HEC 83 2ème épreuve.

I (Q1) .. → $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1(x)=\dfrac{1}{1+x+x^2}$, $g_1(x)=\dfrac{x}{1+x+x^2}$ et $h_1(x)=\dfrac{x^2}{1+x+x^2}$

* f_1, g_1, h_1 sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ (fonctions rationnelles)
* $f_1(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$, $g_1(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x}{x^2}=\dfrac{1}{x}$, $h_1(x)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{x^2}=1$. Même chose en $-\infty$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g_1(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} h_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x)=1$

* $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_1'(x)=-\dfrac{2x+1}{(1+x+x^2)^2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$, $g_1'(x)=\dfrac{1-x^2}{(1+x+x^2)^2}$; $\forall x\in\mathbb{R}$, $h_1'(x)=\dfrac{2x+x^2}{(1+x+x^2)^2}$

Le signe de f_1' sur $\mathbb{R}$ est le signe de $x\mapsto -(2x+1)$; celui de g_1' est celui de $x\mapsto 1-x^2$ et celui de h_1' est celui de $x\mapsto x(x+2)$.

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	−	
$f_1(x)$	0	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g_1'(x)$		−	0	+	0	−	
$g_1(x)$	0	↘	-1	↗	$1/3$	↘	0

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h_1'(x)$		+	0	−	0	+	
$h_1(x)$	1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↗	1

La droite d'équation $y=0$ est asymptote aux courbes représentatives $\mathcal{C}_{f_1}$ et $\mathcal{C}_{g_1}$ de f_1 et g_1 (à $+\infty$ et $-\infty$)

La droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe représentative $\mathcal{C}_{h_1}$ de h_1

(Q2) f_1', g_1' et h_1' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (fonctions rationnelles).

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_1''(x)=-\frac{2(1+x+x^2)^2-(2x+1)(2)(2x+1)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4}=\frac{6x(x+1)}{(1+x+x^2)^3}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g_1''(x)=\frac{-2x(1+x+x^2)^2-(1-x^2)2(2x+1)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4}=\frac{2(x^3-3x-1)}{(1+x+x^2)^3}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h_1''(x)=\frac{(2+2x)(1+x+x^2)^2-(2x+x^2)(2)(2x+1)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)^4}=\frac{-2(x^3+3x^2-1)}{(1+x+x^2)^3}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(1+x+x^2)^3>0$.

* f_1'' s'annule en changeant de signe en 0 et -1.

$\mathcal{C}_{f_1}$ admet deux points d'inflexion : les points de coordonnées $(0,1)$ et $(-1,1)$

Notons que $f_1'(0)=-1$ et $f_1'(-1)=1$.

* g_1'' est du signe de $P : x\mapsto x^3-3x-1$. P est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $P'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$P'(x)$		+	0	−	0	+	
$P(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Le théorème des valeurs intermédiaires montre que P admet exactement trois zéros distincts x_1, x_2 et x_3 (avec $x_1<x_2<x_3$). Une dichotomie rapide montre que : $x_1\simeq-1{,}53$, $x_2\simeq-0{,}35$, $x_3\simeq1{,}88$. P s'annule en changeant de signe en x_1, x_2, x_3.

Mieux ! Posons $x=\lambda\cos\theta$ ($\lambda\in\mathbb{R}$ et $\theta\in\mathbb{R}$).

$P(x)=0 \iff \lambda^3\cos^3\theta-3\lambda\cos\theta-1=0 \iff \lambda^3\dfrac{\cos3\theta+3\cos\theta}{4}-3\lambda\cos\theta-1=0 \iff 3\lambda\left(\dfrac{\lambda^2}{4}-1\right)\cos\theta+\dfrac{\lambda^3}{4}\cos3\theta-1=0$.

Posons $\lambda=2$ (pour faire disparaître $\cos\theta$!)

