La 1ère édition faisait 4 pages !

PARTIE I

Q1. Nombre des racines de l'équation (E).

a) Posons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t e^{-t}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = (1-t)e^{-t}$

φ est st. croissante sur $]-\infty, 1]$ et st. décroissante sur $[1, +\infty[$.

φ possède donc un maximum absolu en 1 : $\varphi(1) = \frac{1}{e}$.

Par conséquent : $\max\limits_{t \in \mathbb{R}} \varphi(t) = \frac{1}{e}$.

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0

b) $\forall x \in [0,1]$, $F(x) = f(x) - x = e^{t(x-1)} - x$ (t est fixé dans $\mathbb{R}_+^*$)

F est dérivable sur $[0,1]$

$\forall x \in [0,1]$, $F'(x) = t e^{t(x-1)} - 1$. Etudions le signe de F'.

Soit $x \in [0,1]$. $F'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{t(x-1)} > 1/t \Leftrightarrow t(x-1) > \ln(1/t) = -\ln t \Leftrightarrow x > 1 - \frac{\ln t}{t}$.

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1 - \frac{\ln t}{t}$.

Ne reste plus qu'à positionner $1 - \frac{\ln t}{t}$ par rapport à 0 et 1.

▲ Remarque. a) donne : $\forall t \in \mathbb{R}$ $\varphi(t) \leq \varphi(1) = \frac{1}{e}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $t e^{-t} \leq e^{-1}$

$\forall t \in \mathbb{R}$, $t \leq e^{t-1}$

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln t \leq t-1 < t$; $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\ln t}{t} < 1$.

ou $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < 1 - \frac{\ln t}{t}$ ▼

Notons encore que : $\forall t \in]0,1[$, $\frac{\ln t}{t} < 0$ donc $\forall t \in]0,1[$, $1 < 1 - \frac{\ln t}{t}$

$\forall t \in]1, +\infty[$, $\frac{\ln t}{t} > 0$ donc $\forall t \in]1, +\infty[$, $0 < 1 - \frac{\ln t}{t} < 1$

Si $t = 1$: $1 - \frac{\ln t}{t} = 1$.

Ce qui nous permet d'étudier le signe de F' sur $[0,1]$.

1er cas.. $t < 1$ $\forall x \in [0,1]$, $F'(x) < 0$; F est strictement décroissante sur $[0,1]$

2ème cas.. $t = 1$ $\forall x \in [0,1[$, $F'(x) < 0$ et $F'(1) = 0$; F est encore strictement décroissante sur $[0,1]$ (*)

3ème cas.. $t > 1$ $\forall x \in [0, 1 - \frac{\ln t}{t}[$, $F'(x) < 0$; $F'(1 - \frac{\ln t}{t}) = 0$; $\forall x \in]1 - \frac{\ln t}{t}, 1]$, $F'(x) > 0$

F est donc strictement décroissante sur $[0, 1 - \frac{\ln t}{t}]$ et strictement croissante sur $[1 - \frac{\ln t}{t}, 1]$.

(*) g continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ et $\forall x \in \mathring{I}$, $g'(x) < 0$ (resp. $g'(x) > 0$) donne g strictement décroissante (resp. croissante) sur I ... qu'on se le dise !

Déduisons !

1er cas.. $t \leq 1$. F est strictement décroissante sur $[0,1]$ et $F(1) = e^{t(1-1)} - 1 = 0$.

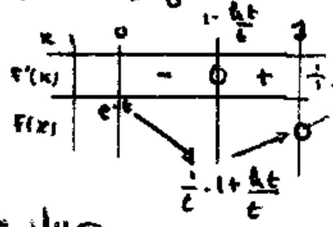
Donc $\forall x \in [0,1[,\ F(x) < F(1) = 0$.

Enfin F n'admet qu'un zéro sur $[0,1]$: 1

2ème cas.. $t > 1$. F est strictement croissante sur $[1 - \frac{\ln t}{t}, 1]$ et $F(1) = 0$

Donc $\forall x \in [1 - \frac{\ln t}{t}, 1[,\ F(x) < 0$

F s'annule une fois et une seule sur $[1 - \frac{\ln t}{t}, 1]$: en 1.



F est continue et strictement décroissante sur $[0, 1 - \frac{\ln t}{t}]$, de plus $F(0) = e^{-t} > 0$ et $F(1 - \frac{\ln t}{t}) < 0$ (voir 3 lignes avant !)

