

I Tests par tirages de paquets de circuits, avec remise.

Q1 a) Une partie de C ne contenant pas A est une partie de $\bar{A}$ et réciproquement !
 le nombre de parties de C ne contenant pas A est donc 2^{n-r} (car $\mathcal{P}(\bar{A}) = 2^{n-r}$
 car $\text{card } \bar{A} = n-r$).

b) Les parties de C contenant soit toutes d'elles par réunion de A avec une partie de $\bar{A}$
 plus précisément soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties de C contenant A . considérons
 $\varphi: \mathcal{P}(\bar{A}) \rightarrow \mathcal{S}$ et d'où que φ est bijective ; d'où $\mathcal{P}(\bar{A})$ et $\mathcal{S}$ sont
 $B \mapsto \varphi(B) = B \cup A$ équipotents ; par conséquent $\text{card } \mathcal{S} = \text{card } \mathcal{P}(\bar{A}) = 2^{n-r}$

finalment le nombre de parties contenant A est : 2^{n-r}

Q2 a) Les événements élémentaires sont équiprobables ; la probabilité que nous allons utiliser
 probabilité uniforme. Notons que posséder une application de $\mathcal{P}(C)$ dans $[0,1]$ donc
 une application de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C))$ dans $[0,1]$!

soit B une partie de C . $p(\{B\}) = \frac{1}{\text{card } \mathcal{P}(C)} = \frac{1}{2^n}$ ($\{B\}$ est un singleton dans $\mathcal{P}(C)$)

b) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des parties de C contenant A .
 la probabilité cherchée est : $\frac{\text{card } \mathcal{S}}{\text{card } \mathcal{P}(C)} = \frac{2^{n-r}}{2^n} = \frac{1}{2^r}$.

c) On cherche $p("c_j \in G \mid c_n \in G")$; soit : $\frac{p(c_j \in G \text{ et } c_n \in G)}{p(c_n \in G)}$.

$$p(c_n \in G) = p(\{c_n\} \subset G) = \frac{1}{2} \quad \text{d'après Q2 b (A = \{c_n\})} \quad p(c_j \in G \text{ et } c_n \in G) = p(\{c_j, c_n\} \subset G) = \frac{1}{2^2}$$

$$\text{Finalment } p("c_j \in G \mid c_n \in G") = \frac{1/2^2}{1/2} = \frac{1}{2}$$

si $j \in \{1, n-1\}$, la probabilité pour que c_j appartienne à G sachant que c_n appartient à G est : $\frac{1}{2}$

Q3 a) $p(c_j \in G_k) = p(c_j \in \bigcap_{k=1}^h G_k) = p(c_j \in G_1 \text{ et } c_j \in G_2 \text{ et } \dots \text{ et } c_j \in G_h) \stackrel{\text{indépendance des tirages}}{=} \prod_{k=1}^h p(c_j \in G_k)$

$$\forall k \in \{1, h\}, p(c_j \in G_k) = p(c_j \in G_k \text{ et } G_k = \theta_k) + p(c_j \in G_k \text{ et } G_k = \bar{\theta}_k)$$

$$\forall k \in \{1, h\}, p(c_j \in G_k) = p(c_j \in \theta_k \text{ et } c_n \in \theta_k) + p(c_j \in \bar{\theta}_k \text{ et } c_n \in \theta_k)$$

$$\forall k \in \{1, h\}, p(c_j \in G_k) = p(\{c_j, c_n\} \subset \theta_k) + p(\{c_j, c_n\} \subset \bar{\theta}_k) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Finalment } p(c_j \in \theta_k) = \prod_{k=1}^h \frac{1}{2} \cdot p(c_j \in \theta_k) = \frac{1}{2^h}$$

$$b) \quad p(E \cap D_k) = p\left(\bigcap_{k=1}^h (E \cap G_k)\right) = \prod_{k=1}^h p(E \cap G_k)$$