$P(x)=0 \iff \cos3\theta=\dfrac{4}{2^3}=\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3} \iff 3\theta\equiv\dfrac{\pi}{3}\,(2\pi)$ ou $3\theta\equiv-\dfrac{\pi}{3}\,(2\pi)$

$P(x)=0 \iff \theta\equiv\dfrac{\pi}{9}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ ou $\theta\equiv-\dfrac{\pi}{9}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \iff \cos\theta=\cos\dfrac{\pi}{9}$ ou $\cos\theta=\cos\dfrac{7\pi}{9}$ ou $\cos\theta=\cos\dfrac{13\pi}{9}$.

$P(x)=0 \iff x=2\cos\dfrac{\pi}{9}$ ou $x=2\cos\dfrac{7\pi}{9}$ ou $x=\cos\dfrac{13\pi}{9}$. à méditer.

Par conséquent : $\underline{x_1 = 2\cos\frac{7\pi}{9}}$, $\underline{x_2 = 2\cos\frac{13\pi}{9}}$ et $\underline{x_3 = 2\cos\frac{\pi}{9}}$

Remarque.- Cette méthode vaut pour tout polynôme de degré 3 ayant 3 zéros réels distincts.

$\mathcal{C}_{g_1}$ admet 3 points d'inflexion, les points d'abscisses $x_1 = 2\cos\frac{7\pi}{9}$, $x_2 = 2\cos\frac{13\pi}{9}$ et $x_3 = 2\cos\frac{\pi}{9}$.

$g_1(x_1) \simeq -0,84$, $g_1(x_2) \simeq -0,45$, $g_1(x_3) \simeq +0,29$

$g_1'(x_1) = -0,41$, $g_1'(x_2) \simeq 1,47$, $g_1'(x_3) \simeq -0,06$

* h_1'' est du signe de $Q : x \mapsto -(x^3+3x^2-1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(\frac{1}{x}) = (\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x} - 1) = \frac{1}{x^3}(1-3x^2-x^3) = -\frac{1}{x^3}(x^3+3x^2-1) = +\frac{1}{x^3}Q(x)$

Q est donc une fonction polynôme de degré 3 ayant 3 zéros réels distincts : $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ et $\frac{1}{x_3}$.

Posons $y_1 = \frac{1}{x_2}$, $y_2 = \frac{1}{x_1}$ et $y_3 = \frac{1}{x_3}$. $\underline{y_1 = \frac{1}{2\cos\frac{13\pi}{9}}}$, $\underline{y_2 = \frac{1}{2\cos\frac{7\pi}{9}}}$, $\underline{y_3 = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{9}}}$

Q donc h_1'' s'annule en changeant de signe en y_1, y_2 et y_3.

$\mathcal{C}_{h_1}$ admet 3 points d'inflexion, les points d'abscisses y_1, y_2 et y_3

$y_1 \simeq -2,88$, $y_2 \simeq -0,65$, $y_3 \simeq 0,53$;

$h_1(y_1) \simeq 1,29$, $h_1(y_2) \simeq 0,55$, $h_1(y_3) \simeq 0,16$;

$h_1'(y_1) \simeq 0,06$, $h_1'(y_2) \simeq -1,47$, $h_1'(y_3) \simeq 0,41$.

Remarque.. $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = -(x^3+3x^2-1)$

$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x-1) = -[(x-1)^3+3(x-1)^2-1] = -(x^3-3x+1)$

$\forall x \in \mathbb{R}, Q(-x-1) = -(-x^3+3x+1) = (x^3-3x-1) = P(x)$! le monde est bien petit !!

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0 \Leftrightarrow Q(-x-1) = 0$.

Les zéros de Q sont donc $-x_1-1, -x_2-1, -x_3-1$.

Par conséquent $\underline{y_1 = -2\cos\frac{\pi}{9} - 1}$, $\underline{y_2 = -2\cos\frac{13\pi}{9} - 1}$, $\underline{y_3 = -2\cos\frac{7\pi}{9} - 1}$

$\boxed{\text{II}}$ Q1 Soit $x \in [0,1]$. $1-x \le \frac{1}{1+x+x^2} \le \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow (1-x)(1+x+x^2) \le 1$ et $1+x \le 1+x+x^2$

$\Updownarrow$

$1-x^3 \le 1$ et $0 \le x^2$

$\Updownarrow$

$x^3 \ge 0$ et $x^2 \ge 0$ ok !

