CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Année 1998

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème a pour objet l'étude du nombre de fois où, dans une recherche séquentielle du maximum de n entiers distincts deux à deux, celui-ci est amené à changer de valeur au cours de l'exécution de l'algorithme, ce dernier est explicitement défini dans la partie II.

Notations. Pour tout entier naturel n non nul on notera par I_n l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites numériques, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ signifiera que u_n est équivalent à v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie I : Quelques résultats préliminaires.

Les parties A et B sont indépendantes l'une de l'autre, leurs résultats seront utilisés dans la suite du problème.

A

Dans cette partie n désigne un entier naturel.

1. (a) Vérifier rapidement que l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P(X) \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P(X)) = P(X+1)$$

   est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (c) Déterminer M^{-1}.

2. On suppose que $(a_0, a_1, ..., a_n)$ et $(b_0, b_1, ..., b_n)$ appartiennent à $\mathbb{R}^{n+1}$ et vérifient :

$$\forall p \in \{0, ..., n\},\ b_p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k a_k$$

   (a) Trouver un lien entre les deux matrices lignes $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ et M.
   (b) En déduire, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, l'expression de a_k en fonction des nombres $b_0, \dots, b_k$.

B

Dans cette sous-partie $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ désigne une suite numérique réelle et g une fonction positive, continue sur $[1, +\infty[$, décroissante sur un intervalle $[c, +\infty[$ inclus dans $[1, +\infty[$ telles que $\int\limits_1^{+\infty} g(t)dt$ soit divergente et $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} g(n)$.

1. On suppose que q et N sont deux entiers naturels tels que $c \leqslant q < N$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant q$, on a : $g(n+1) \leqslant \int\limits_n^{n+1} g(t)dt \leqslant g(n)$.

   (b) En déduire : $\int\limits_q^N g(t)dt \leqslant \sum\limits_{n=q}^{N-1} g(n) \leqslant \int\limits_q^N g(t)dt + g(q)$.

2. On considère un réel ε tel que $0 < \varepsilon < 1$.

   (a) Montrer qu'il existe un entier naturel $q \geqslant c$ tel que $(1-\varepsilon)g(n) \leqslant w_{n+1} - w_n \leqslant (1+\varepsilon)g(n)$ dès que $n \geqslant q$.
   (b) En déduire que, pour tout entier $N > q$:

$$(1-\varepsilon)\int_1^N g(t)dt - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)dt + w_q \leqslant w_N \leqslant (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q) + w_q$$

3. Montrer que : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int\limits_1^n g(t)dt$.

4. En utilisant ce qui vient d'être prouvé, montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Partie II : Etude d'un algorithme.

Dans cette partie n désignera un entier naturel non nul.
On suppose que dans le préambule d'un programme écrit en Turbo-Pascal on a défini :

1) une constante entière $C \geqslant 2$.

2) un type tableau= `array[1,..,C] of integer`;

L'introduction de la constante C n'étant faite que pour pouvoir définir le type tableau, on pourra la considérer aussi grande que l'on veut. On considère alors la procédure suivante.

```
procedure Recherche(n:integer;t:tableau;var max:integer);
var i:integer;
begin
max :=t[1];
for i :=2 to n do
                    begin
                        if t[i]>max then max :=t[i];
                    end;
end;
```

1. Quel sera le contenu de la variable max après l'appel dans le programme principal de Recherche (10,t,max) ?

2. On considère n entiers distincts deux à deux et on suppose que ces nombres sont affectés aux n premières "cases" de t, variable de type tableau, (un entier par case).

   (a) Quel est le nombre de rangements possibles de ces n entiers dans les n "cases mémoires" t[1], . . . , t[n] ?
   Pour tout i appartenant à I_n, on note par $V(i, n)$ le nombre de rangements des n entiers dans les n "cases mémoires" t[1], . . . , t[n] tels que l'appel de la procédure Recherche (n,t,max)
   Recherche (n,t,max)
   provoque i affectations de la variable max au cours de son exécution.
   On admettra que ce nombre $V(i, n)$ est indépendant des n entiers initiaux pourvu toutefois que ceux-ci soient distincts.

   (b) Vérifier qu'effectivement le nombre d'affectations possibles de la variable max au cours de l'exécution de Recherche (10,t,max) appartient à I_n.
   Par convention, on pose $V(0, n) = 0$ et $V(k, n) = 0$ lorsque $k > n$.

   (c) Quel est le nombre d'affectations de la variable max au cours de l'exécution de Recherche (10,t,max) si, pour tout $i \in I_n$, t[i]$= n + 1 - i$?

   (d) Montrer que $V(1, n) = (n - 1)!$ et déterminer $V(n, n)$.

   (e) On suppose dans la première sous-question qui suit que $2 \leqslant i \leqslant n$.
   - Montrer que $V(i, n + 1) = V(i - 1, n) + nV(i, n)$.
     On pourra distinguer les rangements de $n + 1$ entiers distincts deux à deux dans t[1], . . . , t[n+1] suivant que t[n+1] contient ou non le plus grand de ces $n + 1$ entiers.
   - Montrer que la formule précédente s'étend aux cas $i = 1$ et $i = n + 1$.
   - Montrer qu'elle est encore vraie si $n = 1$ et $1 \leqslant i \leqslant 2$.