$$\forall k \in [1, h], p(E \cap G_k) = p(E \cap G_k \text{ et } G_k = B_k) + p(E \cap G_k \text{ et } G_k = \bar{B}_k)$$

$$\forall k \in [1, h], p(E \cap G_k) = p(E \cap B_k \text{ et } C_k \in B_k) + p(E \cap \bar{B}_k \text{ et } C_k \in \bar{B}_k)$$

$$\forall k \in [1, h], p(E \cap G_k) = p(E \cup \{C_k\} \cap B_k) + p(E \cup \{C_k\} \cap \bar{B}_k) = \frac{1}{2^{r+1}} + \frac{1}{2^{r+1}} = \frac{1}{2^r}$$

↑
E ∪ {C_k} a 2^r + 1 éléments

Finalment:
$$p(E \cap D_k) = \left(\frac{1}{2^r}\right)^h = \frac{1}{2^{r \times h}}$$

Soit J une partie non vide de [1, n-1]. Montrons que: $p\left(\bigcap_{j \in J} C_j \in D_k\right) = \prod_{j \in J} p(C_j \in D_k)$

$$p\left(\bigcap_{j \in J} C_j \in D_k\right) = p(\{C_j; j \in J\} \cap D_k) = \frac{1}{2^{\text{card } J \times h}}$$

b) $\text{card}(\{C_j; j \in J\}) = \text{card } J$

$$\prod_{j \in J} p(C_j \in D_k) = \prod_{j \in J} \frac{1}{2^h} = \left(\frac{1}{2^h}\right)^{\text{card } J} = \frac{1}{2^{\text{card } J \times h}}$$

Donc $p\left(\bigcap_{j \in J} C_j \in D_k\right) = \prod_{j \in J} p(C_j \in D_k)$ et ceci pour toute partie non vide de [1, n-1], par conséquent:

les événements $C_j \in D_k$ où $1 \leq j \leq n-1$ sont indépendants.

d'après le cours les événements complémentaires sont aussi indépendants.

Retrouvons ce dernier résultat directement. Soit J une partie non vide de [1, n-1]

$$\prod_{j \in J} p(C_j \notin D_k) = \prod_{j \in J} \left(1 - \frac{1}{2^h}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^h}\right)^{\text{card } J}$$

$$p\left(\bigcap_{j \in J} C_j \notin D_k\right) = 1 - p\left(\bigcup_{j \in J} \overline{C_j \notin D_k}\right) = 1 - p\left(\bigcup_{j \in J} C_j \in D_k\right) = 1 - \sum_{k=1}^{\text{card } J} (-1)^{k+1} \sum_{J_k \in \mathcal{G}_k(J)} p\left(\bigcap_{j \in J_k} C_j \in D_k\right)$$

Formule du crible !!
partie de J ayant k éléments

$$p\left(\bigcap_{j \in J} C_j \notin D_k\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\text{card } J} (-1)^k \sum_{J_k \in \mathcal{G}_k(J)} \left(\frac{1}{2^h}\right)^{\text{card } J_k}$$

$$p\left(\bigcap_{j \in J} C_j \notin D_k\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\text{card } J} (-1)^k \sum_{J_k \in \mathcal{G}_k(J)} \left(\frac{1}{2^h}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\text{card } J} (-1)^k \binom{\text{card } J}{k} \left(\frac{1}{2^h}\right)^k = \sum_{k=0}^{\text{card } J} \binom{\text{card } J}{k} \left(-\frac{1}{2^h}\right)^k$$

caractéristique de la somme et $\text{card } \mathcal{G}_k(J) = \binom{\text{card } J}{k}$!