F admet donc un zéro $r(t)$ et un seul sur $[0, 1 - \frac{\ln t}{t}]$; notons que $r(t) \in]0, 1 - \frac{\ln t}{t}[$.

Finalement F admet exactement deux zéros (distincts sur $[0,1]$).

Conclusion.. Si $t \leq 1$, (E) admet une solution et une seule : 1

Si $t > 1$, (E) admet deux solutions $r(t)$ ($r(t) \in]0, 1 - \frac{\ln t}{t}[$) et 1.

▲ Remarque.. Si $t \leq 1$ nous posons $r(t) = 1$ (... plus petite racine positive de (E)). ▲

Q2 .. Etude de la suite U_n.

C'est du cours.. Allons comme à la parade ... ou presque.

$u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) = e^{t(u_n - 1)}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = t e^{t(x-1)} > 0$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f(0) = e^{-t}$ et $f(r(t)) = r(t)$

Par conséquent $f([0, r(t)]) = [e^{-t}, r(t)] \subset [0, r(t)]$.

Notons que : $u_1 = e^{-t} > u_0$ ↑ croissance et continuité

Montrons dès lors et par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < u_{n+1} < r(t)$.

- $0 \leq 0 = u_0 < e^{-t} = u_1 = f(u_0) = f(0) < r(t)$; la propriété vaut pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

  $0 \leq u_n < u_{n+1} < r(t)$. f étant str. cr. sur $[0, r(t)]$: $f(0) \leq f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(r(t))$.

  Soit : $e^{-t} \leq u_{n+1} < u_{n+2} < r(t)$

  Donc $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < r(t)$. Ceci achève la récurrence.

La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est donc strictement croissante et majorée par $r(t)$; elle converge.

Soit ℓ sa limite : $0 \leq \ell \leq r(t)$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue en ℓ ; par conséquent $f(\ell) = \ell$.

Donc $\ell \in [0, r(t)]$ et $F(\ell) = 0$, par conséquent : $\ell = r(t)$.

Finalement $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers $r(t)$.

Conclusion.. $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $r(t)$

Si $t \leq 1$, $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1 et c'est chronique d'une extinction annoncée mais on n'en est pas encore là et tant qu'il y a des math. Il y a de l'espoir alors continuons.

Q3.. Calcul approché de $r(t)$ pour $t>1$

a] Ici le concepteur s'est pris les pieds dans le tapis car pour $a = 10\sqrt{\pi}\,e^{71}$ il semble que, si mes calculs sont exacts, $u_n + a \notin [0,1]$; or l'étude de F a été faite sur $[0,1]$! A priori on ne connait donc pas le signe de F sur $]1,+\infty[$

Reprenons rapidement.. F est dérivable sur $\mathbb{R}$. $\forall x \in [0, 1-\frac{\ln t}{t}[$, $F'(x)<0$ et $\forall x \in]1-\frac{\ln t}{t}, +\infty[$, $F'(x)>0$

ce qui donne le tableau suivant :

t	0	$r(t)$	$1-\frac{\ln t}{t}$	1	$+\infty$
$F'(t)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$F(t)$	$\searrow$	0	$\searrow \nearrow$	0	$\nearrow +\infty$

En clair (?)

$$\begin{cases} \forall t \in [0, r(t)[\cup]1,+\infty[, \ F(t)>0 \\ \forall t \in]r(t),1[, \ F(t)<0 \\ F(r(t)) = F(1) = 0 \end{cases}$$

Supposons donc que $a \in \mathbb{R}^*_+$, $n \in \mathbb{N}$ et $F(u_n+a)<0$

Alors nécessairement $u_n + a \in]r(t),1[$; donc $u_n < r(t) < u_n + a$

↑ voir Q2

b] En clair on calcule u_n tant que $F(u_n + 10^{-6}) \geq 0$ ... ou >0

et c] Pour un programme en Turbo Pascal voir p 13 et 14

Un programme pour FX 7000 G

```
Lbl 0 : ? → T : 0 → N : 0 → X : Lbl 1 : ISZ N :
e(T(X-1)) → X : X+E-6 → Y : e(T(Y-1))-Y → W : W≥0 ⇒ Goto 1 : N ◢ X ◢ Goto 0
```

ce qui donne

t	n	valeur approchée de u_n
3	7	0,05 95 19 90
2,5	9	0,10 73 54 59
2	14	0,20 31 87 37
1,5	27	0,41 71 87 65
1,25	51	0,62 86 28 82
1,1	121	0,82 38 64 94

Un doute affreux nous étreint et si on avait toujours $F(u_n+a) \geq 0$! C'est inacceptable car le signe de F est

0		$r(t)$		1	
	$+$	0	$-$	0	$\boxed{+}$

! Alors ce concepteur se serait planté et nous avec !