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \ge 2$

$\forall x \in [0,1]$, $(1-x)^n \le f_n(x) \le \frac{1}{(1+x)^n}$

Donc $\int_0^1 (1-x)^n dx \le I_n \le \int_0^1 (1+x)^{-n} dx$; $\left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \le I_n \le \left[\frac{(1+x)^{-n+1}}{-n+1}\right]_0^1$

Par conséquent : $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{1-2^{-n+1}}{n-1} \le \frac{1}{n-1}$; $\frac{1}{n+1} \le I_n \le \frac{1}{n-1}$ et $\frac{n}{n+1} \le nI_n \le \frac{n}{n-1}$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n-1} = 1$; $\lim_{n\to+\infty} (nI_n) = 1$; $\underline{I_n \sim \frac{1}{n}}$.

Q3 $n \in \mathbb{N}$ et $n \ge 3$. $\int_0^1 t(1-t)^n dt \overset{t=(t-1)+1}{=} \int_0^1 (t-1)(1-t)^n dt + \int_0^1 (1-t)^n dt = -\int_0^1 (1-t)^{n+1} dt + \int_0^1 (1-t)^n dt$

$$\underline{\int_0^1 t(1-t)^n dt} = \left[+\frac{(1-t)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 - \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{-1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \underline{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}.$$

$$\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^n}\,dt \overset{t=(1+t)-1}{=} \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^{n-1}}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\,dt = \left[\frac{(1+t)^{-n+2}}{-n+2}\right]_0^1 - \left[\frac{(1+t)^{-n+1}}{-n+1}\right]_0^1$$

$$\underline{\underline{\int_0^1 \frac{t}{(1+t)^n}\,dt}} = \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-2)2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)} = \underline{\underline{\frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-2)2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)}}}$$

$\forall t \in [0,1]$, $1-t \le \dfrac{1}{(1+t+t^2)} \le \dfrac{1}{1+t}$

$\forall t \in [0,1]$, $(1-t)^n \le \dfrac{1}{(1+t+t^2)^n} \le \dfrac{1}{(1+t)^n}$; $\forall t \in [0,1]$, $t(1-t)^n \le \dfrac{t}{(1+t+t^2)^n} \le \dfrac{t}{(1+t)^n}$.

$\displaystyle\int_0^1 t(1-t)^n\,dt \le J_n \le \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^n}\,dt$; $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \le J_n \le \dfrac{1}{(n-2)(n-1)} - \dfrac{1}{2^{n-2}(n-2)} + \dfrac{1}{2^{n-1}(n-1)}$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{(n-2)(n-1)} - \frac{n^2}{2^{n-2}(n-2)} + \frac{n^2}{2^{n-1}(n-1)} \right) = 1 - 0 + 0 = 1$

... donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 J_n = 1$; $\underline{\underline{J_n \sim \dfrac{1}{n^2}}}$

Q4 même chose ! (c'est la 3ème fois). Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $n \geqslant 3$.

$$\int_0^1 t^2(1-t)^n\,dt \overset{t^2=(t-1)^2+2(t-1)+1}{=} \int_0^1 (t-1)^2(1-t)^n\,dt + 2\int_0^1 (t-1)(1-t)^n\,dt + \int_0^1 (1-t)^n\,dt$$

$$\int_0^1 t^2(1-t)^n\,dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+3}}{n+3}\right]_0^1 - 2\left[-\frac{(1-t)^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 + \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\underline{\underline{\int_0^1 t^2(1-t)^n\,dt}} = \frac{1}{n+3} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \underline{\underline{\frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}}}$$

De même $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^n}\,dt = \frac{1}{n-3} - \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2^{n-3}(n-3)} + \frac{2}{2^{n-2}(n-2)} - \frac{1}{2^{n-1}(n-1)}$

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t)^n}\,dt = \frac{2}{(n-3)(n-2)(n-1)} - \frac{1}{2^{n-3}(n-3)} + \frac{1}{2^{n-3}(n-2)} - \frac{1}{2^{n-1}(n-1)}$$

Un raisonnement analogue à celui de Q2 et Q3 donne $K_n \sim \dfrac{2}{n^3}$.

