PARTIE I

Q1 Etude de X_2

a) $x \in [0,1[$. $S_p(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^p = \dfrac{1 - x^{p+1}}{1-x}$; par dérivation :

$$\Sigma_p(x) = 1 + 2x + \cdots + p x^{p-1} = \frac{-(p+1)x^p(1-x) + (1 - x^{p+1})}{(1-x)^2} = \frac{1 + p x^{p+1} - (p+1)x^p}{(1-x)^2}.$$

$\lim\limits_{p \to +\infty} x^{p+1} \underset{|x|<1}{=} 0$ donc $\lim\limits_{p \to +\infty} S_p(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

$\lim\limits_{p \to +\infty} \left[p x^{p+1} - (p+1) x^p \right] = \lim\limits_{p \to +\infty} \left[p x^p \left(x - \frac{p+1}{p} \right) \right] = 0$ ($\lim\limits_{p \to +\infty} p x^p \underset{\text{pour } x \in]0,1[\text{ ; pour } x = 0 \ldots}{=} \lim\limits_{p \to +\infty} e^{p\left(\ln x + \frac{\ln p}{p}\right)} = 0$ ... ou croissance comparée)

Donc $\lim\limits_{p \to +\infty} \Sigma_p(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

En clair $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ ... ce n'est pas nouveau.

Rappels... Si $r \in \mathbb{N}$, la série de terme général $n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r}$ converge si et seulement si $|x| < 1$.

Si $|x| < 1$: $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1) x^{n-r} = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$ ou $\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty} C_n^r x^{n-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$.

---

b) $p(X_2 = p) = \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$ pour tout $p \in [\![2, +\infty[\![$.

↑ on obtient $p-1$ fois la boule 1 et enfin la boule 2 ; 2 ... le contraire !

$$\underline{\underline{\forall p \in [\![2, +\infty[\![, \quad p(X_2 = p) = \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}}}$$

Il est clair que $X_2 - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ ... alors $E(X_2 - 1) = \dfrac{1}{1/2}$ donc $\underline{\underline{E(X_2) = 1 + 2 = 3}}$!

Remarque... on pouvait aussi (!) utiliser Q1 a) ... à faire en devoir !

Q2

a) $p(A \cup B \cup C) = p(A \cup B) + p(C) - p((A \cup B) \cap C) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) + p(C) - p((A \cap C) \cup (B \cap C))$

$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap C \cap B \cap C)$.

$$\underline{\underline{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)}}$$ ... ce n'est pas nouveau.

b) Et si $(i,j,k) \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$.

$p(B_i) = \left(\frac{2}{3}\right)^p$ (on obtient la boule j ou la boule k aux p premiers tirages)

$p(B_i \cap B_j) = \left(\frac{1}{3}\right)^p$ (on obtient la boule k aux p premiers tirages)

$p(B_i \cap B_j \cap B_k) = 0$ (il n'y a que 3 boules !)

$p(X_3 > p) = p(B_1 \cup B_2 \cup B_3)$ (l'une au moins des 3 boules n'est pas sortie au cours des p premiers tirages ; donc $\{X_3 > p\} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$).

$p(X_3 > p) = p(B_1) + p(B_2) + p(B_3) - p(B_1 \cap B_2) - p(B_1 \cap B_3) - p(B_2 \cap B_3) + p(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$

$p(X_3 > p) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^p - 3\left(\frac{1}{3}\right)^p + 0 = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^p - \left(\frac{1}{3}\right)^p\right]$

Finalement $p(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = p(X_3 > p) = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^p - \left(\frac{1}{3}\right)^p\right]$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

Supposons maintenant $p \geqslant 3$.

