D'après HEC 82

n est un entier naturel supérieur ou égal à deux. Une roue de loterie est schématisée par un disque de centre O, divisé en n secteurs égaux, mobile par rapport à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les secteurs sont numérotés de 1 à n, dans le sens inverse du sens trigonométrique et chaque secteur a une mesure angulaire de $h = \dfrac{2\pi}{n}$ radians.

On note I le point situé au bord du disque, tel que le segment $[O, I]$ délimite les secteurs 1 et n.

Voir le schéma à la fin.

Une expérience aléatoire consiste à faire tourner la roue dans le sens trigonométrique. Lorsque celle ci s'arrête, le secteur rencontré par la demi-droite $(O, \overrightarrow{i})$ est dit gagnant (on suppose que la demi-droite $(O, \overrightarrow{i})$, privée de O..., à l'arrêt de la roue ne rencontre qu'un seul secteur).

La position initiale de la roue est la suivante : le point I est sur la demi-droite $(O, \overrightarrow{i})$.

On note X la variable aléatoire égale à la mesure (en radian) de l'angle total dont a tourné la roue avant de s'arrêter (on prend en compte les tours effectués par la roue , donc X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$).

On suppose que X est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} e^{x_0 - t} & \text{si } t \in [x_0, +\infty[\\ 0 & \text{si } t \in]-\infty, x_0[\end{cases}$$

avec $x_0 = Nh$ où N est un entier naturel non nul.

On note Y la variable aléatoire égale au numéro du secteur gagnant.

Dans la premiere partie, on étudie les variables X et Y. Dans la seconde partie, on étudie la probabilité qu' a un joueur de gagner, lorsqu'il mise plusieurs fois.

On est prié de ne pas trop se poser de questions métaphysiques sur la frontière des secteurs. Coulez-vous dans la logique du texte qui a été poposé comme cela. De plus, pour tout réel x, $P(X = x) = 0$...

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE 1

Q1 Loi de la variable aléatoire X.

a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Quelle est la fonction de répartition de la variable $(X - x_0)$? Quelle loi usuelle reconnaissez vous ?

c) En déduire l'espérance et la variance de X.

d) Soit s un élément de $\mathbb{Z}$. Calculer la probabilité de l'événement $\{(s-1)h \leqslant X < sh\}$ (on distinguera les cas $s \leqslant N$ et $s \geqslant N+1$).

Q2 Loi de la variable Y, égale au numéro du secteur gagnant.

a) Soit k un élément de $\mathbb{N}$ et q un élément de $\mathbb{Z}$. Montrer l'équivalence suivante :

$$nq + k > N \iff q \geqslant 1 + E\left(\frac{N-k}{n}\right)$$

où $E\left(\dfrac{N-k}{n}\right)$ désigne la partie entière de $\dfrac{N-k}{n}$.

b) Montrer l'égalité d'événements :

$$\{Y=1\}=\bigcup_{q=0}^{\infty}\{2q\pi \leqslant X < 2q\pi+h\}=\bigcup_{q=0}^{\infty}\{nqh \leqslant X < (nq+1)h\}$$

c) Donner une expression analogue de l'événement $\{Y=k\}$ pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$.

d) En déduire que pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$:

$$P(Y=k)=p_n(k)=\frac{e^{\frac{2\pi}{n}}-1}{e^{2\pi}-1}\ e^{2\pi\left[\frac{N-k}{n}-E\left(\frac{N-k}{n}\right)\right]}$$

Q3 Espérance de Y dans le cas où N est un multiple de n.

$N=np$ où p est un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout élément k de $[\![1,n]\!]$:

$$\frac{N-k}{n}-E\left(\frac{N-k}{n}\right)=1-\frac{k}{n}.$$

b) Montrer que l'espérance de Y vaut : $\dfrac{e^{\frac{2\pi}{n}}}{e^{\frac{2\pi}{n}}-1}-\dfrac{n}{e^{2\pi}-1}$ (on pourra au préalable calculer pour $x\neq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$).

PARTIE 2

Dans cette partie : $n \geqslant 4$.

Pour tout entier naturel $k \in [\![1,n]\!]$, on pose : $p_k=p_n(k)=P(Y=k)$ et $a_k=p_{k-1}+p_k+p_{k+1}$, avec la convention : $p_0=p_n$ et $p_1=p_{n+1}$.

