

(Q1)

soient a, b deux réels tels que $a < b$.
 Il y a une fonction numérique continue sur $[a, b]$, dérivable
 sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$.

(Q2)

Commençons par prouver un lemme.

numérique

Lemme --

Soit h une fonction dérivable sur $[-1, 1]$ n'annulant en aucun
 point distinct de $[-1, 1]$ ($h \in W^1$)
 Alors h' s'annule en au moins h points distincts de $]-1, 1[$.

On. Soient $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$ les zéros de h tels que $-1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{k+1} \leq 1$.

Soit $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. h est, localement, continue sur $[x_i, x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$
 et $h(x_i) = h(x_{i+1}) (= 0)$. La dérivée de h ne peut alors l'équivaloir d'un
 élément y_i de $]x_i, x_{i+1}[$ tel que $h'(y_i) = 0$.

Noter que $-1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_k \leq 1$. Ainsi h' s'annule en au moins h points
 distincts de $]-1, 1[$.

a) g est dérivable sur $[-1, 1]$ et s'annule en au moins $n+1$ points distincts de $[-1, 1]$.
 de même même chose que : g' s'annule en au moins n points distincts de $]-1, 1[$.

b) Notons par conséquent que pour tout élément i de $\{1, 2, \dots, n\}$, $g^{(i)}$
 s'annule en au moins $n+1-i$ points distincts de $]-1, 1[$ (... en au
 moins un point de $]-1, 1[$ dans le cas où $i = n$!)

. La propriété est vraie pour $i = 1$ d'après a)

. Supposons la propriété vraie pour un élément i de $\{1, 2, \dots, n\}$ et montrons-
 le pour $i+1$.

Supposons donc que $g^{(i)}$ s'annule en au moins $n+1-i$ points distincts
 de $]-1, 1[$ (... donc de $[-1, 1]$). $g^{(i+1)}$ est dérivable sur $[-1, 1]$ car $i < n$.
 Ainsi, d'après le lemme $(g^{(i)})'$ s'annule en au moins $n-i$ points distincts de $]-1, 1[$.

Alors $g^{(n)}$ s'annule à une même $n+1-(i+1)$ points distincts de $J-1, \mathbb{C}$ et ainsi s'achève la récurrence.

En particulier la propriété est vraie pour n . $n+1-n=1$ donc $g^{(n)}$ s'annule à une même un point de $J-1, \mathbb{C}$.

$\exists c \in J-1, \mathbb{C}$, $g^{(n)}(c) = 0$.

Partie I

(Q1 a) Soit $(c \in \mathbb{B}_{1,n} \mathbb{I})$. $L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (x - a_k)$; ainsi $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ sont racines de L_i . $\forall j \in \mathbb{B}_{1,n} \mathbb{I} - \{i\}$, $L_i(a_j) = 0$. $L_i(a_i) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k) \neq 0$ car $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont racines deux à deux distinctes.

Ainsi: $\forall c \in \mathbb{B}_{1,n} \mathbb{I}$, $\forall j \in \mathbb{B}_{1,n} \mathbb{I}$, $j \neq i \Rightarrow L_i(a_j) = 0$. $\forall i \in \mathbb{B}_{1,n} \mathbb{I}$, $L_i(a_i) \neq 0$.

b) Existence:- Pour $P_j = \sum_{i=1}^n \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i$!

$\forall i \in \mathbb{B}_{1,n} \mathbb{I}$, $L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (x - a_k) \in \mathbb{H}_{n-1}[\lambda]$ donc P_j appartient à $\mathbb{H}_{n-1}[\lambda]$ comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{H}_{n-1}[\lambda]$.

$$\forall j \in \mathbb{B}_{1,n} \mathbb{I}, P_j(a_j) = \sum_{i=1}^n \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i(a_j) = \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i(a_i) = f(a_i).$$

$$\frac{a_j}{a_j} \rightarrow L_i(a_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

Ainsi $P_j = \sum_{i=1}^n \frac{f(a_i)}{L_i(a_i)} L_i$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, tel

que pour toute fonction f de $\mathbb{B}_{1,n} \mathbb{I}$, $P_j(a_j) = f(a_j)$.

unicité:- Soit $\hat{P}_j$ un second élément de $\mathbb{H}_{n-1}[\lambda]$ tel que: $\forall j \in \mathbb{B}_{1,n} \mathbb{I}$, $\hat{P}_j(a_j) = f(a_j)$.

Alors $P_j - \hat{P}_j \in \mathbb{H}_{n-1}[\lambda]$ et $\forall j \in \mathbb{B}_{1,n} \mathbb{I}$, $(P_j - \hat{P}_j)(a_j) = f(a_j) - f(a_j) = 0$.

$P_f - \tilde{P}_f$ est donc un polynôme de degré au plus $n-1$ admettant au moins n racines distinctes ; c'est donc le polynôme nul. Ainsi $\tilde{P}_f = P_f$.