N'ayant pas d'ordinateur je n'ai pas vérifié que si $a = 10^{-6}$ il existe $t>1$ tel que le programme ne s'arrête pas ; mais pour $a = 10^{-1}$ et $t = 1,0001$ de 1 à 17 $F(u_n + 10^{-1}) > 0$ et $u_{18} + 10^{-1} > 1$... cela ne s'arrêtera pas !

Morale.. Comme disait ma grand mère il ne faut jamais algorithmer plus haut qu'on a le cul !

Q4 Etude de la fonction $t \mapsto r(t)$

a.. h est continue sur $]0,1[$ et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 = h(1)$.

h est donc continue sur $]0,1]$.

h est clairement dérivable sur $]0,1[$ et $\forall x \in]0,1[$, $h'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1)-\ln x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}\left[1-\frac{1}{x}-\ln x\right]$

Or $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x-1$; mieux $\forall x \in \mathbb{R}_+^*-\{1\}$, $\ln x < x-1$ (voir Q 1 a))

donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*-\{1\}$, $\ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x}-1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*-\{1\}$, $1-\frac{1}{x}-\ln x < 0$.

Finalement h est continue sur $]0,1]$ et $\forall x \in]0,1[$, $h'(x)<0$

h est donc strictement décroissante sur $]0,1]$; étant continue h réalise une bijection continue strictement décroissante de l'intervalle $]0,1]$ sur l'intervalle $h(]0,1]) = [1,+\infty[$.

($\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$ et $h(1)=1$). Notons que h^{-1} est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

h est dérivable en 1. En effet:

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$.

donc $\frac{\ln x}{x-1} = 1 - \frac{(x-1)}{2} + o((x-1))$; $\frac{h(x)-1}{x-1} = -\frac{1}{2} + o(1)$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$

<u>h est dérivable en 1 et $h'(1) = -1/2$.</u>

Pour la courbe consultez votre machine préférée...

b.. Soit $t \in [1,+\infty[$. Supposons un instant $t \neq 1$, alors $r(t) \in]0,1[$.

$F(r(t)) = 0$; $f(r(t)) = r(t)$; $e^{t(r(t)-1)} = r(t)$; $t(r(t)-1) = \ln(r(t))$;

$t = \frac{\ln(r(t))}{r(t)-1} = h(r(t))$. $h(r(t)) = t$.

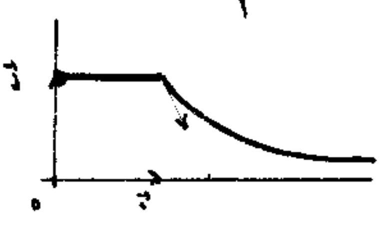
Si $t=1$: $h(r(t)) = h(1) = 1 = t$!

Finalement: <u>$\forall t \in [1,+\infty[$, $h(r(t)) = t$</u>

Ceci donne : <u>$\forall t \in [1,+\infty[$, $r(t) = h^{-1}(t)$.</u>

r est donc continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

Notons encore que r vaut 1 sur $]0,1]$.



allure (sic) de la courbe représentative de r sur $[1,+\infty[$, la courbe représentative de "$r|_{[1,+\infty[}$" et l'image de la courbe représentative de h dans la symétrie orth. par rapport à la droite d'équation $y = x$

c) Supposons $t \in]0,1]$. $r(t)=1$.

$r(t)\ln(r(t))=0 = t\, r(t)\times 0 = t\,r(t)\,(r(t)-1)$.

Supposons $t\in]1,+\infty[$. $h(x)=\frac{\ln x}{x-1}$

$h(r(t))=t$; $\ln(r(t))=t\,(r(t)-1)$; $r(t)\ln(r(t))=t\,r(t)\,(r(t)-1)$.

Finalement $\underline{\forall t\in]0,+\infty[,\ \ r(t)\ln(r(t))=t\,r(t)\,(r(t)-1)}$.