$\boxed{\text{III}}$ Q1 $\displaystyle I_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\frac{4}{3}(x+\frac{1}{2})^2+1} = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{dx}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1} = \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$

$I_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\sqrt{3} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}} = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$. $\underline{\underline{I_1 = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}}}$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{x(2x+1) = 2x^2+2x+2-(x+2) = 2x^2+2x+2 - \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{3}{2}}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x+x^2)^n}\,dx \underset{\text{par parties}}{=} \left[\frac{x}{(1+x+x^2)^n}\right]_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{-n(2x+1)}{(1+x+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{1}{3^n} + n\underbrace{\int_0^1 \frac{2x^2+2x+2}{(1+x+x^2)^{n+1}}\,dx}_{\to 2I_n} - \frac{n}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^{n+1}}\,dx}_{\text{"}u'/u^{n+1}\text{"}} - \frac{3n}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{dx}{(1+x+x^2)^{n+1}}}_{I_{n+1}}$$

$$I_n = \frac{1}{3^n} + 2n I_n - \frac{n}{2}\left[\frac{(1+x+x^2)^{-n}}{-n}\right]_0^1 - \frac{3n}{2}I_{n+1} = 2n I_n - \frac{3n}{2}I_{n+1} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n} - 1\right)$$

$$I_{n+1} = \frac{2}{3n}\left[(2n-1)I_n + \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}} - \frac{1}{2}\right] = \frac{2(2n-1)}{3n}I_n + \frac{1}{n3^n} - \frac{1}{3n}$$

$$\underline{\underline{I_{n+1} = \frac{2(2n-1)}{3n}I_n + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{3}\right)}}.$$

$I_2 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}\frac{\pi\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{27}\pi\sqrt{3}$. $I_3 = I_2 + \left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{2}{27}\pi\sqrt{3}$

$I_4 = \frac{10}{9} I_3 - \frac{8}{81} = -\frac{2}{9} + \frac{20}{243}\pi\sqrt{3}$

$I_1 \simeq 0{,}605$; $I_2 \simeq 0{,}403$; $I_3 \simeq 0{,}292$; $I_4 \simeq 0{,}226$.

(Q3). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $n \geq 2$

$$2J_n + I_n = \int_0^1 \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^n}\,dx = \left[\frac{(1+x+x^2)^{-n+1}}{-n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

$$J_n = \frac{1}{2}\left[-I_n + \frac{1}{(n-1)}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)\right].$$

$$2J_1 + I_1 = \int_0^1 \frac{2x+1}{1+x+x^2}\,dx = \left[\ln(1+x+x^2)\right]_0^1 = \ln 3.$$

$$J_1 = \frac{1}{2}(-I_1 + \ln 3)$$

Par conséquent : $J_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \ln 3\right) \simeq 0{,}247$

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(-I_2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{27}\pi\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right) = -\frac{\pi}{27}\sqrt{3} + \frac{1}{3} \simeq 0{,}132$$

$$J_3 = \frac{1}{2}\left(-I_3 + \frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{2}{27}\pi\sqrt{3} + \frac{4}{9}\right) = \frac{5}{18} - \frac{1}{27}\pi\sqrt{3} \simeq 0{,}076$$

Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$.

$$I_n + J_n + K_n = \int_0^1 \frac{1+x+x^2}{(1+x+x^2)^n}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x+x^2)^{n-1}}\,dx = I_{n-1}$$

$$K_n = I_{n-1} - I_n - J_n = \frac{3(n-1)}{2(2n-3)}\left(I_n - \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{3}\right)\right) - I_n + \frac{1}{2} I_n - \frac{1}{2(n-1)}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

$$K_n = \frac{1}{2}\left(3\frac{n-1}{2n-3} - 1\right) I_n - \frac{1}{3^{n-1}}\left(\frac{3}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(n-1)}\right) + \frac{1}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(n-1)}.$$

$$K_n = \frac{n}{2(2n-3)} I_n - \frac{n}{2 \times 3^{n-1}(2n-3)(n-1)} - \frac{n-2}{2(n-1)(2n-3)}$$

