$

Donc $\frac{1}{r}(\alpha_k+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+r-1})=\gamma$; ce résultat est encore vrai pour $k=0$.

Par conséquent. $\forall k\in\mathbb{N},\ \gamma=\frac{1}{r}(\alpha_k+\alpha_{k+1}+\cdots+\alpha_{k+r-1})$.

Remarque.. le résultat s'obtient encore simplement par récurrence.

b) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\beta_{n+r}=(n+r+1)\gamma_{n+r}-(n+r+1)\gamma=\sum_{i=0}^{n+r}\alpha_i-(n+r+1)\gamma=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i+(\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+r})-(n+r+1)\gamma$$

$$\beta_{n+r}=(n+1)\gamma_n+(\alpha_{n+1}+\alpha_{n+2}+\cdots+\alpha_{n+r})-(n+r+1)\gamma$$

$$\downarrow a)$$

$$\beta_{n+r}=(n+1)\gamma_n+r\gamma-(n+r+1)\gamma=(n+1)\gamma_n-(n+1)\gamma=\beta_n.$$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \beta_{n+r}=\beta_n$. $(\beta_n)_{n\geq 0}$ est r-périodique.

La suite $(\beta_n)_{n\geq0}$ prend donc au plus r valeurs distinctes ; elle est nécessairement bornée.

Plus précisément : $\forall n\in\mathbb{N},\ \min(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{r-1})\leq\beta_n\leq\max(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{r-1})$.

c) $\forall n\in\mathbb{N},\ \gamma_n=\gamma+\frac{1}{n+1}\beta_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\beta_n=0$ car $(\beta_n)_{n\geq0}$ est bornée et $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq0}$ converge vers 0.

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n=\gamma$

$(\gamma_n)_{n\geq0}$ converge et a pour limite γ.

Q2 a) $\forall k\in\mathbb{N},\ A^{k+r}=A^k$; donc : $\forall (i,j)\in [\![1,p]\!]^2,\ \forall k\in\mathbb{N},\ a_{ij}(A^{k+r})=a_{ij}(A^k)$.

Donc pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $\underline{(a_{ij}(A^k))_{k\geq 0}}$ est r-périodique.

Soit $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$.

D'après ce qui précède la suite $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_{ij}(A^k)\right)_{n\geq 0}$ converge vers $\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1} a_{ij}(A^k)$;

ceci signifie aussi que la suite $\left(a_{ij}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}A^k\right)\right)_{n\geq 0}$ converge vers $a_{ij}\left(\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}A^k\right)$ ou

que la suite $(a_{ij}(C_n))_{n\geq 0}$ converge vers $a_{ij}(C)$ et ceci pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$.

Par conséquent la suite $(C_n)_{n\geq 0}$ converge vers C.

b) $\forall k\in\mathbb{N},\ A^{k+r}=A^k$. En particulier $A^{0+r}=A^0$ donc $A^r=I_p$.

Par conséquent $\underline{u^r=I}$.

$CA=\frac{1}{r}[A+A^2+\cdots+A^r]=\frac{1}{r}[A+A^2+\cdots+A^{r-1}+I_p]=C$.

$AC=\frac{1}{r}[A+A^2+\cdots+A^r]=CA$.

Par conséquent : $\underline{v\circ u=u\circ v=v}$.

c) Soit $x\in\mathbb{R}^p$.

· Supposons $u(x)=x$. $\forall k\in\mathbb{N},\ u^k(x)=x$ donc $v(x)=\frac{1}{r}[x+u(x)+\cdots+u^{r-1}(x)]=\frac{1}{r}[\overbrace{x+x+\cdots+x}^{r\text{ fois}}]=x$.

Donc $u(x)=x$ donne $v(x)=x$.

· Supposons $v(x)=x$. $u\circ v=v$ donc $u(v(x))=v(x)$; $u(x)=x$.

Finalement : $\underline{u(x)=x \iff v(x)=x}$.

Soit $x\in \operatorname{Im} v$. $\exists t\in\mathbb{R}^p,\ x=v(t)$. $u(x)=u(v(t))=v(t)=x$, $u(x)=x$.

Réciproquement supposons $u(x)=x$; alors $v(x)=x$ donc $x\in\operatorname{Im} v$.

$\underline{x\in\operatorname{Im} v \iff u(x)=x}$.