$\lim\limits_{t\mapsto+\infty} r(t)=\lim\limits_{t\mapsto+\infty} h^{-1}(t)=0$ $\quad(\lim\limits_{t\mapsto 0} h(t)=+\infty\ldots)$

Donc $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\left[r(t)\ln(r(t))\right]=0$ car $\lim\limits_{x\mapsto 0^+}(x\ln x)=0$

Par conséquent : $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}\left[t(r(t))(r(t)-1)\right]=0$; de plus $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}(r(t)-1)=-1$.

Par quotient il vient : $\underline{\underline{\lim\limits_{t\mapsto+\infty}(t\,r(t))=0}}$; en clair $\underline{r(t)=o\left(\frac{1}{t}\right)}$ au voisinage de $+\infty$.

$\forall t\in]0,+\infty[$, $e^t\times r(t)=e^{t+\ln(r(t))}=e^{t+t(r(t)-1)}=e^{t(r(t))}$

Donc $\underline{\underline{\lim\limits_{t\mapsto+\infty}(e^t r(t))=1}}$ (car $\lim\limits_{t\mapsto+\infty}(t\,r(t))=0$) ; en clair : $\underline{r(t)\underset{+\infty}{\sim}e^{-t}}$

Q5.. Etude de la vitesse de convergence de (U_n) pour $t\neq 1$.

a.. Rappelons que : $\forall x\in[0,1]$, $F'(x)=t\,e^{t(x-1)}-1$

$\forall t\in]0,+\infty[$, $F'(r(t))=t\,e^{t(r(t)-1)}-1\underset{\uparrow}{=}t\,r(t)-1$

$\ln r(t)=t(r(t)-1)\Rightarrow r(t)=e^{t(r(t)-1)}$

$\underline{\underline{\forall t\in]0,+\infty[,\ F'(r(t))=t\,r(t)-1}}$

1er cas.. $t\in]0,1[$. $t\,r(t)=t\in]0,1[$ donc : $0<t\,r(t)<1$.

2e cas.. $t\in]1,+\infty[$. $r(t)\in]0,1.\frac{\ln t}{t}[$; donc $F'(r(t))<0$

or $F'(r(t))=t\,r(t)-1$, donc $t\,r(t)<1$. Comme $t\,r(t)>0$,

on obtient encore : $0<t\,r(t)<1$.

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall t\in]0,+\infty[-\{1\},\ 0<t\,r(t)<1}}$.

▲ Remarque.. Notons que $\forall t\in]0,+\infty[$, $0<t\,r(t)\leq 1$ ▼

Soit $t \in]0,1[$.

b) Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, r(t)]$

$\forall x \in [0, r(t)],\ f(x) = e^{t(x-1)}$ et $f'(x) = t\,e^{t(x-1)}$

$\forall x \in [0, r(t)],\ 0 \leq f'(x) \leq t\,e^{t(r(t)-1)} = t f(r(t)) = t\,r(t)$ (f' étant croissante sur $[0, r(t)]$)

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$\forall (x,y) \in [0, r(t)]^2,\ x \leq y \Rightarrow 0\,(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq t\,r(t)\,(y-x)$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq f(r(t)) - f(u_n) \leq t\,r(t)\,(r(t) - u_n)$

ou $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq r(t) - u_{n+1} \leq t\,r(t)\,(r(t) - u_n)}}$. (i)

Une récurrence des plus simples donne alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq r(t) - u_n \leq (t\,r(t))^n\,(r(t) - u_0)$$

Or $r(t) - u_0 = r(t) \leq 1$

Donc $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq r(t) - u_n \leq (t\,r(t))^n}}$. (ii).

Pour $t < 1$ on obtient alors $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq 1 - u_n \leq t^n$. ce qui est du plus grand intérêt pour donner la remarquable approximation de 1 que nous procure (u_n).
Mais ... attendons la suite.

Q6 Etude de la vitesse de convergence de (u_n) pour $t = 1$.

a) C'est Cesaro !

Hypothèse : $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$; soit : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$ ... ou $\varepsilon/2$!

Conclusion : $\lim_{n\to+\infty} \overline{x}_n = 0$; soit : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists q \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq q \Rightarrow |\overline{x}_n| < \varepsilon$.

Fixons ε dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow |x_n| < \varepsilon/2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n > p$; soit donc $n \in [\![p+1, +\infty[\![$

$$|\overline{x}_n| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{n-1} x_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|x_k| = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=0}^{p-1}|x_k| + \sum_{k=p}^{n-1}|x_k|\right] < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1}|x_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=p}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|\overline{x}_n| < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1}|x_k| + \frac{1}{n}(n-1-(p-1))\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1}|x_k| + \frac{n-p}{n}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1}|x_k| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc pour $n > p$ ou $n \geq p+1$: $|\overline{x}_n| < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1}|x_k| + \frac{\varepsilon}{2}$.