$p(X_3 = p) = p(X_3 > p-1) - p(X_3 > p) = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}\right] - 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{p} - \left(\frac{1}{3}\right)^{p}\right]$

$p(X_3 = p) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right) - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}$

Conclusion... $X_3(\Omega) = [\![3, +\infty[\![$ et $\forall p \in [\![3, +\infty[\![$, $p(X_3 = p) = \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}$

d) Les séries de terme général $p\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1}$ et $p\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}$ étant convergentes, la série de terme général $p\,p(X_3 = p)$ est convergente et même absolument convergente (car $p \times p(X_3 = p) \geqslant 0$ pour tout $p \in [\![3, +\infty[\![$). Par conséquent : $E(X_3)$ existe.

$$E(X_3) = \sum_{p=3}^{+\infty} p\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}\right] = \sum_{p=1}^{+\infty} p\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1}\right] - 1\left[1 - 2\right] - 2\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right]$$

$$E(X_3) \overset{*}{=} \sum_{p=1}^{+\infty} p\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} - \sum_{p=1}^{+\infty} p\left(\frac{1}{3}\right)^{p-1} + 1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} + 1 = 9 - \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2}.$$

donc $E(X_3) = \frac{11}{2}$ (* les deux séries convergent...)

Remarque. Si X est une v.a.r. discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $E(X)$ existe ssi la série de terme général $p(X > n)$ converge. Si $E(X)$ existe : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(X > n)$

résultat classique permet d'obtenir plus rapidement $E(X_3)$. La série de terme général $p(X_3 > p) = 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^p - \left(\frac{1}{3}\right)^p\right]$ converge $\left(\left|\frac{2}{3}\right| < 1 \text{ et } \left|\frac{1}{3}\right| < 1\right)$ donc $E(X_3)$ existe et

$$E(X_3) = \sum_{p=0}^{+\infty} p(X_3 > p) = p(X_3 > 0) + \sum_{p=1}^{+\infty} 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^p - \left(\frac{1}{3}\right)^p\right] = 1 + 3 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \dots = \frac{11}{2}$$

Q3) Étude de la loi de X_n.

a) $p(B_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^p$ (la boule i n'est pas apparue au cours des p premiers tirages)

$p(B_i \cap B_j) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^p$ (les boules i et j ne sont pas apparues au cours des p premiers tirages).

$p(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \dots \cap B_{i_k}) = \left(\frac{n-k}{n}\right)^p$ ("les boules $i_1, i_2, \dots, i_k$" ne sont pas apparues au cours des p premiers tirages).

b) $p(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} p(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \dots \cap B_{i_k}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \left(\frac{n-k}{n}\right)^p$

Il y a C_n^k termes constants dans ce Σ

$$p(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^p$$

c) $p(X_n > p) = p(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^p$ ce n'est pas nouveau !?

Remarque.. Il semble que ce résultat ne nous soit pas étranger !

Méditons quelques instants sur $p(X_n \le p)$ ... en p tirages toutes les boules sont sorties au moins 1 fois. Réaliser un tel événement c'est encore définir une surjection de l'ensemble des p-tirages dans l'ensemble des n boules. Par conséquent :

$p(X_n \le p) = \frac{S_p^n}{n^p}$ où S_p^n est le nombre de surjections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments. $S_p^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k k^p$ (... $n^p = \sum_{k=0}^{n} C_n^k S_p^k$ + formule d'inversion de Pascal).

Donc $p(X_n > p) = 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \frac{k^p}{n^p} \underset{\uparrow}{=} 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^p = - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^p$

changement d'indice

Donc $p(X_n > p) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^p$! Le monde est décidément bien petit !

Notons que ce qui précède vaut pour tout $p \in \mathbb{N}$ (voir le raisonnement... ou la formule)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$p(X_n = p) = p(X_n > p-1) - p(X_n > p) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \left[\left(\frac{n-k}{n}\right)^{p-1} - \left(\frac{n-k}{n}\right)^p\right] = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{p-1}\left(1 - \frac{n-k}{n}\right)$

$p(X_n = p) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{p-1} \frac{k}{n}$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $p(X_n = p) = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{p-1} \overset{\frac{0}{n} = 0\,!}{=} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{k+1} \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{p-1}$

d) Soit $q \in [\![1, n-1]\!]$. $p(X_n \le q) = 0$ (on ne peut sortir les n numéros avec moins de n tirages).

