

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION GENERALE**  
**MATHEMATIQUES I**

**Année 1984**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

Dans ce problème, on dira qu'une fonction numérique  $f$  possède un développement asymptotique à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$  si :

1.  $f$  est définie sur un intervalle du type  $]\alpha, +\infty[ \subset \mathbb{R}_+$
2. il existe  $n+1$  nombres réels :  $a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_n$  et une fonction  $\varepsilon_n$ , avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$ , tels que :

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_i}{x^i} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \left(\frac{1}{x^n}\right)\varepsilon_n(x)$$

La formule (1) s'appelle développement asymptotique de  $f$ , à l'ordre  $n$ , au voisinage de  $+\infty$

On pose  $S_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_i}{x^i} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ ; on l'appelle partie régulière à l'ordre  $n$  du développement asymptotique de  $f$ .

*On définit de même un développement asymptotique à l'ordre  $n$  au voisinage de  $-\infty$*

## **PARTIE I**

1. Démontrer que si  $f$  admet un développement asymptotique à l'ordre  $n$ , au voisinage de  $+\infty$ , celui-ci est unique.
2. Démontrer que si  $f$  admet un développement asymptotique à l'ordre  $n$ , au voisinage de  $+\infty$ , il en est de même pour la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = f(x) + e^{-bx} \quad (b > 0 \text{ donné})$$

3. Soit  $\alpha$  un réel fixé, et soit  $E_{\alpha,n}$  l'ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $]\alpha, +\infty[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et admettant un développement asymptotique à l'ordre  $n$  au voisinage de  $+\infty$ .

- (a) Montrer que pour les opérations usuelles  $E_{\alpha,n}$  possède d'une part une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , d'autre part une structure d'anneau commutatif unitaire.
- (b) Comment obtient-on la partie régulière du développement asymptotique du produit de deux fonctions de  $E_{\alpha,n}$  ?

4. (a) Montrer que pour tout  $x$  strictement positif, on a :

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$$

- (b) Déterminer le développement à l'ordre  $2n+1$ , au voisinage de  $+\infty$  de la fonction  $x \mapsto \arctan x$ .
- (c) Quel est le développement asymptotique à l'ordre  $2n+1$  au voisinage de  $-\infty$  de la fonction  $x \mapsto \arctan x$

## PARTIE II

Soient  $\theta$  et  $K$  les fonctions de la variable réelle  $x$  définies par :

$$\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad K(x) = 1 - \theta(x)$$

1. (a) Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$K(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

(b) En déduire que pour  $x > 0$  :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du$$

2. On considère l'intégrale :

$$I_n(x) = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{e^{(2n+1)/2}} du \quad \text{où } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}^\times$$

- (a) Prouver que quel soit  $n$ ,  $I_n(x)$  est convergente.
- (b) Etablir la relation de récurrence :

$$I_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2} \cdot I_{n+1}(x)$$

(c) Démontrer que pour  $n \geq 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2} I_n(x) = 0$$

3. Déduire de ce qui précède le développement asymptotique à l'ordre  $2n+1$  :  $e^{x^2} K(x)$ , au voisinage de  $+\infty$ .

4. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi de Laplace-Gauss centrée réduite, et soit  $f$  sa fonction de répartition.

(a) Etablir la relation :

$$2F(x) = 1 + \theta\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

(b) En déduire que  $f(x) = 1 - e^{-x^2/2} H(x)$  est une fonction dont on donnera le développement asymptotique à l'ordre  $2n+1$  au voisinage de  $+\infty$