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1}|x_k|\right) = 0$ donc $\exists p' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq p' \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{p-1}|x_k| < \varepsilon/2$

Finalement pour $n \geq p+1$ et $n \geq p'$: $|\overline{x}_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Posons $q = \max(p+1, p')$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq q \Rightarrow |\bar{x}_n| < \varepsilon$.

Nous avons donc montré que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists q \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq q \Rightarrow |\bar{x}_n| < \varepsilon$

$(\bar{x}_n)$ converge vers 0.

Supposons maintenant que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_n - \ell$. $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0 donc $(\bar{u}_n)_{n\geq 1}$ aussi.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_k+\ell) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k + \ell = \bar{u}_n + \ell$

$(\bar{u}_n+\ell)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ car $(\bar{u}_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0, donc $(\bar{x}_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ ...cqfd.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 - u_n$, $w_n = \frac{1}{v_n}$. $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 - u_{n+1} \overset{t=1}{=} 1 - e^{(u_n - 1)} = 1 - e^{-v_n}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = \frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{v_n - v_{n+1}}{v_n v_{n+1}} = \frac{v_n - 1 + e^{-v_n}}{v_n(1-e^{-v_n})}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} - w_n = \frac{e^{-v_n} - 1 + v_n}{v_n(1-e^{-v_n})}.$$

Rappelons que : $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$; donc $e^x - 1 - x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

On a encore $e^{-x} - 1 + x \underset{0}{\sim} \frac{(-x)^2}{2} = \frac{x^2}{2}$ et $e^{-x} - 1 \underset{0}{\sim} -x$ (ou $1 - e^{-x} \underset{0}{\sim} x$)

Or $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty}(1-u_n) = 0$; donc $e^{-v_n} - 1 + v_n \sim \frac{v_n^2}{2}$ et $v_n(1-e^{-v_n}) \sim v_n \times v_n$

Donc $w_{n+1} - w_n \sim \frac{v_n^2/2}{v_n^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{n\to+\infty}(w_{n+1}-w_n) = \frac{1}{2}$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w_{k+1} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{1}{n}(w_n - w_0)$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{w_n - w_0}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1} - w_k).$$

Comme $(w_{n+1} - w_n)_{n\geq 0}$ converge vers $1/2$ d'après a), $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(w_{k+1}-w_k)\right)_{n\geq 1}$ converge vers $1/2$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{w_n - w_0}{n}\right) = \frac{1}{2}$. $w_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{1-u_0} = 1$.

On peut ainsi dire que : $w_n - 1 = w_n - w_0 \sim n/2$

Donc $\frac{1}{1-u_n} - 1 \sim \frac{n}{2}$ ou $\frac{u_n}{1-u_n} \sim \frac{n}{2}$ ou $\frac{1-u_n}{u_n} \sim \frac{2}{n}$ or $\frac{1}{u_n} \sim 1$ ($\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$)

Par conséquent : $1-u_n \sim \frac{1-u_n}{u_n} \sim \frac{1}{n}$; ou $n(1-u_n) \sim 1$

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-u_n) = 1$; soit $1-u_n \sim \frac{1}{n}$.

PARTIE II

Des proba sans boule qui fautent les boules mais apparemment pas là où il faudrait

(A) Probabilité d'extinction de la descendance d'un individu.

(Q1) Soit $k\in\mathbb{N}$. $p(k) = p(X_1 = k) = \frac{t^k}{k!}e^{-t}$

Soit $x\in\mathbb{R}$. $p(k)x^k = \frac{(xt)^k}{k!}e^{-t}$, donc la série de terme général *

$p(k)x^k$ est convergente et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p(k)x^k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(xt)^k}{k!}e^{-t} = e^{-t}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(xt)^k}{k!} = e^{-t}\times e^{xt} = e^{x(t-1)} = f(x)$.

(* Rappel.. Pour tout $y\in\mathbb{R}$, la série de T.G. $\frac{y^k}{k!}$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{y^k}{k!} = e^y$)

Finalement $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} p(k)x^k = f(x)$

En clair f est la fonction génératrice de X_1.

(Q2) $U_1 = p(X_1 = 0) = p(0) = \frac{t^0}{0!}e^{-t} = e^{-t} = f(0) = f(U_0)$.