Donc $0 = 1 - p(X_n > q) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^q = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^q = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^q$

$0 \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \left(\frac{k}{n}\right)^q = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{-k} C_n^k \left(\frac{k}{n}\right)^q \underset{\uparrow}{=} (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \left(\frac{k}{n}\right)^q = \frac{(-1)^n}{n^q} \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k k^q$

chang. d'indice : $n-k \to k$. $(-1)^{-k} = (-1)^k$

Donc $\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k k^q = 0$ (pas nouveau ! $S_q^n = 0$ pour $q < n$ donc...)

Remarque.. On pouvait aussi faire une récurrence sur q en utilisant $p(X_n = p) = 0$ pour $p < n$.

(Q4) Avant de passer à l'espérance une anecdote ! C'est cette question qui m'a poussé à refuser à mon fils le dernier album Panini des chevaliers du zodiaque. Il faut coller sur un tel album 220 vignettes qu'il faut acheter 25 c. $E(X_{220})$ représente donc le nombre moyen de vignettes à acheter pour remplir l'album ! On a $E(X_{220}) \simeq 1314,09$

Il faut donc acheter 1314 vignettes, en moyenne ! Coût moyen 328,5 F ! Bravo les commerciaux !

Q4 a) Soit $x\in[0,1]$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$

Version 1 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{k}C_k^i(-x)^i \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}C_k^i(-x)^i = \sum_{i=0}^{n-1}\left[(-1)^i x^i\underbrace{\left(\sum_{k=i}^{n-1}C_k^i\right)}_{C_n^{i+1}}\right]$

inversion classique

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i x^i C_n^{i+1} \underset{\text{"}k=i+1\text{"}}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^{k-1}C_n^k$$

Donc $\displaystyle\underline{\underline{\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1}}}$

Version 2 pour $x=0$ c'est du "pipo" ! Pour $x\neq0$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \frac{1-(1-x)^n}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}\left[1-\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k x^k\right]$

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \frac1x\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}x^k+1\right] = \frac1x\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}x^k = \sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}x^{k-1}\dots$$

… que le concepteur n'avait pas à ajouter

Version 3.. La formule de Taylor (voici à la fin) **Version 4** : Récurrence.

Intégrons la formule précédente entre 0 et 1.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1(1-x)^k\,dx = \sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{k-1}\,dx\ ;\ \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k-1}\frac1k$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac1k = \sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k}$

Donc $\displaystyle\underline{\underline{H_n = \sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k}}}$.

suppression du terme $k=0$ ..

b) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. $p\,P(X_n=p)\geq0$ et $\displaystyle p\,P(X_n=p) = \sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{k+1}\frac kn\,p\left(1-\frac kn\right)^{p-1} = \sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k+1}\frac kn\times p\left(1-\frac kn\right)^{p-1}$

Si $k\in[\![1,n]\!]$, $\left|1-\frac kn\right|<1$, donc pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, la série de terme général $\underbrace{C_n^k(-1)^{k+1}\frac kn}_{\text{constante !}}\,p\left(1-\frac kn\right)^{p-1}$ est convergente, donc la série de T.G. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k+1}\frac kn\,p\left(1-\frac kn\right)^{p-1}$ est convergente. Finalement la série de terme général $p\,P(X_n=p)$ est convergente donc absolument convergente ($\because p\,P(X_n=p)\geq0$). $E(X_n)$ existe.

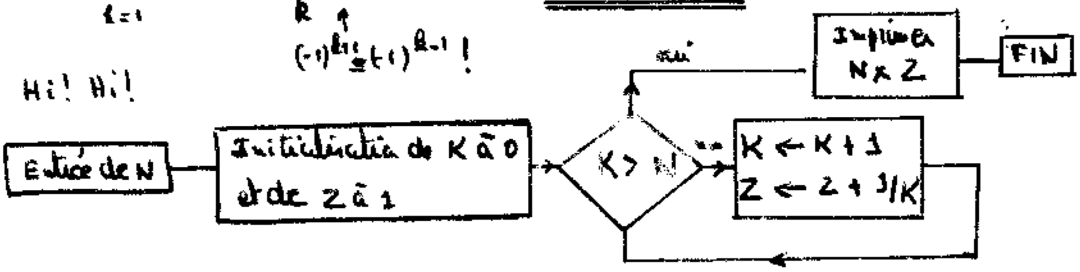
$$E(X_n) = \sum_{p=1}^{+\infty}p\,P(X_n=p) = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k+1}\frac kn\,p\left(1-\frac kn\right)^{p-1}$$