Le secteur de numéro n est aussi numéroté 0, et le secteur de numéro 1 est aussi numéroté n+1.

Dans toute cette partie, il est inutile de remplacer p_k par l'expression trouvée dans la partie précédente.

La loterie est utilisée avec la règle de jeu suivante : avant l'expérience, le joueur mise sur un secteur de son choix ; soit k le numéro de ce secteur ; apres l'expérience, il perçoit le double de sa mise si la roue s'est arrêtée sur le secteur k, il est remboursé si la roue s'arrête sur le secteur k-1 ou sur le secteur k+1 ; il perd sa mise dans les n-3 autres cas.

Le joueur décide de tenter sa chance plusieurs fois consécutives, avec la méthode que voici : au premier coup, il mise sur un secteur choisi au hasard (les n choix sont équiprobables) ;

• si au $m^{\text{ème}}$ coup ($m \geqslant 1$) il a été remboursé ou s'il a doublé sa mise (on dit dans les deux cas qu'il a gagné au $m^{\text{ème}}$ coup), il mise au $(m+1)^{\text{ème}}$ coup sur le même secteur qu'au $m^{\text{ème}}$ coup ! !

• sinon (on dit alors qu'il a perdu au $m^{\text{ème}}$ coup), il choisit au hasard l'un des autres secteurs (les n-1 choix sont équiprobables).

On suppose que que les coups successifs constituent des expériences aléatoires indépendantes et identiques. Le point I de la roue est remis à sa position initiale sur la demi-droite $(0,\overrightarrow{i})$ après chaque expérience.

On adopte les notations suivantes :

• $S_k(m)$ est l'événement "le joueur choisit le secteur k au $m^{\text{ème}}$ coup" ; et la probabilité de cet événement est notée : $s_k(m)$.

• $G(m)$ est l'événement "le joueur gagne au $m^{\text{ème}}$ coup" et sa probabilité est notée $g(m)$.

• $g_k(m)$ est la probabilité conditionnelle que le joueur gagne au $m^{\text{ème}}$ coup, sachant qu'il a misé sur le secteur k .

Q1 Cas où m=1.

Calculer $s_k(1)$, $g_k(1)$ (en fonction a_k) et $g(1)$.

Q2 Cas général

a) Soit $m \geqslant 2$. Calculer $g_k(m)$ en fonction d'éléments de la suite (a_i).

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul m :

$$s_k(m+1) = a_k\, s_k(m) + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (1-a_i)\, s_i(m)$$

Q3 Pour tout entier non nul m, on pose :

$$U_m = \begin{pmatrix} s_1(m) \\ s_2(m) \\ \vdots \\ s_n(m) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une matrice carrée M d'ordre n, à coefficients réels indépendants de m, telle que, pour tout entier naturel non nul m : $U_{m+1} = MU_m$.

b) En déduire, pour m dans $\mathbb{N}^*$, U_m en fonction de la de M, U_1 et m.

c) Montrer que pour tout entier naturel m non nul : $g_m = {}^t A\, M^{m-1}\, U_1$ où ${}^tA$ désigne la transposée de la matrice A.

Q4 Dans cette question, on choisit n assez grand pour que les nombres a_k où $k \in [\![1, n]\!]$ puissent être supposés égaux.