Donc
$$p\left(\bigcap_{j \in J} C_j \notin D_k\right) = \left(1 - \frac{1}{2^h}\right)^{\text{card } J} = \prod_{j \in J} p(C_j \notin D_k)$$

Ceci achève de prouver que les événements $C_j \notin D_k$ où $j \in [1, n-1]$ sont indépendants !

d) $C_n \in D_k$ donc $p(D_k = \{C_n\}) = p\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} C_j \notin D_k\right) \underset{\text{indépendance}}{=} \prod_{j=1}^{n-1} p(C_j \notin D_k) = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - p(C_j \in D_k)\right) = \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^h}\right)$

Finalment:
$$p(D_k = \{C_n\}) = \left(1 - \frac{1}{2^h}\right)^{n-1}$$

Q1 a) soit à montrer que: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_{k-1} - a_k > 0$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_{k-1} - a_k) = 1$.

soit $k \in \mathbb{N}^*$. $a_{k-1} - a_k = (1 - \frac{1}{2^k})^{n-1} - (1 - \frac{1}{2^{k+1}})^{n-1} > 0$ car $\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^{k+1}} \dots$ et $n \geq 2$.

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^p (a_{k-1} - a_k) = a_0 - a_p = 1 - (1 - \frac{1}{2^p})^{n-1} = 1 - (1 - \frac{1}{2^p})^{n-1} = (1 - \frac{1}{2^p})^{n-1}$.

$\lim_{p \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{2^p})^{n-1} = 1$. Par conséquent la série de terme général $a_{k-1} - a_k$ est convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_{k-1} - a_k) = 1.$$

b) soit F la fonction de répartition de cette loi.

$$\forall x \in]-\infty, 1[, F(x) = 0$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [p, p+1[, F(x) = \sum_{k=1}^p (a_{k-1} - a_k) = a_0 - a_p = (1 - \frac{1}{2^p})^{n-1}$$

$$c) \forall x \in]-\infty, 1[, F(x) = 0 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [p, p+1[, F(x) = (1 - \frac{1}{2^p})^{n-1}.$$

Q2 a) soit $k \in \mathbb{N}^*$, $p(X_n \leq k) = p(D_k = 1(n)) = (1 - \frac{1}{2^k})^{n-1} \dots$ ce qui vaut car pour $k=0$.

Expliquons! Notons le fait que les événements $X_n \leq k$ et $D_k = 1(n)$ sont égaux

car pour cela que si $i \in [1, k]$, $D_i = 1(n)$ donne nécessairement $D_k = 1(n)$

car si $X_n \leq k$, $D_i = 1(n)$ a été atteint pour la première fois pour $i \in [1, k]$ donc $D_k = 1(n)$

Réciproquement si $D_k = 1(n)$, $D_i = 1(n)$ a été atteint pour la première fois pour $i \in [1, k]$ et donc $X_n \leq k$.

b) soit à montrer que: $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X_n = k) = a_{k-1} - a_k$.

$$\text{soit } k \in \mathbb{N}^* \text{ (cas 1)}. p(X_n = k) = p(X_n \leq k) - p(X_n \leq k-1) = (1 - \frac{1}{2^k})^{n-1} - (1 - \frac{1}{2^{k-1}})^{n-1}$$

$$p(X_n = k) = (1 - (1 - \frac{1}{2^{k-1}})^{n-1}) - (1 - (1 - \frac{1}{2^k})^{n-1}) = a_{k-1} - a_k$$

$$p(X_n = 1) = p(X_n \leq 1) = (1 - \frac{1}{2^1})^{n-1} = (1 - (1 - \frac{1}{2^0})^{n-1}) - (1 - (1 - \frac{1}{2^1})^{n-1}) = a_0 - a_1$$

$$\text{Finalement: } \forall k \in \mathbb{N}^*, p(X_n = k) = a_{k-1} - a_k$$

Remarque.. Noter que: $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = p(X_n > k)$; la dernière condition indique

donc que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(X_n = k) = p(X_n > k-1) - p(X_n > k)$ ce qui n'est pas nouveau.