$\underline{\operatorname{Im} v=\{x\in\mathbb{R}^p \mid u(x)=x\}=\operatorname{Ker}(u-I)=\operatorname{Ker}(v-I)}$.

d) Montrons que F et G sont supplémentaires. Rappelons que $G=\operatorname{Im} v=\operatorname{Ker}(v-I)$

Soit $x\in F\cap G$. $v(x)=0$ et $x\in G=\operatorname{Ker}(v-I)$; $v(x)=0$ et $v(x)=x$, $x=0$.

Donc $F\cap G=\{0_E\}$.

$\dim F + \dim G = \dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v = \dim \mathbb{R}^p$; ceci achève de prouver que F et G sont supplémentaires. Prouvons enfin que v est la projection sur $G = \operatorname{Im} v$ parallèlement à $\operatorname{Ker} v = F$

Soit $x \in \mathbb{R}^p$. $\exists ! (x_1, x_2) \in G \times F$, $x = x_1 + x_2$.

$v(x) = v(x_1) + v(x_2) = x_1$ car $x_1 \in G = \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker}(v - I)$ et $x_2 \in F = \operatorname{Ker} v$

Si $x \in \mathbb{R}^p$ et si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in G \times F$: $v(x) = x_1$; <u>v est bien la projection sur $G = \operatorname{Im} v$ parallèlement à $F = \operatorname{Ker} v$.</u> Notons alors que $v \circ v = v$ donc <u>$C^2 = C$.</u>

e) Soit $x \in \operatorname{Im}(u - I)$. $\exists t \in \mathbb{R}^p$, $x = u(t) - t$. $v(x) = v(u(t)) - v(t) = 0$ car $v \circ u = v$

donc $\operatorname{Im}(u - I) \subset \operatorname{Ker} v$.

Pour obtenir l'égalité il suffit d'avoir l'égalité des dimensions (dim $\mathbb{R}^p = p < +\infty$!)

$\dim \operatorname{Im}(u - I) = p - \dim \operatorname{Ker}(u - I) = p - \dim \operatorname{Im} v = \dim \operatorname{Ker} v$

Finalement : <u>$\operatorname{Im}(u - I) = \operatorname{Ker} v$.</u> <u>$v$ est encore la projection sur $\operatorname{Ker}(u - I) \,//\, \text{à } \operatorname{Im}(u - I)$.</u>

Q3 a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\alpha'_{k+r} = \alpha_{k+m+r} \overset{k+m \geq m}{=} \alpha_{k+m} = \alpha'_k$; <u>$(\alpha'_k)_{k \geq 0}$ est périodique de période r.</u>

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma'_n = \frac{1}{n+1} [\alpha'_0 + \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_n]$.

D'après II Q 1 $(\gamma'_n)_{n \geq 0}$ converge vers $\gamma' = \frac{1}{r} [\alpha'_0 + \alpha'_1 + \cdots + \alpha'_{r-1}] = \frac{1}{r} [\alpha_m + \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_{m+r-1}]$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(n+1)\gamma'_n = \alpha_m + \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_{m+n} = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m+n} - (\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1})$

$(n+1)\gamma'_n = (n+m+1)\gamma_{m+n} - m\gamma_{m-1}$; $\gamma_{m+n} = \dfrac{n+1}{n+m+1}\gamma'_n + \dfrac{m}{n+m+1}\gamma_{m-1}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n+1}{n+m+1} = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \gamma'_n = \gamma'$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{m}{n+m+1} = 0$; par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} \gamma_{m+n} = \gamma'$.

<u>Ceci suffit pour dire que $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ converge et que sa limite est $\gamma' = \frac{1}{r}[\alpha_m + \alpha_{m+1} + \cdots + \alpha_{m+r-1}]$</u>

Remarque... Pour faire plaisir retrouvons le résultat final ou ~~au concepteur~~ montrant que : $\lim\limits_{n \to +\infty} (\gamma'_n - \gamma_n) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\gamma'_n - \gamma_n = \dfrac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n} \alpha'_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right] = \dfrac{1}{n+1}\left[\sum_{k=0}^{n} \alpha_{k+m} - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right]$

$\gamma'_n - \gamma_n = \dfrac{1}{n+1}\left[\sum_{i=m}^{n+m} \alpha_i - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\right]$. Supposons alors $n \geq m$.