$$E(X_n) = \sum_{p=1}^{+\infty}p\,P(X_n=p) = \sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k+1}\frac kn\left[\sum_{p=1}^{+\infty}p\left(1-\frac kn\right)^{p-1}\right] = \sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k+1}\frac kn\overbrace{\frac{1}{\left[1-\left(1-\frac kn\right)\right]^2}}^{\frac{n}{k}}$$

$E(X_n) = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n}C_n^k(-1)^{k+1}\frac1k = nH_n$. $\underline{\underline{E(X_n)=nH_n}}$.

$(-1)^{k+1}=(-1)^{k-1}$!

c) Hi ! Hi !



$E(X_{10}) \simeq 29,29$; $E(X_{20}) \simeq 71,95$; $E(X_{50}) \simeq 224,96$; $E(X_{100}) \simeq 518,74$ (1)

(ou $E(X_{10}) \simeq 29,28$; $E(X_{20}) \simeq 71,95$; $E(X_{50}) \simeq 224,96$; $E(X_{100}) \simeq 518,73$) (2)

(1) valeurs arrondies (2) 2 premières décimales fournies par la calculatrice ! $\boxed{\text{Programmes à la fin}}$

PARTIE II

Q1 Etude $H_n - \ln n$. C'est du cours !

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\forall t \in [x, x+1]$, $f(t) = \ln t$.

f est dérivable sur $[x, x+1]$ et $\forall t \in [x, x+1]$, $f'(t) = \frac{1}{t}$. $\forall t \in [x, x+1]$, $\frac{1}{x+1} \leq f'(t) \leq \frac{1}{x}$.

Donc l'inégalité des A.F. donne : $\frac{1}{x+1}((x+1)-x) \leq f(x+1) - f(x) \leq \frac{1}{x}((x+1)-x)$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.

Remarque : "Plus simplement". $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln(1 + \frac{1}{x})$ donc $\left\{ \text{Pour } u \in \mathbb{R}_+^* : 1 - \frac{1}{u} \leq \ln u \leq u - 1 \right.$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $1 - \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq (1 + \frac{1}{x}) - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \underset{\text{a) avec } x=n}{\leq} 0$

$(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $v_{n+1} - v_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \underset{\text{a) avec } x=n+1}{\geq} 0$

$(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $v_n - u_n = -\ln(n+1) + \ln n = \ln(\frac{n}{n+1})$; $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

$((v_n)_{n \geq 1}, (u_n)_{n \geq 1})$ est un couple de suites adjacentes. $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ convergent et ont la même limite que nous notons γ. Nous retrouvons, une fois de plus, la constante d'Euler.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \leq u_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq \gamma$ (... voir plus haut !)

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow u_n - \frac{1}{n} = H_{n-1} - \ln n = v_{n-1} \leq \gamma \leq u_n$. Ceci vaut encore pour $n = 1$ car $(u_1 - \frac{1}{1} = 0 \leq \gamma \leq u_1)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \Rightarrow$ $u_n - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq u_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \Rightarrow |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}$

u_n est une valeur approchée à 10^{-4} près de γ dès que : $\frac{1}{n} \leq 10^{-4}$; soit $n \geq 10000$.

Il suffit de choisir $n = 10000$ pour avoir une valeur approchée à 10^{-4} près !!

C'est une catastrophe ! Par conséquent accélérons ... la convergence !

Pour $n = 10000$ la machine nous donne $E(X_{10000}) \simeq 97876,06036$ ... ce qui donne (en divisant par 10000 et en retranchant $\ln(10000)$) : $u_{10000} \simeq 0,577265664$ ... donc $\gamma \simeq 0,5773$

(Q2) Etude d'une fonction auxiliaire.

a) F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $F'(t) = \frac{1}{2(1+t)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+t} = \frac{t^2}{2(1+t)^2} \leq \frac{t^2}{2}$

$\forall t\in\mathbb{R}_+$, $0 \leq F'(t) \leq \frac{t^2}{2}$.