Q3 a) soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall k \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^k}$. la série de terme général $\frac{1}{2^k}$ est convergente et en est de même pour la série de terme général $\frac{1}{2^{k+1}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 1 - (1 - \frac{1}{2^k})^{n-1} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-\frac{1}{2^k})^i = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{2^{ik}}$ (4)
 pour $i=0$: $\binom{n-1}{0} (-1)^{0-1} = 1$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, la série de terme général $\frac{1}{2^{ik}}$ est convergente donc celle de terme général $\binom{n-1}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{2^{ik}}$ aussi. — somme finie d'un nombre

La série de T.O. $a_k = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{2^{ik}}$ aussi !

Remarque... 1. On pouvait aussi remarquer que $a_k \sim (n-1) \frac{1}{2^k}$ 2. $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^{i-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (\frac{1}{2^i})^k$
 $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{1 - (\frac{1}{2^i})}$

b) C'est au cours !!

a... X est une v.a.r. telle que $X(n) \in \mathbb{N}$. En) existe mi la p.r. de T.G. $p(X > k)$ converge.

On a alors $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X > k)$! Qu'on se le dise... et redire !

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^q p(X_n = k) = \sum_{k=1}^q k(a_k - a_{k-1}) = \sum_{k=1}^q k a_k - \sum_{k=1}^q k a_{k-1} = \sum_{k=0}^{q-1} (k+1) a_k - \sum_{k=1}^q k a_k$

$\sum_{k=1}^q k p(X_n = k) = \sum_{k=0}^{q-1} k a_k - \sum_{k=1}^q k a_k + \sum_{k=0}^{q-1} a_k = \sum_{k=0}^{q-1} a_k - q a_q$

Il ne reste plus qu'à montrer que : $\lim_{q \rightarrow +\infty} q a_q = 0$

$q a_q = \dots = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-1)^{i-1} \frac{q}{2^{iq}}$
 va plus haut !

$0 \leq \frac{q}{2^{iq}} \leq \frac{q}{2^q}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $\lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{q}{2^q} = 0$ donc $\lim_{q \rightarrow +\infty} q a_q = 0$ (comme limite

de la somme de $(n-1)$ termes qui convergent vers 0)

$\lim_{q \rightarrow +\infty} (\sum_{k=0}^{q-1} a_k - q a_q) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ car la p.r. de terme général a_k est convergente.

Donc $\lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^q k p(X_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k$. Ce qui prouve que la p.r. de terme général

$k p(X_n = k)$ est convergente donc absolument convergente ($k p(X_n = k) \geq 0$) et que

$\sum_{k=1}^{+\infty} k p(X_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k$.

ii) $E(X_n)$ existe et $E(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} k a_k$.

(Q4) 0) $p \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in \mathbb{R}$, $f_p(t) = 1 - (1 - e^{-t})^p = 1 - \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k e^{-kt} = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^{k+1} e^{-kt}$

La convergence de $\int_0^{+\infty} f_p(t) dt$ résulte de la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-kt} dt$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$

Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^x e^{-kt} dt = \left[\frac{e^{-kt}}{-k} \right]_0^x = \frac{1}{k} - \frac{e^{-kx}}{k}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-kt} dt = \frac{1}{k}$.

ceci assure donc la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et donc de $\int_0^{+\infty} f_p(t) dt$ ⑤

notons encore que: $\int_0^{+\infty} f_p(t) dt = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

cl. $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $I_p = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+$, $f_{p+1}(t) - f_p(t) = (1-e^{-t})^p \cdot (1-e^{-t})^{p+1} = (1-e^{-t})^p e^{-t}$.

Par conséquent $t \mapsto \frac{1}{p+1} (1-e^{-t})^{p+1}$ est une primitive de $f_{p+1} - f_p$ sur $\mathbb{R}_+$.

Donc $I_{p+1} - I_p = \int_0^{+\infty} (f_{p+1}(t) - f_p(t)) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{p+1} (1-e^{-x})^{p+1} - \frac{1}{p+1} (1-e^{-0})^{p+1} \right]$

Donc $I_{p+1} - I_p = \frac{1}{p+1}$.

doit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 3$.