Donc $U_1 = f(U_0)$.

Notons A l'événement un individu TOTO n'a pas de petits-enfants et E_k l'événement TOTO a k enfants ($k\in\mathbb{N}$).

On cherche $p(A/E_k)$. Supposons $k\in\mathbb{N}^*$.

Supposons E_k réalisé ; notons $e_1, e_2, \dots, e_k$ les enfants de TOTO.

Notons E_0^i l'événement e_i n'a pas d'enfant.

$p(A/E_k) = p(E_0^1\cap E_0^2\cap\dots\cap E_0^k) \underset{\uparrow \text{indépendance}}{=} p(E_0^1)p(E_0^2)\dots p(E_0^k) = p(X_1=0)p(X_1=0)\dots p(X_1=0) = (e^{-t})^k$

Remarquons que : $p(A/E_0) = 1 = (e^{-t})^0$

Finalement : $\forall k\in\mathbb{N}$, $p(A/E_k) = (e^{-t})^k$.

$U_2 = p(X_2 = 0) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p(X_2 = 0/X_1 = k)p(X_1 = k)$ car $(X_1 = k)_{k\geq 0}$ est un système complet d'événements.

$\forall k\in\mathbb{N},\ p(X_2=0/X_1=k)=p(A|E_k)=(e^{-t})^k$

donc $U_2=\sum_{k=0}^{+\infty}p(X_1=k)(e^{-t})^k=\sum_{k=0}^{+\infty}p(k)(e^{-t})^k=f(e^{-t})=f(U_1)$.

$\underline{\underline{U_2=f(U_1)}}$.

(Q3) L'idée est de regarder au départ ... et pas à l'arrivée ... classique !
conditionnons donc à l'aide du système complet $(X_1=k)_{k\geq 0}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$

$U_{n+1}=p(X_{n+1}=0)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}p(X_{n+1}=0/X_1=\ell)\,p(X_1=\ell)$

⚠ En toute rigueur il aurait fallu faire intervenir les v.a. $\hat{X}_k$ comptant le nb d'individus de la k ème génération.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$

$X_{n+1}=0$ se réalise lorsque $X_1=k$ est réalisé si chaque enfant de la 1ère génération n'a pas de descendant à la $(n+1)$ ème génération ; autrement dit si chaque enfant de la 1ère génération n'a pas de descendant $\underline{n}$ générations après. La probabilité pour qu'un individu n'ait pas de descendant n générations après est : $p(X_n=0)$.

Par conséquent $p(X_{n+1}=0/X_1=k)=(p(X_n=0))^k$ (... indépendance)

De plus : $p(X_{n+1}=0/X_1=0)=1=(p(X_n=0))^0$

Donc $\forall k\in\mathbb{N},\ p(X_{n+1}=0|X_1=k)=(p(X_n=0))^k=U_n^k$

Finalement $U_{n+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}U_n^k\,p(X_1=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}p(k)\,U_n^k=f(U_n)$.

Donc $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=f(U_n)}}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=u_n$.

- $U_0=0=u_0$; l'égalité vaut pour $n=0$.
- Supposons l'égalité vraie pour n et montrons la pour $n+1$.

  $U_{n+1}=f(U_n)\underset{\text{H.R.}}{=}f(u_n)=u_{n+1}$; ceci achève la récurrence.

Si $t\leq 1$: $\lim_{n\to+\infty}U_n=1$

Si $t=3$: $\lim_{n\to+\infty}U_n\simeq 0,0595$

Si $t=2,5$: $\lim_{n\to+\infty}U_n\simeq 0,1074$

Si $t=2$: $\lim_{n\to+\infty}U_n\simeq 0,2032$

Si $t=1,5$, $\lim_{n\to+\infty}U_n\simeq 0,4172$

Si $t=1,25$, $\lim_{n\to+\infty}U_n\simeq 0,6286$

Si $t=1,1$ $\lim_{n\to+\infty}U_n\simeq 0,8239$

(B) Nombre moyen de générations de la descendance d'un individu.