Par intégration : $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $0 \leq \int_0^x F'(t)\,dt \leq \int_0^x \frac{t^2}{2}dt = \frac{x^3}{6}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $0 \leq F(x)-F(0) \leq \frac{x^3}{6}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+$, $0 \leq F(x) \leq \frac{x^3}{6}$ $\quad (F(0)=0)$.

Remarque.. On pouvait aussi étudier 2 fonctions : F et $x\mapsto F(x)-\frac{x^3}{6}$

b) Version 1.. Sans D.L. . Déterminons $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3}$ en utilisant la règle de l'Hôpital.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\frac{F'(x)}{3x^2} = \frac{x^2}{2(1+x)^2\times 3x^2} = \frac{1}{6(1+x)^2}$. $\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{3x^2} = \frac{1}{6}$ donc

$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x^3-0^3} = \frac{1}{6}$; $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$.

Soit $k\in\mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $0\leq F(x)\leq kx^3$; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $0 \leq \frac{F(x)}{x^3} \leq k$.

En passant à la limite : $\frac{1}{6}\leq k$; comme $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $F(x)\leq\frac{1}{6}x^3$: $\frac{1}{6}$ est le plus petit k solution du problème.

Version 2.. Avec D.L. Même raisonnement mais on obtient $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$ par D.L. de F au voisinage de 0.

$F(x) = \frac{x}{2(1+x)} + \frac{x}{2} - \ln(1+x) = \frac{x}{2}\left[1-x+x^2 \text{"}-x^3\text{"}\right] + \frac{x}{2} - (x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}) + o(x^3)$.

$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x}{2} - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$; $F(x) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$

(Q3) Etude asymptotique de H_n.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_n = H_n - \ln n - \frac{1}{2n}$.

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $p\in\mathbb{N}$ tel que : $p>n$.

$\sum_{k=n+1}^{p}(w_{k+1}-w_k) = w_{p+1}-w_{n+1}$. $\quad w_{p+1} = H_{p+1} - \ln(p+1) - \frac{1}{2(p+1)} = u_{p+1} - \frac{1}{2(p+1)}$. $\lim_{p\to+\infty} w_{p+1} = \gamma$

Par conséquent $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(w_{k+1}-w_k)$ existe et $r_n = \gamma - w_{n+1}$.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$

b) $w_{k+1}-w_k = u_{k+1}-u_k - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} - \ln(k+1) + \ln k + \frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k+1)}$

$w_{k+1}-w_k = \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k} - \ln\frac{k+1}{k} = \frac{1}{2}\frac{1/k}{1+1/k} + \frac{1/k}{2} - \ln(1+\frac{1}{k}) = F(\frac{1}{k})$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}F(\frac{1}{k})$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq F(\frac{1}{k}) \leq \frac{1}{6k^3}$ et la série de terme général $\frac{1}{k^3}$ converge ; par conséquent :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} F(\frac{1}{k}) \leq \frac{1}{6} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$. Cherchons un majorant de cette dernière quantité.

Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ et p dans $\mathbb{N}$ tel que : $p > n$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^3}\,dt \geq \frac{1}{(k+1)^3} \int_k^{k+1} dt = \frac{1}{(k+1)^3}$; $\frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

($t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est décroissante)

Donc $\sum_{k=n}^{p} \frac{1}{(k+1)^3} \leq \sum_{k=n}^{p} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^3} = \int_n^{p+1} \frac{dt}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_n^{p+1} = \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(p+1)^2} \leq \frac{1}{2n^2}$.

Donc $\sum_{k=n+1}^{p+1} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2}$; en passant à la limite on obtient $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{2n^2}$.