$\gamma'_n - \gamma_n = \dfrac{1}{n+1}\left[\sum_{i=m}^{n} \alpha_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k - \sum_{k=m}^{n} \alpha_k\right] = \dfrac{1}{n+1}\left[\sum_{i=n+1}^{n+m} \alpha_i - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k\right]$

$$\gamma'_n-\gamma_n=\frac{1}{n+1}\sum_{i=n+1}^{n+m}\alpha_i-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k$$

$\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k$ ne dépend pas de n donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k=0$

Ne reste plus qu'à prouver que : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=n+1}^{n+m}\alpha_i=0$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=n+1}^{n+m}\alpha_i=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1-m}^{n}\alpha_{k+m}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1-m}^{n}\alpha'_k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\alpha'_k-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-m}\alpha'_k$$

$\frac{1}{n+1}\sum_{i=n+1}^{n+m}\alpha_i=\gamma'_n-\frac{n-m+1}{n+1}\gamma'_{n-m}$; $\lim\gamma'_n=\gamma'$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-m+1}{n+1}\gamma'_{n-m}=1\times\gamma'=\gamma'$. Donc

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=n+1}^{n+m}\alpha_i\right)=0$. Ceci achève de prouver que $\lim_{n\to+\infty}(\gamma'_n-\gamma_n)=0$; comme $\lim_{n\to+\infty}\gamma'_n=\gamma'$:

$\lim_{n\to+\infty}\gamma_n=\lim_{n\to+\infty}(\gamma'_n-(\gamma'_n-\gamma_n))=\gamma'-0=\gamma'$.

b) Procédons comme dans II Q2 a)

Soit $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$. $(a_{ij}(A^k))_{k\geq 0}$ est r-périodique à partir du rang m car $(A^k)_{k\geq0}$ est r-périodique à partir du rang m.

Par conséquent $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_{ij}(A^k)\right)_{n\geq0}$ converge vers $\frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1}a_{ij}(A^k)$

donc $\left(a_{ij}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}A^k\right)\right)_{n\geq0}$ converge vers $a_{ij}\left(\frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1}A^k\right)$

Ceci étant vrai pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]$ cela signifie que $\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}A_k\right)_{n\geq0}$ converge vers $\frac{1}{r}\sum_{k=m}^{m+r-1}A^k$. Donc $\underline{(C_n)_{n\geq0}\text{ converge vers } C=\frac{1}{r}(A^m+A^{m+1}+\dots+A^{m+r-1})}$.

III Etude de matrices stochastiques

Q1 a) Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $\lambda\geq0$, $\mu\geq0$ et $\lambda+\mu=1$. Soit $(M,N)\in S_p^2$

- $a_{ij}(\lambda M+\mu N)=\underbrace{\lambda}_{\geq0}\underbrace{a_{ij}(M)}_{\geq0}+\underbrace{\mu}_{\geq0}\underbrace{a_{ij}(N)}_{\geq0}\geq0$ pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$

- $\forall i\in[\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p}a_{ij}(\lambda M+\mu N)=\lambda\sum_{j=1}^{p}a_{ij}(M)+\mu\sum_{j=1}^{p}a_{ij}(N)=\lambda\times1+\mu\times1=\lambda+\mu=1$.

Par conséquent $\lambda M+\mu N\in S_p$.

<u>S_p est convexe !</u>

b) Soit $(M,N)\in S_p$. Posons $Q=MN$.

• $\forall (i,j)\in [\![1,p]\!]^2$, $a_{ij}(Q)=\sum_{k=1}^{p} \underbrace{a_{ik}(M)}_{\geqslant 0}\,\underbrace{a_{kj}(N)}_{\geqslant 0} \geqslant 0$

• $\forall i\in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}(Q)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(M)\,a_{kj}(N)=\sum_{k=1}^{p}\Big[a_{ik}(M)\underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{kj}(N)\Big)}_{=1}\Big]=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(M)=1$

donc $MN=Q\in S_p$. $\underline{\forall (M,N)\in S_p^2,\ MN\in S_p.}$

c) Soit $A\in S_p$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Notons que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $A^k\in S_p$ (récurrence simple utilisant b))

. $\forall (i,j)\in [\![1,p]\!]^2$, $a_{ij}(C_n)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{a_{ij}(A^k)}_{\geqslant 0}\geqslant 0$

. $\forall i\in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}(C_n)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{n} a_{ij}(A^k)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{p} a_{ij}(A^k)\Big)}_{=1 \text{ car } A^k\in S_p}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1=1$

Par conséquent : $\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ C_n\in S_p.}$

Supposons que $(C_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers C. Montrons que $C\in S_p$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $C_n\in S_p$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall (i,j)\in [\![1,p]\!]^2$, $a_{ij}(C_n)\geqslant 0$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall i\in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}(C_n)=1$

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : – $\forall (i,j)\in [\![1,p]\!]^2$, $a_{ij}(C)\geqslant 0$. Donc $\underline{C\in S_p}$

– $\forall i\in [\![1,p]\!]$, $\sum_{j=1}^{p} a_{ij}(C)=1$

Q2 a) La condition est évidemment suffisante.