(Q1) a) $p(D>n) = p(X_{n+1} \neq 0) = 1 - p(X_{n+1}=0) = 1 - U_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ p(D>n) = 1 - U_{n+1}.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(D=n) = p(D>n-1) - p(D>n) = (1-U_n) - (1-U_{n+1}).$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(D=n) = U_{n+1} - U_n$; notons que ceci vaut encore pour $n=0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p(D=k) = \sum_{k=0}^{n} k(U_{k+1}-U_k) = \sum_{k=0}^{n} kU_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} kU_k = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)U_k - \sum_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} kU_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p(D=k) = \sum_{k=1}^{n}(k-1-k)U_k + nU_{n+1} = -\sum_{k=1}^{n} U_k + nU_{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p(D=k) = nU_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(1-U_k-1) = nU_{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(1-U_k) - n$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\, p(D=k) = S_n(t) + n(U_{n+1}-1).$$

(Q2) Etude de la série "$\sum(1-U_n)$" pour $t<1$.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1-U_n \leqslant t^n$ et la série de T.G. t^n est convergente ($|t|<1$!), donc la série de terme général $1-U_n$ aussi (règle de comparaison des séries à termes positifs).

b) $S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-U_k).$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad S(t) - S_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-U_k)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall q \in [\![n+1, +\infty[\![,\quad 0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{q}(1-U_k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{q} t^k = t^{n+1}\dfrac{1-t^{q-n}}{1-t}$

En passant à la limite sur q on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant S(t) - S_n(t) \leqslant t^{n+1}\dfrac{1}{1-t}.$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant S(t) - S_n(t) \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1-t}.$

$S_n(t)$ est une valeur approchée de $S(t)$ à 10^{-2} près dès que : $\dfrac{t^{n+1}}{1-t} \leqslant 10^{-2}$, c'est à dire dès que : $(n+1)\ln t \leqslant \ln(10^{-2}(1-t))$ ou $n+1 \geqslant \dfrac{\ln(10^{-2}(1-t))}{\ln t}$ $(\dots \ln t < 0)$

$S_n(t)$ est une valeur approchée de $S(t)$ à 10^{-2} près dès que : $n \geq n_0$ où

$$n_0 = \max\left(0, E\left(\frac{\ln(10^{-2}(1-t))}{\ln t}\right)\right) = E\left(\frac{\ln(10^{-2}(1-t))}{\ln t}\right) \; !$$

c) 2 possibilités..

V1.. On calcule n_0 et en utilisant une boucle on calcule $S(n_0,t)$

V2.. On calcule $S(n,t)$ tant que : $\frac{t^n}{1-t} > 10^{-2}$.

Voici à la fin pour le programme en Turbo Pascal pour JBC)

Avec une fx 7000 G et en utilisant V1.

Lbl 0 : ? → T : 0 → N : 1 → V : 0 → S : Int (ln (.01 (1-T)) ÷ ln T) → A : Lb 1 :

1 ↑ 2 N : 1 - e (-TV) → V : V + S → S : N < A ⇒ Goto 1 : S ◢ N ◢ Goto 0

T contient t, N contient n, V contient $1-u_n$, S contient $S(n,t)$, A contient n_0.

Notons que $1 - u_{n+1} = 1 - e^{t(u_n - 1)} = 1 - e^{-t(1-u_n)}$ d'où le $1 - e(-TV) \to V$!

Ceci donne pour :

$t = 0,5$	$n_0 = 7$	$S(t) \simeq 0,735\,412\,354\,7$!
$t = 0,6$	$n_0 = 10$	$S(t) \simeq 1,003\,188\,86$
$t = 0,7$	$n_0 = 16$	$S(t) \simeq 1,372\,715\,824$
$t = 0,8$	$n_0 = 27$	$S(t) \simeq 1,933\,678\,128$
$t = 0,9$	$n_0 = 65$	$S(t) \simeq 2,995\,773\,607$
Pour $t = 0,99$	$n_0 = 916$	$S(t) \simeq 7,130\,891\,957$
$t = 0,999$	$n_0 = 11\,507$	$S(t) \simeq 11,645\,756\,28$

Je vous laisse la suite, je n'ai pas que cela à faire car vu la situation il importe de toute suite redresser la barre (!) et m'en vais de ce pas retourner bohème

(Q3) Existence et calcul de l'espérance de D.

Rappel.. Pour les initiés $E(D)$ existe si la série de T G $P(D > n)$ converge

En cas d'existence $E(D) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(D > n)$. A savoir démontrer par ♡.

a) Supposons $t<1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n} k\, p(D=k) = S(n,t) + n(U_{n+1}-1)$.

or : $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq 1 - U_{n+1} \leq t^{n+1}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leq n(1-U_{n+1}) \leq n t^{n+1}$.