$I_{n-1} = \sum_{p=1}^{n-2} (I_{p+1} - I_p) + I_1 = \sum_{p=1}^{n-2} \frac{1}{p+1} + I_1$. $I_1 = \sum_{k=2}^1 \binom{1}{k} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1$.

Donc $I_{n-1} = \sum_{p=1}^{n-2} \frac{1}{p+1} + 1 = \sum_{p=0}^{n-2} \frac{1}{p+1} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$

cette formule vaut aussi pour $n=2$ car $I_1 = 1$.

cl. $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $I_{n-1} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$

c) B'et donc! $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$!! ce qui donne $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \sim \ln(n-1) \sim \ln n$

$t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

$\forall t \in [n, n+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{n}$; par conséquent: $\int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{(n+1)-n}{n} = \frac{1}{n}$.

$\forall t \in [n-1, n]$, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{n}$; par conséquent: $\int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt \geq \frac{1}{n}$.

Finalement: $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t}$; notons que l'inégalité de gauche vaut pour $n=1$

soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$. $\sum_{m=1}^{n-1} \int_m^{m+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}$; $\int_1^n \frac{dt}{t} \leq I_{n-1}$; $\ln n \leq I_{n-1}$

$\sum_{m=2}^{n-1} \frac{1}{m} \leq \sum_{m=2}^{n-1} \int_{m-1}^m \frac{dt}{t} = \int_1^{n-1} \frac{dt}{t} = \ln(n-1)$; $I_{n-1} - 1 \leq \ln(n-1)$

Donc $\ln n \leq I_{n-1} \leq \ln(n-1) + 1$; ceci vaut aussi pour $n=2$ ($I_1=1$)

Finalement: $\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $\ln n \leq I_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$

$\forall n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n-1)}{\ln n} = \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln n + \ln(1-\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{1}{\ln n} [1 + \ln(1-\frac{1}{n})]$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln n} [1 + \ln(1-\frac{1}{n})] \right) = 1$. Par encadrement: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n-1}}{\ln n} = 1$. $I_{n-1} \sim \ln n$

Rappel... $(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n)_{n \geq 1}$ converge vers c où c est la constante d'Euler (6)

d) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

q_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall u \in \mathbb{R}_+, q'_n(u) = -(n-1) \cdot (-\ln u) \cdot (1 - \frac{1}{2^u})^{\frac{n-2}{2}} \times \frac{1}{2^u}$

$\forall u \in \mathbb{R}_+, q'_n(u) = -(n-1) \ln u \cdot (1 - \frac{1}{2^u})^{\frac{n-2}{2}} \leq 0$. q_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. q_n est décroissante sur $[k-1, k]$ donc $q_n(k) / n(k - (k-1)) \leq \int_{k-1}^k q_n(u) du \leq q_n(k-1) \cdot (k - (k-1))$.

$$\text{Donc } q_n(k) \leq \int_{k-1}^k q_n(u) du \leq q_n(k-1)$$

$$\text{Finalement : } \forall k \in \mathbb{N}^*, a_k \leq \int_{k-1}^k q_n(u) du \leq a_{k-1} \quad (\forall i \in \mathbb{N}, q_n(i) = a_i)$$

e) Soit $q \in \mathbb{N}$ et $q \geq 2$.

$$\sum_{k=1}^q a_k \leq \sum_{k=1}^q \int_{k-1}^k q_n(u) du = \int_0^q q_n(u) du \leq \sum_{k=1}^q a_{k-1} = \sum_{k=0}^{q-1} a_k$$

$$\text{Donc } \sum_{k=1}^q a_k \leq \int_0^q q_n(u) du \leq \sum_{k=0}^{q-1} a_k$$

$$\int_0^q q_n(u) du = \int_0^q \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2^u} \right)^{n-1} \right] du = \int_{t=0}^{q \ln 2} \left[1 - (1 - e^{-t})^{n-1} \right] \frac{dt}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} I_{n-1}(q \ln 2)$$

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} (q \ln 2) = +\infty \text{ donc } \lim_{q \rightarrow +\infty} \int_0^q q_n(u) du = \frac{1}{\ln 2} I_{n-1} ; \text{ de plus}$$