. Notons qu'elle est nécessaire. Supposons que M soit une matrice déterministe.

Soit $i\in [\![1,p]\!]$. Les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ ligne de M sont des 0 ou des 1 et leur somme vaut 1 ; nécessairement l'un vaut 1 et les autres valent 0.

Par conséquent les coefficients de M sont égaux à 0 ou à 1 et chaque ligne de M contient exactement un coefficient égal à 1.

b) Les éléments de D_p sont entièrement déterminés par la donnée pour chacune de leurs lignes de l'indice de la colonne qui contient le 1. Précisons.

Si $M\in D_p$ et si $i\in [\![1,p]\!]$ notons $\widehat{R}_i(M)$ le rang de la colonne où se trouve le 1 de la $i^{\text{ème}}$ ligne de M. Considérons l'application $\varphi : D_p \longrightarrow [\![1,p]\!]^p$

$$M \longmapsto (\widehat{R}_1(M),\widehat{R}_2(M),\dots,\widehat{R}_p(M))$$

φ est une bijection de D_p sur $[\![1,p]\!]^p$.

Comme l'ensemble $[\![1,p]\!]^p$ est fini et de cardinal p^p, D_p est fini et a p^p éléments.

c) Soit $(M,N) \in D_p^2$.

→ d'après 3.b, MN est une matrice stochastique.

→ $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $a_{ij}(MN) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}(M)\, a_{kj}(N) = a_{ij_0}(M)\, a_{j_0 j}(N)$ où $a_{ij_0}(M)$ est le seul élément de $i^{\text{ème}}$ ligne de M qui vaut 1 $(j_0 = \widehat{R}_i(M) \dots)$

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $a_{ij}(MN) = a_{ij_0}(M)\, a_{j_0 j}(N) = a_{j_0 j}(N) \in \{0,1\}$

les coefficients de MN sont donc égaux à 0 ou à 1.

Par conséquent MN est une matrice déterministe.

$\forall (M,N) \in D_p^2$, $MN \in D_p$.

d) Soit $A \in D_p$. $A, A^2, \dots, A^{p^p}, A^{p^p+1}$ sont p^p+1 éléments de D_p (d'après ce qui précède les puissances des éléments de D_p sont des éléments de D_p). Comme D_p contient p^p éléments cela signifie que dans la liste précédente au moins deux éléments sont égaux.

Par conséquent $\exists (m,m') \in [\![1, p^p+1]\!]$, $m < m'$ et $A^m = A^{m'}$.

Posons $r = m' - m$. $r \geqslant 1$ et $A^m = A^{m'} = A^{m+r}$

$\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists m \in \mathbb{N}$, $A^{m+r} = A^m$.

Soit $k \in [\![m, +\infty[\![$, $A^{k+r} = A^{m+r} A^{k-m} = A^m A^{k-m} = A^k$.

$\forall k \in [\![m, +\infty[\![$, $A^{k+r} = A^k$. A est r-périodique à partir du rang m.

Supposons A inversible. A^m l'est aussi.

Comme $A^{m+r} = A^m$: $(A^m)^{-1} A^m A^r = (A^m)^{-1} A^m$; $A^r = I_p$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $A^{k+r} = A^k A^r = A^k$; A est r-périodique.

e) Soit A une matrice déterministe inversible. Montrons que A^{-1} l'est aussi.

d'après ce qui précède il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ tel que A soit r-périodique.

$A^r = A^{0+r} = A^0 = I_p$; $A^r = I_p$; $A^{-1}A^r = A^{-1}$; $A^{-1} = A^{r-1}$

Comme $A \in D_p$, $A^{r-1} \in D_p$; par conséquent A^{-1} est une matrice déterministe inversible.

Q3 a) Soit $A \in D_p$.

Supposons A irréductible. Il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ tel que A soit r-périodique.

D'après II Q2 $(C_n)_{n\geq 0}$ converge vers $C = \frac{1}{r}\left[I + A + \cdots + A^{r-1}\right]$ et $C^2 = C$.

D'après III Q1 $C \in S_p$.

Cl... Si $A \in D_p$ et si A est irréductible : $(C_n)_{n\geq 0}$ converge vers une matrice stochastique C telle que $C^2 = C$.

b) Soit $A \in D_p$ et A non irréductible.

Il existe un élément r de $\mathbb{N}^*$ et un élément m de $\mathbb{N}$ tels que A soit r-périodique à partir du rang m.