$$I_1 + J_1 + K_1 = \int_0^1 1\,dx = 1$$

$K_1 = 1 - I_1 - J_1 = 1 - \frac{1}{2} I_1 - \frac{1}{2}\ln 3$. $K_1 = 1 - \frac{\pi\sqrt{3}}{18} - \frac{1}{2}\ln 3 \simeq 0{,}148$

$$K_2 = I_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{27}\pi\sqrt{3} \simeq 0{,}070$$

$$K_3 = \frac{1}{2} I_3 - \frac{1}{36} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{27}\pi\sqrt{3} \simeq 0{,}035$$

soit $n \in \mathbb{N}^*$

IV **Q1** $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x+x^2)^n} > 0$ et $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2n}}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}}\,dx$ converge $(2n>1)$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge ; I'_n existe.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g_n(x) = \dfrac{x}{(1+x+x^2)^n} \geq 0$ et $g_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{2n-1}}$

$2n-1 > 1 \Leftrightarrow n > 1$ ... $J'_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx$ converge ssi $\underline{n > 1}$ ou $n \geq 2$

De même K'_n converge ssi $2n-2 > 1$, c'est à dire si et seulement si $n \geq 2$.

Q2 $I'_1 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{3}}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

voir III Q1

$$\underline{\underline{I'_1 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}}} \quad (\simeq 1{,}209)$$

En reprenant le calcul de III Q2 on obtient :

$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \displaystyle\int_0^A \frac{1}{(1+x+x^2)^n}\,dx = \left[\frac{x}{(1+x+x^2)^n}\right]_0^A + 2n\int_0^A \frac{dx}{(1+x+x^2)^n} - \frac{n}{2}\left[\frac{(1+x+x^2)^{-n}}{-n}\right]_0^A - \frac{3n}{2}\int_0^A \frac{dx}{(1+x+x^2)^{n+1}}$

En faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient :

$$I'_n = 0 + 2n I'_n - \frac{1}{2} - \frac{3n}{2} I'_{n+1} \quad \text{soit} \quad \underline{\underline{I'_{n+1} = \frac{2(2n-1)}{3n} I'_n - \frac{1}{3n}}}$$

$\underline{\underline{I'_2}} = \dfrac{2}{3} I'_1 - \dfrac{1}{3} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{3} + \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{27}}} \simeq 0{,}473$

$\underline{\underline{I'_3}} = I'_2 - \dfrac{1}{6} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{27}}} \simeq 0{,}306$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. $2J'_n + I'_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x+1}{(1+x+x^2)^n}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{(1+x+x^2)^{-n+1}}{-n+1}\right]_0^A = \frac{1}{n-1}$

$$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \Rightarrow J'_n = -\frac{1}{2} I'_n + \frac{1}{2(n-1)}.}}$$

$\underline{\underline{J'_2}} = -\dfrac{1}{2} I'_2 + \dfrac{1}{2} = \underline{\underline{\dfrac{2}{3} - \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}}} \simeq 0{,}264$. $\underline{\underline{J'_3}} = -\dfrac{1}{2} I'_3 + \dfrac{1}{4} = \underline{\underline{\dfrac{1}{2} - \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}}} \simeq 0{,}097$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. $I'_n + J'_n + K'_n = I'_{n-1}$. $K'_n = I'_{n-1} - I'_n - J'_n = \dfrac{3(n-1)}{2(2n-3)}\left(I'_n + \dfrac{1}{3(n-1)}\right) - I'_n + \dfrac{1}{2} I'_n - \dfrac{1}{2(n-1)}$

$$\underline{\underline{K'_n = \frac{n}{2(2n-3)} I'_n - \frac{n-2}{2(2n-3)(n-1)}}}$$

$\underline{\underline{K'_2 = I'_2 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{27}}} \simeq 0{,}473$ et $\underline{\underline{K'_3}} = \dfrac{1}{2} I'_3 - \dfrac{1}{12} = \underline{\underline{-\dfrac{1}{3} + \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27}}} \simeq 0{,}070$.