Répète un unique polynôme P_f de degré au plus $n-1$ qui coïncide avec

$$f \text{ en } a_1, a_2, \dots, a_n. \quad P_f = \sum_{i=1}^n f(a_i) \frac{L_i}{L_i(a_i)}$$

$$(Q2) \quad \int_{-1}^1 P_f(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=1}^n f(a_i) \frac{L_i(x)}{L_i(a_i)} \right) dx = \sum_{i=1}^n f(a_i) \frac{1}{L_i(a_i)} \int_{-1}^1 L_i(x) dx.$$

$$\int_{-1}^1 P_f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(a_i) \delta_i = \sum_{i=1}^n \delta_i f(a_i).$$

(Q3) Supposons que f soit une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $n-1$. Alors f est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui coïncide avec $f(i)$ en $a_1, a_2, \dots, a_n$. Ainsi $f = P_f$.

$$\text{Avec } I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 P_f(x) dx = J_n(f).$$

Si f est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à $n-1$: $I(f) = J_n(f)$.

q) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(Q4) \quad \forall f(x) = P_f(x) - \lambda A_n(x) = \sum_{i=1}^n \lambda A_n(a_i) = f(a_i) - P_f(a_i) \Leftrightarrow \lambda = \frac{f(a_i) - P_f(a_i)}{A_n(a_i)}$$

$$A_n(a_i) \neq 0 \text{ car } x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$$

Répète un réel λ quel que soit f : $f(a_i) - P_f(a_i) = \lambda A_n(a_i) = 0$. $\lambda = \frac{f(a_i) - P_f(a_i)}{A_n(a_i)}$.

$$b) \quad \forall x \in [a, b], g_1(x) = f(x) - P_f(x) - \lambda A_n(x) = f(x) - P_f(x) - \lambda A_n(x) = 0.$$

$$\forall x \in [a, b], g_1(x) = 0.$$

Si P_f et A_n sont des polynômes - donc P_f et A_n sont de degré $\leq n$ ou $[1, 1]$. Soit de degré $\leq n$ ou $[1, 1]$.

Ainsi g_1 est de degré $\leq n$ ou $[1, 1]$; en particulier g_1 est de degré $\leq n$ ou $[1, 1]$.

$\forall i \in \mathbb{N}, u, v, g_i(u) = 0$ et $g_i(v) = 0$. Or pour $a_1, a_2, \dots, a_n$, l'ensemble de $\{i, j\}$ dans $\mathbb{N}$ d'après définition et $x \in \{i, j\} - \{a_1, \dots, a_n\}$. Alors $a_1, a_2, \dots, a_n$, x sont des éléments de $\{i, j\}$ dans $\mathbb{N}$ d'après définition qui annule g_i .

g_i s'annule en au moins un point distinct de $\{i, j\}$.

Le polynôme peut alors se dire que : $\exists c \in \mathbb{J} - \{i, j\}, g_i(c) = 0$.

$$g_i^{(n)} = f^{(n)} - \lambda A_n^{(n)}. \quad P_f^{(n)} = 0 \text{ car } P_f \in \mathcal{H}_{n-1}(\mathbb{R}).$$

A_n est un polynôme de degré n dont le coefficient de x^n est 1, ainsi $A_n^{(n)} = n!$

$$\text{Alors } g_i^{(n)} = f^{(n)} - \lambda n! \quad 0 = g_i^{(n)}(c) = f^{(n)}(c) - \lambda n!$$

$$\lambda = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

(QS) Reprenons x dans $\{i, j\} - \{a_1, \dots, a_n\}$. Posons $\lambda = \frac{f^{(n)}(c) - P_f^{(n)}(c)}{A_n^{(n)}(c)}$.

D'après ce qui précède : $\exists c \in \mathbb{J} - \{i, j\}, \lambda = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

$$\text{Alors } |f^{(n)}(c) - P_f^{(n)}(c)| = \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} A_n^{(n)}(c) \right| = \frac{1}{n!} |f^{(n)}(c)| |A_n^{(n)}(c)| \leq \frac{P_n(f)}{n!} |A_n^{(n)}(c)|.$$

$$|f^{(n)}(c) - P_f^{(n)}(c)| \leq \frac{P_n(f)}{n!} |A_n^{(n)}(c)|.$$

Montrons que cette égalité vaut avec lorsque x est élément de $\{a_1, \dots, a_n\}$ car dans ce cas $f^{(n)}(c) - P_f^{(n)}(c) = A_n^{(n)}(c) = 0$.

$$\text{Finalement : } \forall c \in \{i, j\}, |f^{(n)}(c) - P_f^{(n)}(c)| \leq \frac{P_n(f)}{n!} |A_n^{(n)}(c)|.$$

$$|I(f) - J_n(f)| = \left| \int_1^x (f(u) - p_k(u)) du \right| \leq \int_1^x |f(u) - p_k(u)| du \leq \frac{\rho_n(f)}{n!} \int_1^x |A_n(u)| du.$$

$$|I(f) - J_n(f)| \leq \frac{\rho_n(f)}{n!} \int_1^x |A_n(u)| du.$$

Q6 a) Soit $k \in \mathbb{I}_{1, n-1}$ et soit $x \in [a_k, a_{k+1}]$.
Soit $i \in \mathbb{I}_{1, n}$.