Finalement : $0 \leq r_n \leq \frac{1}{6} \times \frac{1}{2n^2}$, soit : $\underline{0 \leq r_n \leq \frac{1}{12n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

c] Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$. $\gamma - (H_n - \ln n - \frac{1}{2n}) = \gamma - w_n = r_{n-1}$

Donc $0 \leq \gamma - (H_n - \ln n - \frac{1}{2n}) \leq \frac{1}{12(n-1)^2}$. Pour avoir $0 \leq \gamma - (H_n - \ln n - \frac{1}{2n}) \leq 0,0001$

il suffit d'avoir $\frac{1}{12(n-1)^2} \leq 0,0001$, c'est à dire $n - 1 \geq \frac{10^2}{\sqrt{12}} = \frac{50}{\sqrt{3}}$; soit encore :

$n \geq 1 + \frac{50}{\sqrt{3}}$. $1 + \frac{50}{\sqrt{3}} \simeq 29,87$.

Dès que $\underline{n \geq 30 : \ 0 \leq \gamma - (H_n - \ln n - \frac{1}{2n}) \leq 0,0001}$ ... c'est déjà mieux !

La calculatrice donne alors $H_{30} - \ln 30 - \frac{1}{60} \simeq 0,577\,123\,0817$

Donc $\gamma \simeq 0,577\,123\,0817$ à 10^{-4} près ... ou presque !!

(Q4) Conclusion ! $E(X_n) = n H_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow 0 \leq n\gamma - nH_n + n\ln n + \frac{1}{2} \leq \frac{n}{12(n-1)^2}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\varepsilon'_n = n\gamma - nH_n + n\ln n + \frac{1}{2}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow 0 \leq \varepsilon'_n \leq \frac{n}{12(n-1)^2}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{12(n-1)^2} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon'_n = 0$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = -\varepsilon'_n$. $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$

Finalement $E(X_n) = nH_n = n\ln n + n\gamma + \frac{1}{2} + \varepsilon_n$ avec $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$

Notons que $|\varepsilon_n| = |\varepsilon'_n| = \varepsilon'_n \leq \frac{n}{12(n-1)^2}$.

L'erreur que l'on commet en remplaçant $E(X_n)$ par $n\ln n + n\gamma + \frac{1}{2}$ est majorée par $\frac{n}{12(n-1)^2}$.

En prenant $\gamma \simeq 0,577\ldots$ [illegible] : $E(X_{10}) \simeq 29,29708174$,

$E(X_{20}) \simeq 71,95710710$, $E(X_{50}) \simeq 224,9597304$; $E(X_{100}) \simeq 518,7293267$,

$E(X_{10000}) \simeq 97875,13453$ ... $E(X_{110}) \simeq 1314,065138$. On ne peut fournir qu'un majorant théorique ([illegible]) [illegible] car on a remplacé γ par une valeur approchée (... et on multiplie γ par ...)

Remarques 1.. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n - \ln n = \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n$

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n - \gamma = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n$. $\underline{u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}}$.

$(u_n)_{n\geq 1}$ converge lamentablement vers γ.

2.. Il est donc nécessaire d'accélérer la convergence. La méthode classique consiste à utiliser la formule d'Euler-Mac Laurin : Si f est une fonction de classe C^{2p+1} sur $[0,1]$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) - I_{2p+1} \quad \text{où } I_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)\,P_{2p+1}(t)\,dt$$

(B_{2k} ... nombre de Bernoulli ... P_{2p+1} polynôme de Bernoulli). $|I_{2p+1}| \leq \frac{|B_{2p}|}{2(2p)!} \sup_{t\in[0,1]} |f^{(2p+1)}(t)|$.

En utilisant cela on obtient $\gamma = u_n - \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{2k}\times\frac{1}{n^{2k}} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$

Voir sur les deux points précédents revue de Math. spé. Avril 81 p 325 et suivantes.

Voilà un bon sujet pour un concours ... qu'on se le dise ...

3.. On peut obtenir assez rapidement $E(X_n)$ sans passer par la loi de X_n.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on note Y_k le nombre de tirages nécessaires pour obtenir exactement k numéros distincts. On pose encore $Z_1 = Y_1$, $Z_2 = Y_2 - Y_1$, ..., $Z_n = Y_n - Y_{n-1}$

Remarquons que : $X_n = Y_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$. Par conséquent $E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(Z_k)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Z_k représente le temps d'attente d'un nouveau numéro, $k-1$ numéros étant déjà sortis.