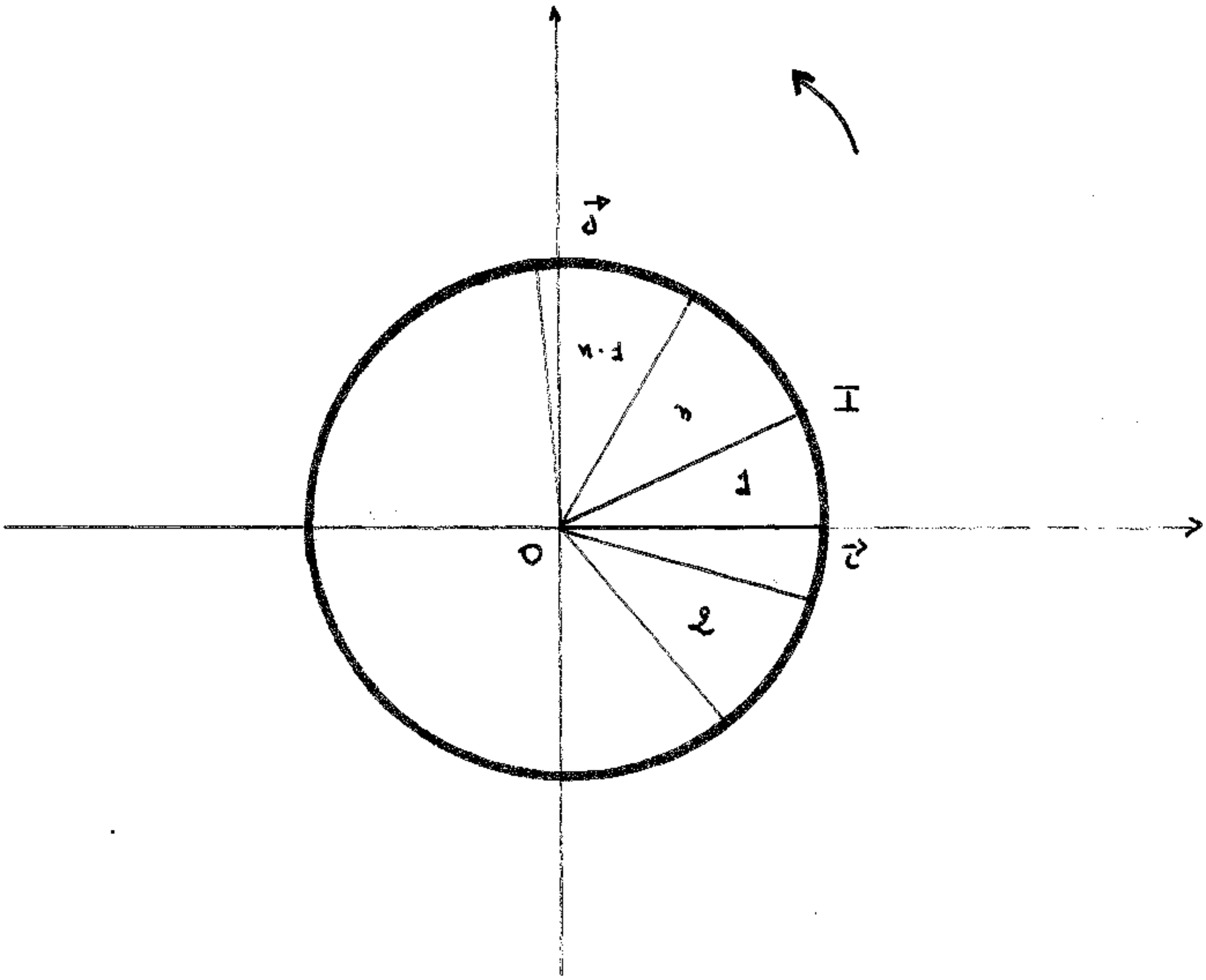
a) Montrer que la valeur commune des nombres a_k est $\dfrac{3}{n}$.

b) Montrer que M est combinaison linéaire des matrices I et J (où I désigne la matrice identité d'ordre n et J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1).

On pourra poser pour simplifier les écritures : $M = \lambda I + \mu J$.

c) Pour tout entier naturel non nul p, calculer J^p. En déduire l'expression de M^{m-1}.

d) Déterminer la valeur de g_m.


$\vec{j}$
n-1
n
I
1
O
$\vec{i}$
2

PARTIE 1

(Q1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Si $x \in]-\infty, x_0[$, $F(x) = 0$ car f est nulle sur $]-\infty, x_0[$.