* $i \leq k$ $|x - a_i| = x - a_i \leq a_{k+1} - a_i = \frac{L}{n-1} (k-i+1)$

* $i > k$ $|x - a_i| = a_i - x \leq a_i - a_k = \frac{L}{n-1} (i-k)$

$$|A_n(x)| = \prod_{i=1}^n |x - a_i| = \left(\prod_{i=1}^k |x - a_i| \right) \left(\prod_{i=k+1}^n |x - a_i| \right) \leq \prod_{i=1}^k \frac{L(k-i+1)}{n-1} \times \prod_{i=k+1}^n \frac{L(i-k)}{n-1}.$$

$$|A_n(x)| \leq \left(\frac{L}{n-1} \right)^k (k \times (k-1) \times \dots \times 1) \times \left(\frac{L}{n-1} \right)^{n-k} (1 \times 2 \times \dots \times (n-k)).$$

$$|A_n(x)| \leq \left(\frac{L}{n-1} \right)^n \times k! \times (n-k)!$$

$$\forall k \in \mathbb{I}_{1, n-1}, \forall x \in [a_k, a_{k+1}], |A_n(x)| \leq \left(\frac{L}{n-1} \right)^n k! (n-k)!$$

b) Pour obtenir le résultat demandé il suffit de prouver que :

$$\forall k \in \mathbb{I}_{1, n-1}, k! (n-k)! \leq (n-1)! \text{ ou que}$$

$$\forall k \in \mathbb{I}_{1, n-1}, n \leq \frac{n!}{k! (n-k)!} = C_n^k.$$

montrons ce résultat à l'aide d'une récurrence forte sur k .

→ C'est clair pour $k=1$ car $C_n^1 = n$.

→ Supposons la propriété vraie jusqu'à k pour k dans $\mathbb{I}_{1, n-1}$ et montrons la pour $k+1$.

Observons que $C_n^{k+1} = C_n^{n-k-1}$ et $n-k-1 \leq k \Leftrightarrow k \geq \frac{n-1}{2}$.

Distinguer alors deux cas.

1^{er} cas... $k \geq \frac{n-1}{2}$. Alors $n-k-1 \in \mathbb{I}_{1, k}$ et l'hypothèse de récurrence
 $\uparrow$
 $n-k-1 \geq 1$ car $k \leq n-2$

dans $C_n^{n-k-1} \geq n$ donc $C_n^{k+1} \geq n$.

donc $C_n^{k+1} \geq n$; $k < n-1$; $2k \leq n-2$; $n \geq 2k+2$

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1} \geq \frac{2k+2-k}{k+1} = \frac{k+2}{k+1} \geq 1.$$

Ainsi $C_n^{k+1} \geq C_n^k \geq n$. Ceci admette la récurrence. $\forall k \in [1, n-1]$, $\underbrace{n \leq C_n^k \text{ ou } k!(n-k)! \leq (n-1)!}_{(n-1)!}$

soit $x \in [-1, 1]$. $\exists k \in [1, n-1]$, $x \in [a_k, a_{k+1}]$.

$$|A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^n k!(n-k)! \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!$$

$$\text{Finalement } \forall x \in [-1, 1], |A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!$$

si soit $x \in [1, +\infty[$

$$\frac{\left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!}{(2e)^n} = \frac{e}{n-1} \times \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}} = \frac{e}{n-1} \times \sqrt[n-1]{(n-1)!} \times \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \sqrt[n-1]{(n-1)!}}$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{n-1} \sqrt[n-1]{(n-1)!} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e \sqrt[n-1]{(n-1)!}}{\sqrt[n-1]{(n-1)!}} \right) = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \sqrt[n-1]{(n-1)!}} = 1 \text{ car } (n-1)! \sim \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \sqrt[n-1]{(n-1)!}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!}{(2e)^n} = 0. \text{ Alors :}$$

$$\exists n_0 \in [2, +\infty[, \forall x \in [n_0, +\infty[, \frac{\left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)!}{(2e)^n} \leq 1.$$

$$\forall x \in [n_0, +\infty[, \left(\frac{2}{n-1}\right)^n (n-1)! \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n. \forall x \in [n_0, +\infty[, \forall x \in [-1, 1], |A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

PARTIE II

Q1) a) τ est une application de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^k$.

. Soit $(f, \varphi) \in (\mathbb{R}_{k-1}[X])^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\tau(\lambda f + \varphi) = (\lambda \varphi + \varphi(a_1), \dots, \lambda \varphi + \varphi(a_k), (\lambda \varphi + \varphi)'(a_1), \dots, (\lambda \varphi + \varphi)'(a_k)).$$

$$\tau(\lambda f + \varphi) = (\lambda \varphi(a_1) + \varphi(a_1), \dots, \lambda \varphi(a_k) + \varphi(a_k), \lambda \varphi'(a_1) + \varphi'(a_1), \dots, \lambda \varphi'(a_k) + \varphi'(a_k)).$$

$$\tau(\lambda f + \varphi) = \lambda \varphi(a_1, \dots, a_k), \varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k), \varphi'(a_1), \dots, \varphi'(a_k)$$

$$\tau(\lambda f + \varphi) = \lambda \tau(\varphi) + \tau(\varphi).$$

Ainsi τ est une application linéaire de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^k$.

b) Soit $\varphi \in K \cap \tau$. $\varphi(a_1) = \varphi'(a_1) = 0, \dots, \varphi(a_k) = \varphi'(a_k) = 0$

Pour tout i dans $\overline{1, k-1}$, a_i est une racine d'ordre au moins 2 de φ . Rappelons que $a_1, \dots, a_k$ sont n zéros deux à deux distincts. Alors φ admet au moins n racines (comptées avec leur ordre de multiplicité). Comme φ est un polynôme de degré au plus $k-1$, φ est nécessairement le polynôme nul. Alors $K \cap \tau = \{0_{\mathbb{R}_{k-1}[X]}\}$. τ est injective.