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^q a_k = \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{q-1} a_k = E(X_n) ; \quad \lim_{q \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^q a_k = E(X_n) - a_0 = E(X_n) - 1$$

Pour conclure l'équation précédente donc, on fait tendre q vers $+\infty$:

$$E(X_n) - 1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leq E(X_n).$$

$$\text{f) } \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leq E(X_n) \leq \frac{I_{n-1}}{\ln 2} + 1 \quad \text{ou avec c) : } \frac{\ln n}{\ln 2} \leq E(X_n) \leq \frac{1 + \ln(n-1)}{\ln 2} + 1$$

$$\text{h) donc } \frac{I_{n-1}}{\ln n} \leq \frac{\ln 2 E(X_n)}{\ln n} \leq \frac{I_{n-1}}{\ln n} + \frac{\ln 2}{\ln n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n-1}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{I_{n-1}}{\ln n} + \frac{\ln 2}{\ln n} \right) = 1 \quad (I_{n-1} \sim \ln n \text{ d'après c)})$$

$$\text{Pour conclure : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2 E(X_n)}{\ln n} = 1 ; \quad E(X_n) \sim \frac{\ln n}{\ln 2}$$

(95) g) $Y_n(X) = [1, n]$. " $\forall k \in [1, n]$, $p(Y=k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$ " (cela n'est ni mieux !)

$$Y_n \subset U(n).$$

$$\text{h) } E(Y_n) = \frac{n+1}{2}.$$

Notamment de suite que : $E(Y_n) \sim \frac{n}{2}$ et $E(X_n) \sim \frac{\ln n}{\ln 2}$.

(96) a)

$$\frac{E(X_n)}{E(Y_n)} \sim \frac{\ln n}{\ln 2} \times \frac{2}{n} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(X_n)}{E(Y_n)} = 0$$

(7)

b) Pour $n = 100$: $E(Y_n) = 50,5$.

$$7,4693 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leq 7,4694 \quad \text{donc : } \underline{\underline{7,4693 \leq E(X_n) \leq 7,4694}}$$

Pour $n = 1000$: $E(Y_n) = 500,5$

$$10,7978 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leq 10,7979 \quad \text{donc : } \underline{\underline{10,7978 \leq E(X_n) \leq 10,7979}}$$

$$(I_{99} \approx 5,177377518 ; \frac{I_{99}}{\ln 2} \approx 7,469376810 ; I_{999} \approx 7,484470861 ;$$

$$\frac{I_{999}}{\ln 2} \approx 10,797808990 ; \text{ notons que } \frac{\ln 100}{\ln 2} \approx 6,6439 \text{ et } \frac{\ln 1000}{\ln 2} \approx 9,9658$$

La méthode 1 est donc très supérieure à la méthode 2.

Informatique - Objectifs : 1. minimiser la détection de la panne

2. Reconnaître pour la détection, faire la moyenne du nombre de tests nécessaires pour détecter la panne. Comparer cette moyenne à $E(X_n)$.

Le programme : 1. demande la valeur de n à l'utilisateur ($n \geq 1$);

2. demande le nombre p de "détecteurs";

3. $\mathcal{K}$ doit fournir : a) une valeur approchée de $E(X_n)$

b) le nombre de tests nécessaires;

pour détecter la panne, à chaque détection c) la moyenne de résultats précédents.

```

program HEC86V1;
var n,i,c,h,b,x:integer;
var a:array[1..999] of integer;
begin
  clrscr;randomize;

  repeat
    write('Donnez le nombre n de circuits (2<=n<=1000) ');readln(n);writeln;
  until (n>1) and (n<1001);

  for i:=1 to n do a[i]:=1;
  c:=n-1;h:=0;

  repeat
    h:=h+1;i:=0; write('la partie D',h,' contient');

    repeat
      b:=random(2);
      i:=i+1;
      if a[i]=1
      then
        begin
          x:=random(2);
          if ((b=1) and (x=0)) or ((b=0) and (x=1))
          then
            begin
              a[i]:=0;c:=c-1;
            end;
          end;
        until ((i>=n-1) or (c=0));writeln(' ',c+1:3,' élément(s)');
      until c=0;
      write('Le nombre de tests pour detecter la panne est : ',h);

    end.

