CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1986

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = t^3 + t$$

Dans la partie I, on étudie la fonction réciproque g de f. Dans la partie II, on étudie un algorithme d'approximation de g à l'aide d'une suite de fonctions rationnelles. Enfin, dans la partie III, on étudie une approximation polynomiale de g par la méthode des moindres carrés.

I - Etude de g.

1. Variation de g.

   (a) Etudier les variations de la fonction f.
   Montrer que f admet une fonction réciproque;
   soit g cette fonction. Pour tout réel x, on a donc :

   $$g(x)^3 + g(x) = x.$$

   Montrer que la fonction g est impaire et strictement croissante.

   (b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$; exprimer g' en fonction de g.
   En déduire, sans calcul, le sens de variation de g'.

2. Etude locale et asymptotique de g.

(a) Montrer que g admet au voisinage de 0 un développement limité à tout ordre.
Expliciter ce développement à l'ordre 3.

(b) Montrer que $g(x)$ est équivalent à $x^{1/3}$ au voisinage de $+\infty$.

(c) On écrit alors $g(x)$ sous la forme $x^{1/3}[1 + h(x)]$, où $h(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
Expliciter la relation satisfaite par la fonction h.
En déduire que la fonction x$\mapsto x^{2/3}h(x)$ admet en $+\infty$ une limite finie que l'on déterminera.

(d) Donner une allure de la représentation graphique de g.

3. Etude d'une primitive de g.
Soit G la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x) = \int_0^x g(u)du.$$

(a) Calculer G en fonction de g.

(b) Etudier la variation de G; étudier G au voisinage de 0 et de $+\infty$.

II - Approximation rationnelle de g.

Dans cette partie, on prend x dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On interprète $g(x)$ comme l'unique solution de l'équation $t^3 + t = x$, c'est-à-dire comme l'abscisse du point d'intersection de la courbe C représentative de f avec la droite D_x parallèle à l'axe des abscisses et d'ordonnée x. On se propose d'approcher $g(x)$ à l'aide de la suite de terme général $u_n(x)$ ainsi construite : on pose $\mathrm{u}_0(x) = x$ et on prend pour $u_1(x)$ l'abscisse du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse x; on itère ce processus en considérant l'abscisse $u_{n+1}(x)$ du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse $u_n(x)$.

1. Construction de l'algorithme d'approximation.
Soit t un nombre réel positif. Prouver que l'abscisse du point d'intersection de D_x avec la tangente à C au point d'abscisse t est égale à $\dfrac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}$.
On considère donc la suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1}(x) = \frac{2u_n^3(x) + x}{3u_n^2(x) + 1}$$

et la condition initiale $u_0(x) = x$.

2. Etude de l'algorithme.
Soit φ la fonction numérique qui à tout réel positif t associe

$$\varphi(t) = \frac{2t^3 + x}{3t^2 + 1}.$$

(a) Etudier le signe de $t - \varphi(t)$.

(b) Calculer la dérivée de φ. Etudier le signe de $\varphi'(t)$.

(c) Déduire des questions 2a et 2b que l'intervalle $[g(x), x]$ est stable par φ.
En utilisant l'encadrement

$$0 \leqslant t^3 + t - x \leqslant t^3,$$

valable pour tout élément t de l'intervalle $[g(x), x]$, montrer que, sous cette dernière condition : $0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

3. Etude de la convergence.

(a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n(x)$ appartient à $[g(x), x]$, que la suite $(u_n(x))$ est décroissante et qu'elle converge vers $g(x)$.

(b) Prouver que, pour tout nombre entier naturel n :

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) - g(x) \leqslant \frac{2}{3}[u_n(x) - g(x)].$$

(c) Soit a un nombre réel positif. On pose :

$$\beta_n = \underset{x\in[0,a]}{Sup}\, [u_n(x) - g(x)].$$

Prouver que $\beta_n \leqslant (\frac{2}{3})^n a$.

(d) Prouver que, pour tout nombre réel positif t :

$$\varphi(t) - g(x) = [t - g(x)]^2 \frac{2t + g(x)}{3t^2 + 1}.$$

Montrer que, pour tout élément t de l'intervalle $[g(x), x]$:

$$0 \leqslant \varphi(t) - g(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}[t - g(x)]^2.$$

(On pourra étudier la variation de la fonction $t \mapsto \dfrac{3t}{3t^2 + 1}$.)

(e) Calculer, sous forme de fraction, $u_2(1)$. Que dire de la précision de $u_2(1)$ comme valeur approchée de $g(1)$?

III - Approximation polynomiale de g par la méthode des moindres carrés.

Soient a un nombre réel strictement positif, n un nombre entier naturel non nul et $S = (x_0, x_1, ..., x_n)$ une suite d'éléments de $[0, a]$ distincts deux à deux. Pour tout nombre entier naturel p, on note E_p l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

1. Produit scalaire sur E_n adapté à S.

   (a) Montrer que l'application qui à tout couple (P, Q) d'éléments de E_n associe le nombre réel :

   $$(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$$

   est un produit scalaire sur E_n.

   (b) Soit i un nombre entier naturel inférieur ou égal à n.
   Montrer qu'il existe un élément L_i de E_n et un seul prenant la valeur 1 au point x_i et la valeur 0 en tous les autres points de S.

   (c) Prouver que la famille $B = (L_0, L_1, ..., L_n)$ est une base orthonormale de E_n.

   (d) Montrer qu'il existe un élément P_g de E_n et un seul tel que, pour tout nombre entier i de $[\![0, n]\!]$,

   $$P_g(x_i) = g(x_i);$$

   expliciter les composantes de P_g dans la base B.

2. Approximation de g.
   Soit p un nombre entier naturel strictement inférieur à n. Pour tout élément A de E_p, on pose :

   $$N(A) = \sum_{k=0}^{n}[g(x_k) - A(x_k)]^2.$$

(a) Interpréter $N(A)$ à l'aide du produit scalaire sur E_n.

(b) Montrer qu'il existe un élément H_g de E_p et un seul tel que, pour tout élément A de E_p,

$$N(H_g) \leqslant N(A).$$

(c) Montrer que le polynôme H_g est caractérisé par les relations :

$$(H_g|X^i) = (P_g|X^i) \quad \text{où} \quad 0 \leqslant i \leqslant p.$$

(d) On écrit H_g sous la forme :

$$H_g = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j X^j.$$

Expliciter un système linéaire admettant pour unique solution $(\lambda_{1,}\lambda_2, ..., \lambda_p)$.

(e) En utilisant les résultats obtenus dans les parties II et III, indiquer les différentes étapes d'un algorithme permettant de calculer H_g.