τ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^k$ et $\dim \mathbb{R}_{k-1}[X] = \dim \mathbb{R}^k = k$. Alors τ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^k$.

τ est bijective.

c) Soit $\varphi \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$

$$\forall j \in \overline{1, n-1}, \varphi(a_j) = f(a_j) \text{ et } \varphi'(a_j) = f'(a_j) \Leftrightarrow \tau(\varphi) = (f(a_1), \dots, f(a_k), f'(a_1), \dots, f'(a_k)).$$

Or $(f(a_1), \dots, f(a_k), f'(a_1), \dots, f'(a_k))$ est un élément de $\mathbb{R}^k \cap \tau$ et une bijection de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^k$. Ainsi $\exists ! \varphi_f \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\tau(\varphi_f) = (f(a_1), \dots, f(a_k), f'(a_1), \dots, f'(a_k))$.

Pour conclure il suffit de montrer l'unicité de ce polynôme φ_f de degré inférieur ou égal à $k-1$.

tel que : $\forall j \in \overline{1, n-1}, \varphi_f(a_j) = f(a_j) \text{ et } \varphi_f'(a_j) = f'(a_j).$

Q2) Si f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $k-1$, $\varphi_f = f$ car $\forall j \in \overline{1, n-1}, f(a_j) = f(a_j)$ et $f'(a_j) = f'(a_j)$!!
Si f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $k-1$: $f'(a_j) = f'(a_j)$.

(Q3) $A_n^2 = \tilde{\Pi}(\kappa - \alpha e)^2$. Ainsi $\forall j \in \mathbb{I}_{1,n}$, $A_n(q_j) = A_n'(q_j) = 0$.

Ainsi $\forall j \in \mathbb{I}_{1,n}$, $Q_{A_n}(q_j) = Q_{A_n}'(q_j) = 0$; $Q_{A_n} \in K \cap T$; $Q_{A_n} = Q_{A_n}(w)$.

Par conséquent: $|T(A_n) - K_n(A_n)| = |T(A_n)| = \left| \int_{-1}^1 A_n^2(w) dw \right| = \int_{-1}^1 A_n^2(w) dw$.

$A_n^2 = \tilde{\Pi}(\kappa - \alpha e)^2$; alors $(A_n^2)^{(2n)} = (2n)!$.

Ainsi $\Gamma_{A_n}(A_n^2) = \sup_{x \in \mathbb{I}_{1,n}} |(A_n^2)^{(2n)}(x)| = (2n)!$.

Finalement: $|T(A_n) - K_n(A_n)| = \int_{-1}^1 A_n^2(w) dw = \frac{(2n)!}{(2n)!} \int_{-1}^1 A_n^2(w) dw = \frac{\Gamma_{A_n}(A_n^2)}{(2n)!} \int_{-1}^1 A_n^2(w) dw$.

d'inégalité proposée est une égalité si et seulement si A_n^2 est proportionnelle à $A_n^2(w)$.

En fait l'inégalité proposée est optimale.

Exercice 3. - Noter un résultat analogue pour l'inégalité de T. Q. S.

Exercice 4. - Prouver l'inégalité aduée. Prouver deux cas: $\mathbb{I}_{1,1}$ et $\mathbb{I}_{1,2}$.

considérer $h_1(t) = f(t) - Q_f(t) - \lambda A_n^2(t)$ et montrer $h_1(t) = 0$.

Prouver alors que h_1 n'annule que zéro sur $\mathbb{I}_{1,1}$.

(Q4). ϕ est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $(p, q, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow \phi(\lambda, p, q, r) = \int_{-1}^1 (\lambda p + q + r e) e^t dt = \int_{-1}^1 (\lambda p e^t + q e^t + r e^t) dt$

$\phi(\lambda, p, q, r) = \lambda \int_{-1}^1 p e^t e^t dt + \int_{-1}^1 q e^t e^t dt = \lambda \phi(p, r) + \phi(q, r)$

$\phi(\lambda, p, q, r) = \lambda \phi(p, r) + \phi(q, r)$.

$\rightarrow \phi(p, q) = \int_{-1}^1 p e^t q e^t dt = \int_{-1}^1 q e^t e^t dt = \phi(q, p)$. $\phi(p, q) = \phi(q, p)$.

$\rightarrow \forall t \in \mathbb{I}_{1,1}$, $p^2(t) \geq 0$; $\int_{-1}^1 p^2(t) dt \geq 0$; $\phi(p, p) \geq 0$.