Si $x \in [x_0, +\infty[$, $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} e^{x_0 - t} dt = [-e^{x_0-t}]_{x_0}^{x} = 1 - e^{x_0 - x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, x_0[\\ 1 - e^{x_0 - x} \text{ si } x \in [x_0, +\infty[\end{cases}$.

b) Notons G la fonction de répartition de $X - x_0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(X - x_0 \leq x) = P(X \leq x + x_0) = F(x + x_0) = \begin{cases} 0 \text{ si } x + x_0 \in]-\infty, x_0[\\ 1 - e^{x_0 - (x + x_0)} \text{ si } x + x_0 \in [x_0, +\infty[\end{cases}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - e^{-x} \text{ si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$

Ainsi $X - x_0$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

c) Alors $X - x_0$ possède une espérance qui vaut $\frac{1}{1} = 1$ et une variance qui vaut $\frac{1}{1^2} = 1$. Alors $X = (X - x_0) + x_0$ possède une espérance qui vaut $1 + x_0$ et une variance qui vaut 1.

$E(X) = 1 + x_0$ et $V(X) = 1$.

Dans l'énoncé j'ai mis r à la place de $\hat{q}$.

d) Soit $\hat{q} \in \mathbb{Z}$. $P((\hat{q}-1)h \leq X < \hat{q}h) = F(\hat{q}h) - F((\hat{q}-1)h)$.

Rappelons que F est nulle sur $]-\infty, x_0[$ et même sur $]-\infty, x_0]$.

Notons également que : $\hat{q}h \leq x_0 \Leftrightarrow \hat{q}h \leq Nh \Leftrightarrow \hat{q} \leq N$.

On a aussi : $(\hat{q}-1)h \geq x_0 \Leftrightarrow (\hat{q}-1)h \geq Nh \Leftrightarrow \hat{q}-1 \geq N \Leftrightarrow \hat{q} \geq N+1$

Il devient alors naturel de distinguer deux cas.

1er cas. $\hat{q} \leq N$. Alors $\hat{q}h$ et $(\hat{q}-1)h$ sont dans $]-\infty, x_0]$.

Ainsi $P((\hat{q}-1)h \leq X < \hat{q}h) = 0 - 0 = 0$.

<u>2ième cas</u>.. $\hat q > N$ ou $\hat q \geq N+1$. Alors $\hat q h$ et $(\hat q - 1)h$ sont dans $[x_0, +\infty[$.

$$P((\hat q-1)h \leq X < \hat q h) = F(\hat q h) - F((\hat q -1)h) = 1 - e^{x_0 - \hat q h} - 1 + e^{x_0 - (\hat q - 1)h}$$

$$P((\hat q-1)h \leq X < \hat q h) = e^{x_0 - \hat q h}(e^{h} - 1) = e^{(N-\hat q)h}(e^{h} - 1).$$

$$\forall \hat q \in \mathbb{Z}, \quad P((\hat q - 1)h \leq X < \hat q h) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat q \leq N \\ e^{x_0 - (\hat q - 1)h} - e^{x_0 - \hat q h} = e^{(N-\hat q)h}(e^{h}-1) & \text{si } \hat q > N \text{ ou } \hat q \geq N+1 \end{cases}$$

Q2) <u>a)</u> $k \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}$.

- Supposons $nq + k > N$. Alors : $q > \frac{N-k}{n} \geq E(\frac{N-k}{n})$; ainsi $q > E(\frac{N-k}{n})$.

  ce qui donne $q - 1 \geq E(\frac{N-k}{n})$ car q et $E(\frac{N-k}{n})$ sont deux éléments de $\mathbb{Z}$.

  Donc $nq + k > N \Rightarrow q \geq 1 + E(\frac{N-k}{n})$.

- Réciproquement supposons $q \geq 1 + E(\frac{N-k}{n})$.

  Alors $q \geq 1 + E(\frac{N-k}{n}) > \frac{N-k}{n}$; $nq > N - k$; $nq + k > N$.

Finalement $\forall k \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{Z}, \ nq + k > N \Leftrightarrow q \geq 1 + E(\frac{N-k}{n})$.

<u>b)</u> L'événement $\{Y = 1\}$ est réalisé si et seulement si l'angle total dont a tourné la roue appartient à un intervalle du type $[0 + q \times 2\pi, h + (q+1)2\pi[$ où q est un élément de $\mathbb{N}$.