D'après II Q3 $(C_n)_{n\geq 0}$ admet une limite C $\left(C = \frac{1}{r}(A^m + A^{m+1} + \cdots + A^{m+r-1})\right)$

D'après III Q1 $C \in S_p$ (...dire pourquoi...).

Ne reste plus qu'à prouver que $C^2 = C$

Notons tout d'abord que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k C = C$. Soit $k \in \mathbb{N}$. $k = qr + s$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $s \in [\![0, r-1]\!]$.

$$A^k C = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} A^{k+m+i} = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} A^{qr+s+m+i} = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} A^{m+s+i} = \frac{1}{r}\sum_{j=s}^{s+r-1} A^{m+j}$$

$$A^k C = \frac{1}{r}\left[\sum_{j=s}^{r-1} A^{m+j} + \sum_{j=r}^{s+r-1} A^{m+j}\right] = \frac{1}{r}\left[\sum_{j=s}^{r-1} A^{m+j} + \sum_{j=0}^{s-1} \underbrace{A^{m+j+r}}_{A^{m+j}}\right] = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1} A^{m+j} = C$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n C = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} A^k C = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} C = \frac{1}{n+1} \times (n+1) C = C$

<u>$\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n C = C$.</u>

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(C_n) a_{kj}(C) = a_{ij}(C)$. En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient :

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}(C) a_{kj}(C) = a_{ij}(C)$; donc $C^2 = C$.

Q4 a) La conception fatigue !

b) Soit $j \in [\![1,p]\!]$. $1 = a_{jj}(XY) = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}(X) a_{kj}(Y) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{jk}\beta_{kj}$

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\beta_{kj} \underset{\alpha_{jk}\geq 0 \text{ et } \beta_{kj}\leq \delta_j}{\leq} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\delta_j = \delta_j \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} \underset{X \in S_p}{=} \delta_j \quad ; \quad 1 \leq \delta_j$$

$\forall i \in [\![1,p]\!], \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_{ik} = 1 \text{ et } \forall k \in [\![1,p]\!], \beta_{ik} \geqslant 0\right)$

Par conséquent : $\forall (i,k) \in [\![1,p]\!]^2, \ \beta_{ik} \leqslant 1$

Donc $\gamma_j = \max(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \dots, \beta_{pj}) \leqslant 1$.

Finalement : $\forall j \in [\![1,p]\!], \gamma_j = 1$.

c) $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} = \sum_{i=1}^{p} 1 = p = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j$; $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j$.

Par conséquent : $\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} - \gamma_j \right) = 0$

Or $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} - \gamma_j \geqslant 0$ car $\gamma_j = \max(\beta_{1j}, \beta_{2j}, \dots, \beta_{pj})$

Donc $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} - \gamma_j = 0$ (la somme des réels positifs est nulle)

Donc $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\sum_{i=1}^{p} \beta_{ij} = \gamma_j$. Soit $j \in [\![1,p]\!]$

Fixons j dans $[\![1,p]\!]$. $\exists i_0 \in [\![1,p]\!]$, $\beta_{i_0 j} = \gamma_j$

Par conséquent $\beta_{i_0 j} = 1$ et $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{p} \beta_{ij} = 0$; comme $\forall i \in [\![1,p]\!], \beta_{ij} \geqslant 0$ on a :

$\beta_{i_0 j} = 1$ et $\forall i \in [\![1,p]\!] - \{i_0\}, \beta_{ij} = 0$. La $j^{\text{ème}}$ colonne de Y a ses coefficients qui valent 0 ou 1.

Par conséquent les coefficients de Y valent 0 ou 1. Y est une matrice déterminée.

d) Ainsi $Y \in \Delta_p$ et comme on a aussi $YX = I_p$: $X \in \Delta_p$ ($X = Y^{-1}$!)

e) Soit $(U,V) \in S_p^2$ tel que $UV \in \Delta_p$.

UV est déterminée et inversible, notons H son inverse ; H est déterminée et inversible.

$UVH = I_p$; $U(VH) = I_p$. Or $V \in S_p$ et VH aussi car V et H sont dans S_p

D'après ce qui précède, $U \in S_p$, $VH \in S_p$ et $U(VH) = I_p$ donne : $U \in \Delta_p$ (et $VH \in \Delta_p$!)

En écrivant $I_p = HUV = (HU)V$ on obtient de la même manière : $V \in \Delta_p$.

Donc $\forall (U,V) \in S_p^2$, $UV \in \Delta_p \Rightarrow U \in \Delta_p$ et $V \in \Delta_p$. Ce qui achève ce beau problème.