→ Supposons que $\phi(p, v) = 0$. $\int_1^t p'(t) dt = 0$. p est constante et
 positive sur $[1, t]$ et $\int_1^t p'(t) dt = 0$. Mais $\forall t \in [1, t]$, $p'(t) = 0$.
 $\forall t \in [1, t]$, $p'(t) = 0$. $p \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et p admet une infinité de racines.
 Mais p est une polynôme nul.

$$\phi(p, v) = 0 \Rightarrow p = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

ceci implique de prouver que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(Q5) a) $Q_f - P_g \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, $(Q_f - P_g)(\alpha_j) = 0$.

Ainsi $Q_f - P_g$ est divisible par $\prod_{j=1}^n (X - \alpha_j) = A_n$.

$\exists v \in \mathbb{R}[X]$, $Q_f - P_g = A_n v$. Comme $\deg(Q_f - P_g) \leq \deg A_n = n$,
 $\deg v \leq n - 1$.

Repère un polynôme v de degré au plus $n-1$ vérifiant $Q_f - P_g = A_n v$.

Supposons A_n admettant une infinité de racines.

Mais $\phi(A_n, v) = 0$.

$$K_n(f) - J_n(g) = \int_{-1}^1 (Q_f(u) - P_g(u)) du = \int_{-1}^1 A_n(u) v(u) du = \phi(A_n, v) = 0.$$

$$\text{Si } A_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^+, \quad K_n(f) = J_n(g).$$

b) Supposons que $A_n \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]^+$. $\exists \tilde{v} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\phi(A_n, \tilde{v}) \neq 0$.

Considérons $f: x \mapsto A_n(u) \tilde{v}(u)$. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$.

f est une fonction polynômiale de degré au plus $n-1$; $Q_f = f$.
 Or pour $f(u) = f(u) = \dots = f(u) = 0$ donc $P_g = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$K_n(f) - J_n(g) = \int_{-1}^1 Q_f(u) du - \int_{-1}^1 P_g(u) du = \int_{-1}^1 f(u) du = \int_{-1}^1 f(u) du$$

$$K_n(f) - J_n(g) = \int_{-1}^1 A_n(u) \tilde{v}(u) du = \phi(A_n, \tilde{v}) \neq 0; \quad K_n(f) \neq J_n(g).$$

Si $A_n \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]^+$ il existe une fonction f telle que $K_n(f) \neq J_n(g)$.

PARTIE III

(Q1) $R_3 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $X^3 - R_3$ est orthogonal à $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, R_3 = aX^2 + bX + c.$$

$$\forall \ell \in \mathbb{N}_0, \ell \leq 2, \phi(X^3 - R_3, X^\ell) = 0; \quad \forall \ell \in \mathbb{N}_0, \ell \leq 2, \phi(X^3, X^\ell) = \phi(X^3, X^\ell).$$

$$\text{Alors } \forall \ell \in \mathbb{N}_0, \ell \leq 2, a \phi(X^2, X^\ell) + b \phi(X, X^\ell) + c \phi(1, X^\ell) = \phi(X^3, X^\ell).$$

$$\text{Notons que: } \forall (i, j) \in \mathbb{N}_0, \int_1^1 x^{i+j} dx = \left(\frac{x^{i+j+1}}{i+j+1} \right) \Big|_1^1 = \frac{1 - (-1)^{i+j+1}}{i+j+1}.$$

$$\forall \ell \in \mathbb{N}_0, \ell \leq 2, a \frac{1 - (-1)^{\ell+3}}{\ell+3} + b \frac{1 - (-1)^{\ell+2}}{\ell+2} + c \frac{1 - (-1)^{\ell+1}}{\ell+1} = \frac{1 - (-1)^{\ell+3}}{\ell+3}.$$

ce qui donne le système :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}a + 2c = 0 \\ \frac{2}{3}b = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c = 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors } a = c = 0 \text{ et } b = \frac{2}{3}. \quad R_3 = \frac{2}{3}X. \quad \underline{\underline{S_3 = X^3 - \frac{2}{3}X.}}$$

(Q2) a) $S_n = X^n - R_n$ et $R_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

S_n est de degré n et le coefficient dominant de S_n est 1.

b) $\exists \ell \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ donc $\phi(S_n, S_n) = 0$.

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\int_1^1 S_n(x) dx = 0.}}$$

Supposons que S_n n'ait pas de racine dans $] -1, 1[$. Alors S_n garde un signe constant sur $] -1, 1[$ (S_n est continue sur $] -1, 1[$ et même sur $[-1, 1]$ (toujours la continuité de S_n , cette fois sur $[-1, 1]$).

S_n est continue sur $[-1, 1]$, de signe constant sur $[-1, 1]$ et $\int_{-1}^1 S_n(x) dx = 0$.

Alors S_n est nul (et) sur $[-1, 1]$. Ceci contredit $\deg S_n = n$.

S_n a au moins une racine dans $] -1, 1[$.

③ $\square \varphi \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors $\phi(S_n, \varphi) = 0$.

(*) mieux $\varphi \in \mathbb{R}_{n-2}[X] \dots$
mais inutile.

Ainsi $\int_1^1 (x-u)^2 (\varphi(u))^2 du = 0$; $\phi((X-\alpha)\varphi, (X-\alpha)\varphi) = 0$; $(X-\alpha)\varphi = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

Alors $\varphi = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ et: $S_n = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$!

Il n'existe pas de réel α et de polynôme φ tel que: $S_n = (X-\alpha)^2 \varphi$.