Donc $\{Y = 1\}$ est réalisé si et seulement si il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que l'événement $\{2q\pi \leq X < 2q\pi + h\}$ soit réalisé.

$$\text{Ainsi} \quad \{Y = 1\} = \bigcup_{q=0}^{+\infty} \{2q\pi \leq X < 2q\pi + h\} = \bigcup_{q=0}^{+\infty} \{nqh \leq X < (nq+1)h\}.$$

<u>c)</u> Soit $k \in [\![1, n]\!]$. L'événement $\{Y = k\}$ est réalisé si et seulement si l'angle total dont a tourné la roue appartient à un intervalle du type $[(k-1)h + q \times 2\pi, kh + q \times 2\pi[$ où $q \in \mathbb{Z}$.

$\{Y=k\}$ est réalisé si et seulement si on peut trouver q dans $\mathbb{N}$ tel que l'événement $\{2q\pi+(k-1)h \leq X < 2q\pi+kh\}$ soit réalisé. Ainsi :

$$\forall k\in[\![1,n]\!],\ \{Y=k\}=\bigcup_{q=0}^{+\infty}\{2q\pi+(k-1)h\leq X<2q\pi+kh\}\underset{2\pi=nh}{=}\bigcup_{q=0}^{+\infty}\{(nq+k-1)h\leq X<(nq+k)h\}$$

d) Soit $k\in[\![1,n]\!]$.

$$P(Y=k)\underset{4}{=}P\Big(\bigcup_{q=0}^{+\infty}\{(nq+k-1)h\leq X<(nq+k)h\}\Big)\underset{\text{union disjointe}}{=}\sum_{q=0}^{+\infty}P((nq+k-1)h\leq X<(nq+k)h).$$

d'après Q1a), si q est dans $\mathbb{N}$: $P((nq+k-1)h\leq X<(nq+k)h)=\begin{cases}0 \text{ si } nq+k\leq N\\ e^{(N-nq-k)h}(e^{h}-1) \text{ si } nq+k\geq N+1\end{cases}$

d'après Q2a) $nq+k\geq N+1 \Leftrightarrow nq+k>N \Leftrightarrow q\geq 1+E\left(\frac{N-k}{n}\right)$.

Ainsi $P(Y=k)=\displaystyle\sum_{q=1+E(\frac{N-k}{n})}^{+\infty} e^{(N-nq-k)h}(e^{h}-1)=e^{(N-k)h}(e^{h}-1)\sum_{q=1+E(\frac{N-k}{n})}^{+\infty}(e^{-nh})^{q}$.

$$P(Y=k)=e^{(N-k)h}(e^{h}-1)\left(e^{-nh}\right)^{1+E(\frac{N-k}{n})}\frac{1}{1-e^{-nh}}.$$ Rappelons que $h=\frac{2\pi}{n}$.

Il vient alors : $P(Y=k)=e^{\frac{2\pi(N-k)}{n}}e^{-2\pi E(\frac{N-k}{n})}\left(e^{\frac{2\pi}{n}}-1\right)\dfrac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}$

Or $\dfrac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\dfrac{1}{e^{2\pi}(1-e^{-2\pi})}=\dfrac{1}{e^{2\pi}-1}$.

Finalement : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ P(Y=k)=\dfrac{e^{\frac{2\pi}{n}}-1}{e^{2\pi}-1}\,e^{2\pi\left[\frac{N-k}{n}-E\left(\frac{N-k}{n}\right)\right]}$.

(Q3) a) Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$p \in \mathbb{Z}$!

$\frac{N-k}{n} = \frac{np-k}{n} = p - \frac{k}{n}$. $\quad E\left(\frac{N-k}{n}\right) = E\left(p-\frac{k}{n}\right) = p + E\left(-\frac{k}{n}\right)$.

Or $-\frac{k}{n} \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right]$ donc $E\left(-\frac{k}{n}\right) = -1$. Ainsi $E\left(\frac{N-k}{n}\right) = p-1$ et

$\frac{N-k}{n} - E\left(\frac{N-k}{n}\right) = p - \frac{k}{n} - (p-1) = 1 - \frac{k}{n}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{N-k}{n} - E\left(\frac{N-k}{n}\right) = 1 - \frac{k}{n}$.