```

 Donnez le nombre n de circuits (2<=n<=1000) 1000

```

la partie D1 contient 508 élément(s)
la partie D2 contient 240 élément(s)
la partie D3 contient 113 élément(s)
la partie D4 contient 58 élément(s)
la partie D5 contient 34 élément(s)
la partie D6 contient 20 élément(s)
la partie D7 contient 9 élément(s)
la partie D8 contient 5 élément(s)
la partie D9 contient 2 élément(s)
la partie D10 contient 1 élément(s)
Le nombre de tests pour detecter la panne est : 10
>

```

Donnez le nombre n de circuits (2<=n<=1000) 500

```

la partie D1 contient 240 élément(s)
la partie D2 contient 124 élément(s)
la partie D3 contient 54 élément(s)
la partie D4 contient 26 élément(s)
la partie D5 contient 11 élément(s)
la partie D6 contient 6 élément(s)
la partie D7 contient 4 élément(s)
la partie D8 contient 1 élément(s)
Le nombre de tests pour detecter la panne est : 8

```



```

program HEC86V2;

var n,i,c,h,h1,b,x,t,u:integer;e,e1,y,z,p:real;
var a:array[1..999] of integer;

begin
  clrscr;randomize;

  repeat
    write('Donnez le nombre n de circuits (2<=n<=1000) ');readln(n);
  until (n>1) and (n<1001);

    write('Combien de fois voulez vous recommencer la detection ');read(t);
    u:=0;clrscr;h1:=0;
    repeat

u:=u+1;
for i:=1 to n do a[i]:=1;
c:=n-1;h:=0;

    repeat
      h:=h+1;i:=0;

        repeat
          b:=random(2);
          i:=i+1;
          if a[i]=1
            then
              begin
                x:=random(2);
                if ((b=1) and (x=0)) or ((b=0) and (x=1))
                  then
                    begin
                      a[i]:=0;c:=c-1;
                    end;
                end;
            until ((i>=n-1) or (c=0));
          until c=0;
          h1:=h1+n;
        until u>=t;
        writeln('Il y a ',n,' circuits ');
        writeln('Nous avons recommencé ',t,' fois la detection');
        writeln('Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est :',h1/t:3:7);

e1:=1;y:=1;
    repeat
      e:=e1;
      y:=0.5*y;z:=1-y;p:=1;
      for i:=1 to n-1 do p:=p*z;
      e1:=e+1-p;
    until abs(e1-e)<exp(-8*ln(10));
    writeln('Pour mémoire l''espérance est sensiblement : ',e1:3:9);

end.

```

Il y a 100 circuits

Nous avons recommencé 10 fois la détection

Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est : 8.0000000

Pour mémoire l'espérance est sensiblement : 7.969374524

Il y a 100 circuits

Nous avons recommencé 100 fois la détection

Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est : 7.6600000

Pour mémoire l'espérance est sensiblement : 7.969374524

Il y a 100 circuits

Nous avons recommencé 500 fois la détection

Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est : 8.2980000

Pour mémoire l'espérance est sensiblement : 7.969374524

Il y a 1000 circuits

Nous avons recommencé 10 fois la détection

Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est : 11.4000000

Pour mémoire l'espérance est sensiblement : 11.297809991

Il y a 1000 circuits

Nous avons recommencé 100 fois la détection

Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est : 11.3400000

Pour mémoire l'espérance est sensiblement : 11.297809991

Il y a 1000 circuits

Nous avons recommencé 1000 fois la détection

Le nombre moyen de tests pour détecter la panne est : 11.3890000

Pour mémoire l'espérance est sensiblement : 11.297809991