$\lim_{n \to +\infty}(n t^{n+1}) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}(n(1-U_{n+1})) = 0$

Finalement $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} k\,p(D=k)\right) = S(t)$. La série de terme général $k\,p(D=k)$ est convergente et même absolument convergente ($k\,p(D=k) \geq 0$).

Par conséquent $E(D)$ existe et vaut $S(t)$.

Disons donc que pour :

$t=0,5$	$E(D) \simeq 0,74$	$t=0,8$	$E(D) \simeq 1,93$
$t=0,6$	$E(D) \simeq 1$	$t=0,9$	$E(D) \simeq 3$
$t=0,7$	$E(D) \simeq 1,37$	$t=0,99$	$E(D) \simeq 7,13$
		$t=0,999$	$E(D) \simeq 11,65$

b) $t=1$. $\quad 1-U_n \sim \frac{2}{n}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ 1-U_n \geq 0$

La série de terme général $\frac{2}{n}$ étant divergente, celle de terme général $1-U_n$ aussi ; cette série étant à termes positifs. $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(1-U_k)\right) = +\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} S(n,1) = +\infty$

Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} k\,p(D=k) = S(n,1) + n(U_{n+1}-1)$.

$n(U_{n+1}-1) \sim n\left(-\frac{2}{n+1}\right) \sim -2$; $\lim_{n\to+\infty} n(U_{n+1}-1) = -2$.

Il vient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} k\,p(D=k) = +\infty$$

D n'a pas d'espérance.

COMPLEMENT

Deux programmes en TURBO PASCAL pour I Q3 et II A Q3

```
PROGRAM ESSEDSS_S;(* CALCUL DE S(t)*)
VAR I,N:INTEGER;
VAR S,t,U:REAL;

BEGIN
WRITE('Donner la valeur de t :');
READLN(t);
U:=0;
S:=0;
N:=TRUNC((LN(1-t)-2*LN(10))/LN(t));
FOR I:= 1 TO N DO
      BEGIN
      U:=EXP(t*(U-1));
      S:=S+(1-U);
      END;
WRITELN('La valeur de n est :',N);
WRITELN ('Une valeur approchée de S(',t:3:2,') est :',S:5:3);
END.
```

```
Running
Donnez la valeur de t :0.5
La valeur de n est :7
Une valeur approchée de S(0.50) est :0.735

>

Running
Donnez la valeur de t :0.6
La valeur de n est :10
Une valeur approchée de S(0.60) est :1.003

>

Running
Donnez la valeur de t :0.7
La valeur de n est :16
Une valeur approchée de S(0.70) est :1.373

Running
Donnez la valeur de t :0.8
La valeur de n est :27
Une valeur approchée de S(0.80) est :1.534

>

Running
Donnez la valeur de t :0.9
La valeur de n est :65
Une valeur approchée de S(0.90) est :2.996

>
```

```
      Line 1    Col 1   Insert    Indent  C:CORI.PAS
PROGRAM ESSECRA_1;(*VERSION AVEC FONCTIONS*)
VAR I:INTEGER;
VAR U,t,a:REAL;
FUNCTION f(x,t:REAL):REAL;
  BEGIN
  f:= EXP(t*(x-1));
  END;
FUNCTION Grf(x,t:REAL):REAL;
  BEGIN
  Grf:=f(x,t)-x;
  END;
BEGIN
U:=0;
I:=0;
WRITE('Donnez la valeur de t :');
READLN(t);
WRITE('Donnez la valeur de a :');

READLN(a);
WHILE ((Grf(U+a,t)>=0) AND (U+a<1)) DO
      BEGIN
      U:=f(U,t);
      I:=I+1;
      END;


IF (U+a>=1) THEN WRITELN('dépassement');
WRITELN('Valeur de l''entier n :',I);
WRITELN('Valeur approchée de r(',t:5:7,')=', U:5:8);
END.
```

```
Running
Donnez la valeur de t :1.001
Donnez la valeur de a :0.001
Valeur de l'entier n :1094
Valeur approchée de r(1.0010000)=0.99700275

>

Running
Donnez la valeur de t :1.0001
Donnez la valeur de a :0.01
Valeur de l'entier n :195
Valeur approchée de r(1.0001000)=0.98988895

>

Running
Donnez la valeur de t :1.00001
Donnez la valeur de a :0.1
dépassement
Valeur de l'entier n :18
Valeur approchée de r(1.0000100)=0.90387099

>
```