b) D'après ce qui précède : $\forall k \in [\![1,n]\!], \ P(Y=k) = \frac{e^{\frac{2\pi}{n}}-1}{e^{2\pi}-1} e^{2\pi\left(1-\frac{k}{n}\right)}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!], \ P(Y=k) = \frac{e^{\frac{2\pi}{n}}-1}{e^{2\pi}-1} e^{2\pi} e^{-k\left(\frac{2\pi}{n}\right)} = A e^{-kh} = A t^k \ldots$

en posant $A = \frac{e^{\frac{2\pi}{n}}-1}{e^{2\pi}-1} e^{2\pi}$ et $t = e^{-h}$. $\quad E(Y) = A \sum_{k=1}^{n} k t^k = A t \sum_{k=1}^{n} k t^{k-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \ \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. En dérivant il vient :

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}, \ \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}\left[-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1})(-1)\right] = \frac{1 + n x^{n+1} - (n+1)x^n}{(1-x)^2}$.

Ainsi $E(Y) = A t \frac{1 + n t^{n+1} - (n+1) t^n}{(1-t)^2} = A e^{-\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{\left(1-e^{-\frac{2\pi}{n}}\right)^2} \left(1 + n e^{-\frac{2\pi}{n}} e^{-2\pi} - (n+1) e^{-2\pi}\right)$.

$t = e^{-h} = e^{-\frac{2\pi}{n}}, \ t^n = e^{-2\pi}$

$E(Y) = \frac{e^{\frac{2\pi}{n}}-1}{e^{2\pi}-1} e^{2\pi} e^{-\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{\left(e^{-\frac{2\pi}{n}}\right)^2 \left(e^{\frac{2\pi}{n}}-1\right)^2} \left(1 + n e^{-2\pi/n} e^{-2\pi} - (n+1) e^{-2\pi}\right)$.

$E(Y) = \frac{e^{2\pi} e^{+2\pi/n}}{(e^{2\pi}-1)\left(e^{\frac{2\pi}{n}}-1\right)} \left[1 - e^{-2\pi} - n e^{-2\pi}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{n}}\right)\right]$.

$$E(Y) = \frac{e^{2i\pi}\, e^{2i\pi/n}\,(1-e^{-2i\pi})}{e^{2i\pi}(1-e^{-2i\pi})(e^{2i\pi/n}-1)} - n\, \frac{e^{2i\pi/n}\,(1-e^{-2i\pi/n})}{(e^{2i\pi}-1)(e^{2i\pi/n})(1-e^{-2i\pi/n})} .$$

$$\underline{\underline{E(Y) = \frac{e^{2i\pi/n}}{e^{2i\pi/n}-1} - \frac{n}{e^{2i\pi}-1}}} .$$

PARTIE 2

(Q1) Au premier coup le joueur vise un secteur au hasard donc :

$$\underline{\underline{\forall k \in [\![1,n]\!],\quad s_k(1) = \frac{1}{n}}} .$$

Pour tout k dans $[\![0,n+1]\!]$ nous noterons $A_k(m)$ l'événement au $m^{\text{ième}}$ coup le numéro du secteur gagnant est k, et ceci pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Ainsi :

$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ g_k(m) = P(G(m) \mid S_k(m)) = P(A_{k-1}(m) \cup A_k(m) \cup A_{k+1}(m))$

$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ g_k(m) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{union disjointe}}}{=} P(A_{k-1}(m)) + P(A_k(m)) + P(A_{k+1}(m)) = p_{k-1} + p_k + p_{k+1} = a_k .$

$\underline{\underline{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1,n]\!],\ g_k(m) = a_k}}$. En particulier : $\underline{\underline{\forall k \in [\![1,n]\!],\ g_k(1) = a_k}}$.

$(S_k(1))_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors : $g_1 = P(G(1)) = \sum_{k=1}^{n} P(G(1) \mid S_k(1))\, P(S_k(1)) = \sum_{k=1}^{n} g_k(1)\, s_k(1)$.

$$g_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(p_{k-1}+p_k+p_{k+1}) = \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n} p_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k=1}^{n} p_{k+1}\right]$$

$$g_1 = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k + \sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k=2}^{n+1} p_k\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} p_k + p_0 - p_n + \sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k=1}^{n} p_k + p_{n+1} - p_1\right)$$

comme $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, $p_0 = p_n$ et $p_1 = p_{n+1}$: $g_1 = \frac{1}{n} \times 3$. $\underline{\underline{g_1 = \frac{3}{n}}}$.