Ainsi toutes les racines réelles de S_n sont simples.

b) Soit racines de $S_n U$ dans $]-1, 1[$ soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ et elles sont d'ordre α_i ; ainsi $S_n U$ ne change pas de signe dans $]-1, 1[$ de α_i dans $]-1, 1[$ ($S_n U$ est continue sur $[-1, 1]$). $S_n U$ garde un signe constant sur $[-1, 1]$.

$S_n U$ est continue sur $[-1, 1]$ et garde un signe constant sur $[-1, 1]$.

Alors $\int_1^1 (S_n U)(u) du = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, (S_n U)(k) = 0 \xrightarrow{S_n U \in \mathbb{R}_n[X]} S_n U = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$!!

donc $\int_1^1 (S_n U)(u) du \neq 0$. Ne plus p.s.u car $\deg S_n = n$ donc $U \in \mathbb{R}_n[X]$.

Alors $\phi(S_n, U) \neq 0$ donc $U \notin \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et par conséquent $\deg U \geq n-1$.

Soit: $\deg \prod_{i=1}^p (X-\alpha_i) \geq n-1$; $p \geq n-1$; $p \geq n$; $p = n$ car p.s.u.

Alors S_n admet au moins n racines α_i dans $]-1, 1[$. Comme $\deg S_n = n$:

S_n admet exactement n racines (réelles) α_i dans $]-1, 1[$: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

$\deg S_n = n$ et le coefficient de X^n dans S_n est 1 donc $S_n = \prod_{j=1}^n (X-\alpha_j)$.

II QS

④ $A_n = S_n \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $K_n(f) = J_n(f)$. Ainsi $\|I(f) - J_n(f)\| = \|I(f) - K_n(f)\|$

II Q 3 donc alors: $\|I(f) - J_n(f)\| \leq \frac{R_n(f)}{(n!)} \int_1^1 S_n^2(u) du$.

(95) $n=3$. $S_3 = x^3 - \frac{3}{5}x$. $\text{deg} f(u) = S_3$ and $a_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Then $\mathcal{S}_3(f) = S_3 f(u_1) + S_2 f(u_2) + S_1 f(u_3) = S_1 f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + S_2 f(0) + S_3 f(\sqrt{\frac{3}{5}})$.

calculate S_1, S_2, S_3 . $a_1 = x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $a_2 = x_2 = 0$, $a_3 = x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$.

$S_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{L_1(u_1)} L_1(x) du = (x-0)(x-\sqrt{\frac{3}{5}}) = x^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}x$.

$L_1(a_1) = (-\sqrt{\frac{3}{5}})(-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}) = \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \int_{-1}^1 L_1(u) du = \int_{-1}^1 (x^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}x) du = \int_{-1}^1 x^2 du = \frac{2}{3}$.

$x \mapsto x \text{ et } \sqrt{\frac{3}{5}}$

Then $S_1 = \frac{5}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$.

$S_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{L_2(u_2)} L_2(x) du = L_2 = (x + \sqrt{\frac{3}{5}})(x - \sqrt{\frac{3}{5}}) = x^2 - \frac{3}{5}$.

$L_2(a_2) = L_2(0) = -\frac{3}{5} \cdot \int_{-1}^1 L_2(u) du = \int_{-1}^1 (x^2 - \frac{3}{5}) du = \int_{-1}^1 x^2 du - \frac{3}{5} \int_{-1}^1 1 du = \frac{2}{3} - \frac{3}{5} \times 2$

$S_2 = -\frac{5}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} \right) = -\frac{10}{9} + \frac{6}{3} = \frac{8}{9}$.

$S_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{L_3(u_3)} L_3(x) du = L_3 = x(x + \sqrt{\frac{3}{5}}) = x^2 + \sqrt{\frac{3}{5}}x$.

noton que $L_3(x) = L_3(-x)$. $\frac{1}{L_3(a_3)} L_3(x) = \frac{1}{L_3(a_3)} L_3(-x) = \frac{1}{L_3(a_3)} L_3(-x)$.

$S_3 = \int_{-1}^1 \frac{1}{L_3(u_3)} L_3(-x) du = \int_{-1}^1 \frac{1}{L_3(u_3)} L_3(u) (-du) = \int_{-1}^1 \frac{1}{L_3(u_3)} L_3(u) du = S_3$.

$u = -x$

Then $S_3 = \frac{5}{9}$.

Finalment: $\mathcal{S}_3(f) = \frac{5}{3} f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{\frac{3}{5}})$

$\mathcal{S}_3(f) = \frac{1}{9} (5 f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + 8 f(0) + 5 f(\sqrt{\frac{3}{5}}))$

(Q6) a) pour $\forall t \in [1, 1]$, $f(t) = 1$. Soit de deux $\mathcal{B}^{\infty}$ ou $\mathcal{C}^{\infty}$.

$$f \in \mathcal{R}_{n,1}([X]) \text{ d'ac } J_n(f) = I(f) = \int_{-1}^1 1 \, dt = 2.$$

$$\text{Ainsi } L = J_n(f) = \sum_{i=1}^n S_i f(a_i) = \sum_{i=1}^n S_i. \quad \underline{\underline{\sum_{i=1}^n S_i = 2.}}$$

b) Soit $j \in [1, n]$. Pour $\forall t \in [1, 1]$, $f(t) = L_j^{\zeta}(t)$. Soit de deux $\mathcal{B}^{\infty}$ ou $\mathcal{C}^{\infty}$.