Z_k suit donc une loi géométrique de paramètre $\frac{n-(k-1)}{n}$; $E(Z_k) = \frac{n}{n-(k-1)}$.

$E(Z_1) = E(Y_1) = 1$ (voir la définition de Y_k)

Finalement $E(X_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n}{n-(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

4.. C'est le problème préféré de l'ESSEC (voir ESSEC 82, ESSEC 88 ↑, ESSEC 89. ECO, ESSEC 91)

5.. Retour sur : $\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} x^{k-1}$.

Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ et posons $P = \sum_{k=0}^{n-1}(1-X)^k$. $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc la formule de Taylor donc : $P = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{P^{(i)}(0)}{i!} X^i$

$\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(i)} = \sum_{k=i}^{n-1} k(k-1)\cdots(k-i+1)(-1)^i(1-X)^{k-i} = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{k!}{(k-i)!}(-1)^i(1-X)^{k-i}$

donc $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(i)}(0) = \sum_{k=i}^{n-1} \frac{k!}{(k-i)!}(-1)^i = (-1)^i i! \sum_{k=i}^{n-1} C_k^i$

$\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(i)}(0) = (-1)^i i! \left[C_i^i + C_{i+1}^i + \cdots + C_{n-1}^i\right] = (-1)^i i! \; C_{(n-1)+1}^{i+1} = (-1)^i i! \, C_n^{i+1}$

Finalement : $P = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i i! \, C_n^{i+1}}{i!} X^i \underset{\substack{\uparrow \\ k=i+1}}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \, C_n^k X^{k-1}$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} (1-X)^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} C_n^k X^{k-1}$ ... cqfd.

6... Ce problème est "à savoir par cœur" tant il contient de questions classiques et de techniques usuelles. En vrac

- $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ pour $|x|<1$, $\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ pour $|x|<1$
- Justification d'espérances
- Formule des crible.
- $p(X_n = p) = p(X_n > p-1) - p(X_n > p)$
- $E(X_n)$ comme somme de n sommes de séries
- $\sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k (-1)^{k-1} x^{k-1}$ et $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.
- La constante d'Euler
- L'algorithmique
- En filigrane
  → les surjections
  → $E(X_n) = \sum_{p=0}^{+\infty} p(X > p)$
- les encadrements finis au service d'inégalités.
- L'accélération de la convergence d'une suite
- L'utilisation des DL
- La gestion d'un reste de série
- L'utilisation d'une intégrale pour majorer un reste de série.
- Les notions de suites adjacentes
- Le sujet probabilité en lui-même

7... On pouvait obtenir rapidement $E(X_n)$ avec $p(X_n > p)$

Sous réserve d'existence (facile à justifier) :

$$E(X_n) = \sum_{p=0}^{+\infty} p(X_n > p) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \left(\frac{n-k}{n}\right)^p = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{n-k}{n}\right)^p$$

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \frac{1}{1-\frac{n-k}{n}} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \frac{n}{k} = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \frac{1}{k} = \dots = n H_n .$$

PROGRAMMES

Calcul de $E(X_n) = n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$

```
program esperance;

var i,n:integer;e:real;

begin
write('Donnez le nombre de boules.   n= ');readln(n);
e:=0;
for i:=1 to n do e:=e+1/i;
writeln('L''espérance est environ : ',n*e:7:2)
end.
```

```
Donnez le nombre de boules.   n= 10
L'espérance est environ :   29.29

Donnez le nombre de boules.   n= 20
L'espérance est environ :   71.95

Donnez le nombre de boules.   n= 50
L'espérance est environ :  224.96

Donnez le nombre de boules.   n= 100
L'espérance est environ :  518.74
```

γ à 10^{-4} près. $\left(\gamma \simeq H_n - \ln n - \frac{1}{2n}\right)$

```
program gamma;

var i,n:integer;g:real;

begin
g:=0;
for i:=1 to n do g:=g+1/i;
g:=g-ln(n)-0.5/n;
writeln('Une valeur approchée de gamma à 0.0001 près est : ',g)
end.
```

```
Une valeur approchée de gamma à 0.0001 près est :  5.7663736175E-01
```

Simulation 1..