(Q2) a) Déjà fait ! Nous avons vu plus haut que :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1,n]\!],\ g_k(n) = a_k .}$$

b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$(G(m), \overline{G(m)})$ est un système complet d'événements.

Alors $s_k(m+1) = P(S_k(m+1)) = P(S_k(m+1) \cap G(m)) + P(S_k(m+1) \cap \overline{G(m)})$.

$(S_i(m))_{i \in [\![1,n]\!]}$ est également un système complet d'événements.

Ainsi $s_k(m+1) = \sum_{i=1}^{n} P(S_k(m+1) \cap G(m) \cap S_i(m)) + \sum_{i=1}^{n} P(S_k(m+1) \cap \overline{G(m)} \cap S_i(m))$

Alors
$$s_k(m+1) = \sum_{i=1}^{n} P(S_k(m+1) / G(m) \cap S_i(m))\, P(G(m)/S_i(m))\, P(S_i(m)) +$$
$$\sum_{i=1}^{n} P(S_k(m+1) / \overline{G(m)} \cap S_i(m))\, P(\overline{G(m)}/S_i(m))\, P(S_i(m))$$

$$s_k(m+1) = \sum_{i=1}^{n} P(S_k(m+1)/G(m) \cap S_i(m))\, g_i(m)\, s_i(m) + \sum_{i=1}^{n} P(S_k(m+1)/\overline{G(m)} \cap S_i(m))\, (1-g_i(m))\, s_i(m)$$

$$s_k(m+1) = \sum_{i=1}^{n} P(S_k(m+1)/G(m) \cap S_i(m))\, a_i\, s_i(m) + \sum_{i=1}^{n} P(S_k(m+1)/\overline{G(m)} \cap S_i(m))\, (1-a_i)\, s_i(m)$$

Analysons les probabilités conditionnelles de l'égalité précédente.

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ P(S_k(m+1)/G(m) \cap S_i(m)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$ (lorsqu'il gagne au m^e coup il mise au $(m+1)^{ième}$ coup sur le même secteur qu'au $m^{ième}$ coup).

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ P(S_k(m+1)/\overline{G(m)} \cap S_i(m)) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = k \\ \frac{1}{n-1} & \text{si } i \neq k \end{cases}$ (lorsqu'il perd au $m^{ième}$ coup il mise au $(m+1)^{ième}$ coup sur un secteur différent de celui sur lequel il a misé au $m^{ème}$ coup, le choix se faisant au hasard).

Alors $s_k(m+1) = a_k\, s_k(m) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{1}{n-1} (1-a_i)\, s_i(m)$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1,n]\!], s_k(n+1) = a_k s_k(n) + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (1-a_i) s_i(n)$

(Q3) a) Posons $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \; \alpha_{ij} = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ \frac{1}{n-1}(1-a_j) & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Considérons la matrice $M = (\alpha_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$.

→ les coefficients de M ne dépendent pas de m !

→ $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![1,n]\!], \; s_i(m+1) = a_i s_i(m) + \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (1-a_j) s_j(m)$

Ainsi $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![1,n]\!], \; s_i(m+1) = \alpha_{ii} s_i(m) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_{ij} s_j(m) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} s_j(m)$

Donc $\forall m \in \mathbb{N}^*, \; U_{m+1} = M U_m$. où $M = (\alpha_{ij})$ est l'élément de $M_n(\mathbb{R})$ défini

par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \; \alpha_{ij} = \begin{cases} a_i & \text{si } i = j \\ \frac{1}{n-1}(1-a_j) & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

b) Une récurrence simple donne alors $\forall m \in \mathbb{N}^*, \; U_m = M^{m-1} U_1$.

c) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. $g_m = P(G(m)) = \sum_{k=1}^{n} P(G(m) / S_k(m)) P(S_k(m)) = \sum_{k=1}^{n} g_k(m) s_k(m)$

$(S_k(m))_{k \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.

$g_m \underset{\substack{\uparrow \\ g_k(m) = a_k}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k s_k(m) = {}^tA U_m = {}^tA M^{m-1} U_1$. $\forall m \in \mathbb{N}^*, \; g_m = {}^tA M^{m-1} U_1$.