   (f) On définit le polynôme $P_n(X)$ par $P_n(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} V(i, n)X^i$.
   - Montrer que $P_{n+1}(X) = (n + X)P_n(X)$.
   - En déduire l'expression de $P_n(X)$.

3. On pose $G_n(X) = \dfrac{1}{n!}P_n(X)$.

   (a) Calculer $G_n(1)$.

   (b) Exprimer $G_{n+1}(X)$ à l'aide de $G_n(X)$.

   (c) Comparer $G'_n(1)$ et $1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n}$

4. Étant donné n entiers distincts deux à deux, on les range aléatoirement dans les n "cases" t[1], . . . , t[n] d'une variable t de type tableau.

   Tous les rangements possibles constituent les événements élémentaires d'un espace probabilisé muni de la probabilité p : ces rangements étant de probabilités égales.

   On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'affectations de la variable max au cours de l'exécution de Recherche (10,t,max).

   (a) Déterminer la probabilité de l'événement $(X_n = 1)$ et de façon générale, exprimer, lorsque i appartient à I_n, $p(X_n = i)$ à l'aide de $V(i, n)$ et n.

   (b) Déterminer l'espérance de X_n.

   (c) Montrer que, si n est supérieur ou égal à 2, alors : $p(X_n = 2) = \dfrac{1}{n}(1 + \dfrac{1}{2} + ... + \dfrac{1}{n-1})$.
   Donner un équivalent simple de $p(X_n = 2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. (a) Si i appartient à I_n, montrer que : $(n + 1)p(X_{n+1} = i) - np(X_n = i) = p(X_n = i - 1)$.

   (b) En utilisant les résultats de la partie I.B. montrer par récurrence sur i que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^{\times}, \quad p(X_n = i) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(i-1)!n}(\ln n)^{i-1}$$

Partie III : Calcul de l'inverse d'une certaine matrice.

On désigne toujours par n un entier naturel non nul, et $V(i, n)$ a toujours la signification qu'on lui a attribuée dans la partie II. On convient que : $V(0, 0) = 1$ et $V(i, 0) = 0$ pour tout $i \in I_n$.
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1\\1\leqslant j\leqslant n+1}}$ la matrice appartenant à $\mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = (-1)^{j-i}V(i-1, j-1)$ pour tout $(i, j) \in (I_{n+1})^2$.
Cette partie utilise certains résultats des parties I et II.

1. Montrer que $X(X-1)(...)(X-n+1) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}V(k, n)X^k$.

2. On définit la famille de polynômes $(N_i(X))_{i\in\{0,1,...,n\}}$ par $N_0(X) = 1$, $N_1(X) = X$ et de façon générale $N_j(X) = X(X-1)(...)(X-j+1)$ pour tout $j \in I_n$.

   (a) Montrer que $(N_i(X))_{i\in\{0,1,...,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Quelle est la matrice de passage de la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à $(N_i(X))_{i\in\{0,1,...,n\}}$?

3. (a) Montrer que A est inversible.
   Pour tout $(i, j) \in (I_{n+1})^2$, l'élément situé sur la $i^{ième}$ ligne et la $j^{ième}$ colonne de A^{-1} est noté $\omega(i - 1, j - 1)$.

   (b) Montrer que : $X^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\omega(k, n)N_k(X)$.

4. (a) Pour tout $p \in \{0, 1, ..., n\}$, comparer p^n et $\sum\limits_{k=0}^{p}k!\omega(k, n)C_p^k$.

   (b) En utilisant les résultats de la partie I.A. donner une expression de $\omega(k, n)$.

Partie IV : Interprétation des nombres $\omega(k, n)$.

Dans cette partie encore n désignera un entier naturel non nul.
Soit k un entier naturel non nul, on appelle $k-$partition de I_n tout ensemble $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ dont les éléments A_i, pour $i = 1, ..., k$, sont des parties non vides de I_n, deux à deux disjointes et dont la réunion est égale à I_n.
On note par $s(k, n)$ le nombre de $k-$partitions de I_n et on convient que $s(0, n) = 0$.

1. Déterminer $s(1,1)$, $s(n,n)$, $s(1,n)$ et $s(k,n)$ lorsque k est un entier strictement supérieur à n.

2. Soit p un entier naturel non nul.

   (a) Déterminer le nombre de n-listes dont les éléments appartiennent à I_p. On rappelle que dans une telle liste les éléments ne sont pas forcément distincts.

   (b) Soit k un élément de I_p, déterminer le nombre de n-listes dont les éléments appartiennent à $\{1, ..., k\}$, chacun des nombres 1, ... ,k apparaissant au moins une fois dans la liste.

   (c) Montrer que $p^n = \sum_{k=0}^{p} k! s(k,n) C_p^k$.

3. Comparer $s(k,n)$ et $\omega(k,n)$ lorsque $k \in \{0, ..., n\}$.