



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT  
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE  
MATHEMATIQUES I

Année 1984

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

## Partie I

Soit  $n$  un nombre entier naturel non nul. On considère les fonctions numériques  $f_n$ ,  $g_n$  et  $h_n$  définies sur l'intervalle  $[0, n]$  par les relations:

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, \quad g_n(t) = e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n, \quad h_n(t) = e^t g_n'(t)$$

où  $g_n'$  est la dérivée de  $g_n$ .

1. Etudier la variation de  $h_n$ . Dresser le tableau de variation de cette fonction.  
En déduire la variation de  $g_n$ . Montrer en particulier que  $g_n$  est à valeurs positives et qu'il existe un élément  $x_n$  de  $[0, n]$  et un seul tel que, pour tout élément  $t$  de  $[0, n]$ ,  $g_n(t) \leq g_n(x_n)$ .
2. Montrer que  $g_n(x_n) \leq \frac{1}{ne}$ .
3. Soit  $x$  un nombre réel strictement positif.
  - (a) Etudier la convergence des intégrales:

$$I_n(x) = \int_0^n f_n(t) t^{x-1} dt \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

(b) Soit  $c$  un réel strictement positif. Montrer que si  $n \geq c$ , alors:

$$0 \leq \Gamma(x) - I_n(x) \leq \int_0^c g_n(t)t^{x-1}dt + \int_c^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

4. En déduire que la suite de terme général  $I_n(x)$  converge vers  $\Gamma(x)$ .

## Partie II

On admet la formule de Stirling:

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}$$

Soit  $\alpha$  un nombre réel strictement positif. On pose:

$$P_1(\alpha) = 1 \text{ et } \forall n \geq 2, \quad P_n(\alpha) = (\alpha + 1)(2\alpha + 1) \dots [(n - 1)\alpha + 1]$$

$$J_0(\alpha) = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \quad J_n(\alpha) = \int_0^1 (1 - t^\alpha)^n dt$$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul  $n$ :  $(1 + n\alpha)J_n(\alpha) = n\alpha J_{n-1}(\alpha)$ .

2. En déduire la valeur de  $J_n(\alpha)$ , que l'on exprimera à l'aide de  $P_n(\alpha)$ .

3. En effectuant un changement de variable, trouver une relation entre  $J_n(\alpha)$  et  $I_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ .

En déduire un équivalent de la suite de terme général  $P_n(\alpha)$ .

4. Soit désormais  $x$  un nombre réel strictement positif. Pour tout nombre entier naturel non nul  $p$ , on pose:

$$Q_n(p, x) = x(x + p)(x + 2p) \dots [x + (n - 1)p]$$

Exprimer  $Q_n(p, x)$  à l'aide de  $P_n\left(\frac{p}{x}\right)$ . En déduire un équivalent de la suite de terme général  $Q_n(p, x)$ , les nombres  $p$  et  $x$  étant fixés.

5. (a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ :  $Q_n(2, x)Q_n(2, x + 1) = Q_{2n}(1, x)$ .

(b) En déduire une relation entre  $\Gamma(x)$ ,  $\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$  et  $\Gamma\left(\frac{x + 1}{2}\right)$ .

(c) En déduire la valeur de  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ , puis, à l'aide d'un changement de variable, la convergence et la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t.$$