L'utilisateur donne le nombre de boules. Le programme fournit le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les n boules.
ZEPPO est un tableau représentant les n boules (ZEPPO[I] a au départ la valeur 0 et prend la valeur 1 dès que la boule n°i a été tirée).
HARPO sert à calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ et donc l'espérance (variable muette ?!)
GROUCHO compte le nombre de boules sorties.
CHICO compte le nombre de tirages effectués.

```
program marx1;

uses crt;
const max=100;
var p,n,i,GROUCHO,CHICO:integer;
    HARPO:real;
    ZEPPO:array[1..max] of integer;

begin
clrscr;randomize;
write('Donnez le nombre de boules (au maximum 100) ');readln(n);
HARPO:=0;
for i:=1 to n do
    begin
    ZEPPO[i]:=0;HARPO:=HARPO+1/i;
    end;
GROUCHO:=0;CHICO:=0;
while GROUCHO <> n do
      begin
      CHICO:=CHICO+1;
      p:=random(n)+1;
      if ZEPPO[p]=0 then begin
                         ZEPPO[p]:=1;
                         GROUCHO:=GROUCHO+1
                         end;
end;
writeln('Il a fallu tirer ',CHICO,' fois, pour obtenir les ',n,' numéros');
Writeln('Pour mémoire l''espérance est sensiblement: ',n*HARPO:2:0)
end.
```

```
Donnez le nombre de boules (au maximum 100) 50
Il a fallu tirer 241 fois, pour obtenir les 50 numéros
Pour mémoire l'espérance est sensiblement: 225
```

```
Donnez le nombre de boules (au maximum 100) 100
Il a fallu tirer 448 fois, pour obtenir les 100 numéros
Pour mémoire l'espérance est sensiblement: 519
```

```
Donnez le nombre de boules (au maximum 100) 25
Il a fallu tirer 79 fois, pour obtenir les 25 numéros
Pour mémoire l'espérance est sensiblement: 95
```

Simulation 2

On fait p fois la simulation n°1, on fait la moyenne des résultats obtenus et on compare à l'espérance. La simulation 1 est contenue dans la fonction CHICO

```
    program MARX2;

uses crt;
const nombmax=300;
var k,n,stop:integer;
    HARPO,moyenne:real;

function CHICO(haine :integer):integer;
var i,GROUCHO,p,s:integer;
    ZEPPO:array[1..nombmax] of integer;
begin
for i:=1 to haine do
ZEPPO[i]:=0;
GROUCHO:=0;s:=0;
while GROUCHO <> haine do
      begin
      s:=s+1;
      p:=random(haine)+1;
      if ZEPPO[p]=0 then begin
                         ZEPPO[p]:=1;
                         GROUCHO:=GROUCHO+1;
                         end;
      end;
CHICO:=s
end;

begin
clrscr;randomize;
Write('Donnez le nombre de boules (entre 1 et ',nombmax,') ');readln(n);
Write('Combien de fois souhaitez-vous recommencer ? ');readln(stop);
clrscr;
moyenne:=0;
for k:=1 to stop do
moyenne:=moyenne+CHICO(n);
HARPO:=0;
for k:=1 to n do
HARPO:=HARPO+1/k;
writeln('L''urne contient ',n,' boules.');
writeln('Nous avons recommencé l''expérience ',stop,' fois');
writeln('La moyenne des résultats est environ : ',moyenne/stop:3:0);
writeln('Pour mémoire l''espérance est : ',n*Harpo:3:0);
end.
```

```
L'urne contient 10 boules.
Nous avons recommencé l'expérience 10000 fois
La moyenne des résultats est environ :  29
Pour mémoire l'espérance est :  29
```

```
L'urne contient 100 boules.
Nous avons recommencé l'expérience 1000 fois
La moyenne des résultats est environ : 518
Pour mémoire l'espérance est : 519
```

```
L'urne contient 300 boules.
Nous avons recommencé l'expérience 1000 fois
La moyenne des résultats est environ : 1869
Pour mémoire l'espérance est : 1885
```