(Q4) a) Notons, par exemple, a la valeur commune de $a_3, a_4, \dots, a_n$.

Nous avons vu dans Q1 que : $\frac{3}{n} = g_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$. Alors $na = \sum_{k=1}^{n} a_k = 3$

Alors $a = \frac{2}{n}$. Ainsi $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $a_\ell = \frac{2}{n}$.

b) $J = (\beta_{ij})$ avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\beta_{ij} = 1$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

• $i \neq j$ $\quad \alpha_{ij} = \frac{1}{n-1}(1 - a_j) = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{n-2}{n(n-1)} = \frac{n-2}{n(n-1)}\beta_{ij}$.

• $i = j$ $\quad \alpha_{ij} = a_i = \frac{2}{n} = \left(\frac{2}{n} - \frac{n-2}{n(n-1)}\right) \times 1 + \frac{n-2}{n(n-1)} = \frac{n}{n(n-1)} \times 1 + \frac{n-2}{n(n-1)}\beta_{ij}$

Finalement : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\alpha_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n-1} \times 0 + \frac{n-2}{n(n-1)}\beta_{ij} & \text{si } i \neq j \\ \frac{n}{n(n-1)} \times 1 + \frac{n-2}{n(n-1)}\beta_{ij} & \text{si } i = j \end{cases}$

Ainsi $M = \frac{1}{n-1} I + \frac{n-2}{n(n-1)} J$.

Posons $\lambda = \frac{1}{n-1}$ et $\mu = \frac{n-2}{n(n-1)}$. $M = \lambda I + \mu J$.

c) Posons $J^2 = (\sigma_{ij})$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik}\beta_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n = n\beta_{ij}$

Ainsi $J^2 = nJ$

Une récurrence simple donne alors : $\forall p \in \mathbb{N}^*, J^p = n^{p-1} J$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. λI et μJ commutent donc :

$$(\lambda I + \mu J)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} (\lambda I)^{k-p} (\mu J)^p = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} \lambda^{k-p} \mu^p J^p = \lambda^k I + \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \lambda^{k-p} \mu^p n^{p-1} J$$

$$(\lambda I + \mu J)^k = \lambda^k I + \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{k} \binom{k}{p} \lambda^{k-p} (n\mu)^p J = \lambda^k I + \frac{1}{n}\left[(\lambda + n\mu)^k - \lambda^k\right] J$$

$(\lambda I + \mu J)^k = \lambda^k I + \frac{1}{n}\left[(\lambda + n\mu)^k - \lambda^k\right] J$. Notons que ceci vaut encore pour $k = 0$ n a !

Alors $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $M^{m-1} = \lambda^{m-1} I + \frac{1}{n}\left[(\lambda + n\mu)^{m-1} - \lambda^{m-1}\right] J$.

$\lambda = \frac{2}{n-1}$ et $\mu = \frac{n-3}{n(n-1)}$. $\lambda + n\mu = \frac{2}{n-1} + \frac{n-3}{n-1} = 1$.

Ainsi $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $M^{m-1} = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{m-1} I + \frac{1}{n}\left(1 - \left(\frac{2}{n-1}\right)^{m-1}\right) J$.

d) Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$q_m = {}^tA\, M^{m-1} U_1 = {}^tA\left(\lambda^{m-1} I + \frac{1}{n}(1 - \lambda^{m-1}) J\right) U_1$.

$q_m = \lambda^{m-1}\, {}^tA U_1 + \frac{1}{n}(1 - \lambda^{m-1})\, {}^tA J U_1$.

Or $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors ${}^tA U_1 = \frac{1}{n^2}(1 \cdots 1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}$.

${}^tAJU_1 = \frac{1}{n}\,\frac{1}{n}\,(1 \cdots 1)\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2}(1 \cdots 1)\begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = \frac{1}{n^2} \times n^2 = 1$.

Ainsi $q_m = \lambda^{m-1} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n}(1 - \lambda^{m-1}) \times 1 = \frac{1}{n}(\lambda^{m-1} + 1 - \lambda^{m-1}) = \frac{1}{n}$.

Ainsi $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $q_m = \frac{1}{n}$!