$$L_j \in \mathcal{R}_{n,1}([X]); \quad L_j^{\zeta} \in \mathcal{R}_{n,2}([X]); \quad L_j^{\zeta} \in \mathcal{R}_{n,1}([X]).$$

$$\text{Alors } I(f) = K_n(f) = J_n(f). \quad J_n(f) = \int_{-1}^1 L_j^{\zeta}(u) \, du > 0 \quad (L_j^{\zeta} \neq 0!)$$

$$\text{Alors } 0 < J_n(f) = \sum_{i=1}^n S_i f(a_i) = \sum_{i=1}^n S_i L_j^{\zeta}(a_i) = S_j L_j^{\zeta}(a_j).$$

$$\text{A } L_j(a_j) \neq 0 \text{ d'ac } L_j^{\zeta}(a_j) > 0 \text{ car } S_j L_j^{\zeta}(a_j) > 0 \text{ d'où } S_j > 0$$

$$\text{Finalement : } \underline{\underline{\forall j \in [1, n], d_j > 0.}}$$

$$\text{c) Pour } U_n = (-1)^n S_n(-x). \text{ Noter que } U_n = S_n.$$

Il suffit de prouver que $X^n \cdot U_n$ et la propriété orthogonale de X^n ou $\mathcal{R}_{n,1}([X])$.

$$\bullet \deg S_n = n \text{ et le coefficient de } X^n \text{ dans } S_n \text{ est } 1.$$

$$\text{Alors } \deg S_n(-x) = n \text{ et le coefficient de } X^n \text{ dans } S_n(-x) \text{ est } (-1)^n.$$

$$\text{Ainsi } \deg U_n = n \text{ et le coefficient de } X^n \text{ dans } U_n \text{ est } (-1)^n (-1)^n = 1.$$

$$\text{Alors } X^n \cdot U_n \in \mathcal{R}_{n,1}([X]).$$

$$\bullet \text{ Noter que } X^n \cdot (-1)^n S_n(-x) \text{ et orthogonal à } \mathcal{R}_{n-1}([X]) : \text{ ce qui veut}$$

$$\text{à prouver que } U_n \in \mathcal{R}_{n,1}([X])^{\perp}.$$

$$\text{Soit } R \in \mathcal{R}_{n-1}([X]). \quad \phi(U_n, R) = \int_{-1}^1 U_n(x) R(x) \, dx = \int_{-1}^1 (-1)^n S_n(-x) R(x) \, dx.$$

$$\phi(U_n, R) = \int_{-1}^1 (-1)^n S_n(u) R(-u) \, du = \int_{-1}^1 (-1)^n S_n(u) R(-u) \, du = (-1)^n \phi(S_n, R(-x)).$$

Or $S_n \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathbf{x}]^\perp$ et $R(-\mathbf{x}) \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathbf{x}]$ donc $\phi(S_n, R(-\mathbf{x})) = 0$.

Mais $\phi(U_n, R) = 0$ et ceci pour tout élément R de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathbf{x}]$.

Ceci entraîne de plus que $X^2 - U_n$ et la projection orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_{n-1}[\mathbf{x}]$.

Alors $X^2 - U_n = R_n$. $U_n = X^2 - R_n = S_n$. $S_n = U_n = (-1)^n S_n(-\mathbf{x})$

Finalement $S_n(-\mathbf{x}) = (-1)^n S_n(\mathbf{x})$.

Pour $\forall i \in \mathbb{I}_{3,n} \cup \mathbb{J}$, $\beta_i = -\alpha_i$.

Alors $\beta_n < \beta_{n-1} < \dots < \beta_3$ et $\forall i \in \mathbb{I}_{3,n} \cup \mathbb{J}$, $S_n(\beta_i) = S_n(-\alpha_i) = (-1)^n S_n(\alpha_i) = 0$.

Donc $(\beta_n, \beta_{n-1}, \dots, \beta_3) = (\alpha_3, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. $\forall i \in \mathbb{I}_{3,n} \cup \mathbb{J}$, $\beta_i = \alpha_{n+1-i}$

Pour conclure : $\forall i \in \mathbb{I}_{3,n} \cup \mathbb{J}$, $\alpha_{n+1-i} = -\alpha_i$.

doit $j \in \mathbb{I}_{3,n} \cup \mathbb{J}$.

$$\int_{-1}^1 L_{n+1-j}(u) du = \int_{-1}^1 L_{n+1-j}(-u) du \quad S_{n+1-j} = \frac{1}{L_{n+1-j}(\alpha_{n+1-j})} \int_{-1}^1 L_{n+1-j}(-u) du$$

$$L_{n+1-j}(-\mathbf{x}) = \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq n+1-j}}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (-\mathbf{x}) - \alpha_\ell = (-1)^n \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq n+1-j}}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (\mathbf{x} + \alpha_\ell)$$

$$L_{n+1-j}(-\mathbf{x}) = (-1)^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq n+1-j}}^n (\mathbf{x} + \alpha_{n+1-\ell}) = (-1)^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq j}}^n (\mathbf{x} - \alpha_\ell) = (-1)^n L_j(\mathbf{x}).$$

$$\text{Alors } S_{n+1-j} = \frac{1}{L_{n+1-j}(\alpha_{n+1-j})} \int_{-1}^1 (-1)^n L_j(u) du = \frac{1}{L_{n+1-j}(-\alpha_j)} \int_{-1}^1 (-1)^n L_j(u) du$$

$$S_{n+1-j} = \frac{1}{(-1)^n L_j(\alpha_j)} \int_{-1}^1 (-1)^n L_j(u) du = \frac{1}{L_j(\alpha_j)} \int_{-1}^1 L_j(u) du = S_j.$$

$\forall i \in \mathbb{I}_{1,n} \cup \mathbb{J}$, $S_{n+1-j} = S_j$.

Remarque... et cela se confirme car évident pour $n=3$.

(Q7) a) Soit $P \in R_n[X]$ tel que $\deg P = n$ et tel que le coefficient dominant de P soit 1.

$\exists Q \in R_{n-1}[X]$, $P = X^n + Q$. $P = X^n - \tilde{Q}$ avec $\tilde{Q} = -Q$. Noter que $\tilde{Q} \in R_{n-1}[X]$.

Supposons que R_n ait la propriété ad hoc de X^n sur $R_{n-1}[X]$.

Alors $\|X^n - R_n\| \leq \|X^n - \tilde{Q}\|$ ($\|\cdot\|$ et la norme associée à Q).

Ainsi $\|S_n\| \leq \|P\|$; $\|S_n\|^2 \leq \|P\|^2$; $\phi(S_n, S_n) \leq \phi(P, P)$.

ce qui donne $\int_0^1 S_n^2(x) dx \leq \int_0^1 P^2(x) dx$.

Pour tout polynôme P de degré n et de coefficient dominant 1: $\int_0^1 S_n^2(x) dx \leq \int_0^1 P^2(x) dx$.

b) Notons ce résultat à l'aide d'une récurrence "d'ordre 2".

• Pour $T_2 = x$ et $T_2 = X^2 - 1/2$.

T_2 (resp. T_2) est de degré 1 (resp. 2) et de coefficient dominant 1.

Le cas $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = 2^{1-1} T_1(\cos \theta)$ et $\cos(\theta) = 2(\cos^2 \theta - \frac{1}{2}) = 2^{2-1} T_2(\cos \theta)$

La propriété est aussi vraie pour $k = 1$ et 2.

• Supposons la propriété vraie pour k et $k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) et montrons la pour $k+2$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $2 \cos \theta \cos(k+1)\theta = \cos(\theta + (k+1)\theta) + \cos(\theta - (k+1)\theta)$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((k+1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(k+1)\theta - \cos(-k\theta) = 2 \cos \theta \cos(k+1)\theta - \cos(k\theta)$

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((k+2)\theta) = 2 \cos \theta \cos(k+1)\theta - \cos(k\theta) = 2^{k-1} T_k(\cos \theta)$.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((k+1)\theta) = 2^{k-1} [\cos \theta T_{k+1}(\cos \theta) - \frac{1}{2} T_k(\cos \theta)]$

Pour $T_{k+2} = X T_{k+1} - \frac{1}{2} T_k$. $\deg T_{k+1} = k+1$ et $\deg T_k = k$ donc

$\deg T_{k+2} = k+2$ de coefficient dominant de T_{k+2} est celui de $X T_{k+1}$

qui est 1 car le coefficient dominant de T_{k+1} est 1.

Le cas $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos((k+1)\theta) = 2^{k-1} [\cos \theta T_{k+1}(\cos \theta) - \frac{1}{2} T_k(\cos \theta)] = 2^{k+1} T_{k+2}(\cos \theta)$.

Ainsi la propriété est vraie pour $k+1$ et la récurrence s'achève.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ il existe un polynôme T_k de degré k et de coefficients dominants 1

tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(k\theta) = 2^{k-1} T_k(\cos \theta)$.

exercice -- Retrouver ce résultat en partant de $\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta})$. (Noter l'unicité de T_k).

T_n est de degré n et de coefficient dominant 1 donc $\int_{-1}^1 S_n^2(u) du \leq \int_{-1}^1 T_n^2(u) du$.

$$\int_{-1}^1 T_n^2(u) du \underset{x=\cos \theta}{=} \int_0^\pi T_n^2(\cos \theta) (-\sin \theta) d\theta = \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^2(u) \sin \theta d\theta \leq \frac{1}{4} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 1 d\theta$$

$$T_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\theta) \quad \cos^2(u) \sin \theta \leq 1.$$

Alors $\int_{-1}^1 T_n^2(u) du \leq \frac{\pi}{2^{n-1}}$. Alors $\int_{-1}^1 S_n^2(u) du \leq \frac{\pi}{2^{n-1}}$.

Remarque -- $\int_{-1}^1 T_n^2(u) du = \frac{1}{2^{n-1}} \int_0^\pi \cos^2(n\theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{4n^2-2}{4n^2-2}$

En u donc $\int_{-1}^1 S_n^2(u) du \leq \frac{1}{2^{n-1}} \frac{4n^2-2}{4n^2-2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.