

PARTIE I

Q1.. $\pi^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\pi^3 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\pi^4 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

donc $4\pi^4 - 2\pi^3 - \pi^2 - \pi = \frac{1}{4} (16\pi^4 - 8\pi^3 - 4\pi^2 - 4\pi) = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 5 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 0!$

Q2.. $N^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$N^3 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$; $N^4 = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 16 \end{bmatrix}$

donc $8N^4 - 12N^3 + 2N^2 + N + I_4 = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 16 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 12 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$

$= 0!$ (vérifié à la main).

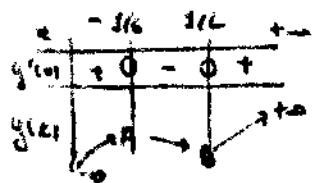
PARTIE II

Q1

a) y est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = 24x^2 - 8x - 2 = 24(x - 1/6)(x + 1/6)$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty$



$A = y(-1/6) = -12/27$; la courbe représentative de y admet en $+\infty$ et $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (x/y) .

b) y est croissante sur $]-\infty, -1/6]$ et $y(-1/6) < 0$; donc $\forall x \in]-\infty, -1/6]$, $y(x) < 0$
 y est décroissante sur $]1/6, +\infty[$ et $y(1/6) < 0$; donc $\forall x \in]1/6, +\infty[$, $y(x) < 0$

y ne s'annule donc pas sur $]-\infty, 1/6[$.

y est continue et strictement croissante sur $[1/6, +\infty[$. y définit une bijection de $[1/6, +\infty[$ sur l'intervalle $y([1/6, +\infty[) = [B, +\infty[= [-2, +\infty[$.

$0 \in y([1/6, +\infty[)$ donc $\exists! r \in [1/6, +\infty[$ tel que : $y(r) = 0$.

$r = \frac{1}{6} \left[\sqrt[3]{19 + \sqrt{29}} + \sqrt[3]{19 - \sqrt{29}} + 1 \right]$ ok?

Finalement l'équation $x \in \mathbb{R}$ et $y(x) = 0$ admet une solution et une seule : r .

Remarque... $r \approx 0,919643377$ (dichotomie machine). Exercice... trouver une valeur exacte de r (... l'ordonnée). Voir à la fin

Q2) $y(1) = 3$ et $y'(1) = 14$.

$y = 34(x-1) + 3 = 14x - 13$ est une équation de la tangente à Γ_y au point d'abscisse 1.

Cette tangente coupe $(x'x)$ au point d'abscisse $p = \frac{13}{14}$.

$$y(f) = \frac{2+f}{143} = \frac{24}{143} = \frac{24}{243} > 0 \quad y(-0,01) = \frac{2-0,01}{14} \text{ et } y(f-0,01) = -\frac{2-0,01}{14} < 0$$

Adonc $y(f)y(f-0,01) < 0$; par conséquent: $f-0,01 < r < f$. $\frac{2-0,01}{14} < r < \frac{24}{14}$.

Ceci constitue un encadrement de r d'amplitude 0,01 !

Q3 a) soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x-r)(8x^2 + ax + \frac{1}{r})$$

$$8x^3 - 4x^2 - 2x - 1 = (x-r)(8x^2 + ax + \frac{1}{r})$$

$$8x^3 - 4x^2 - 2x - 1 = 8x^3 + (a-8r)x^2 + (\frac{1}{r}-ar)x - 1$$

$$\begin{cases} -4 = a-8r \\ -2 = \frac{1}{r} - ar \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8r-4 \\ -2 = \frac{1}{r} - r(8r-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8r-4 \\ 8r^3 - 4r^2 - 2r - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 8r-4$$

Donc $\exists ! a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = (x-r)(8x^2 + ax + \frac{1}{r})$; $a = 8r-4$.

b) g a un zéro réel et un nul, donc $8x^2 + ax + \frac{1}{r}$ n'a pas de zéro dans $\mathbb{R}$ et a donc dans $\mathbb{C}$ deux zéros conjugués: δ et $\bar{\delta}$.

Donc l'équation $x \in \mathbb{C}$ et $g(x) = 0$ admet trois solutions: une réelle r et deux complexes et conjugués: δ et $\bar{\delta}$.

$$\delta \bar{\delta} = \frac{1}{8r} \quad (\text{et } \delta + \bar{\delta} = -\frac{a}{8}) \quad \text{car } \delta \text{ et } \bar{\delta} \text{ sont les zéros de } 8x^2 + ax + \frac{1}{r}.$$

Par conséquent: $|g| = \frac{1}{8r} = \frac{1}{2r^2 \sqrt{r}}$

Pour montrer que $|g| < r$ il suffit de montrer que $\frac{1}{2r^2 \sqrt{r}} < r$ c'est à dire que: $(\frac{1}{r^2})^3 < (2\sqrt{r})^3$ doit donc à montrer que: $\sqrt{r} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ c'est à dire que $r > 1/2$ ce qui est clair d'après Q3 b) ou Q2 b).

Q4 a) Notons plus simplement que n est un zéro de $8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$ alors $(e^n)_{n \geq 1} \in E$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 8e^{n+3} - 4e^{n+2} - 2e^{n+1} - e^n = e^n (8e^3 - 4e^2 - 2e - 1) = 0 \quad \text{car } e \text{ est zéro de } 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, 8e^{n+3} = 4e^{n+2} + 2e^{n+1} + e^n; (e^n)_{n \geq 1} \in E$$

Et par conséquent: $(r^n)_{n \geq 1}, (\delta^n)_{n \geq 1}$ et $(\bar{\delta}^n)_{n \geq 1}$ sont des éléments de E car r, δ et $\bar{\delta}$ sont des (au les!) zéros de $8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$.

b) * Voir l'équation et l'initiale de la relation précédente. Notons que: $\alpha = \frac{1}{8r^3 + 4r^2 + 1}$

$$8(\alpha r^3 + \beta \delta^3 + \gamma \bar{\delta}^3) - 4(\alpha r^2 + \beta \delta^2 + \gamma \bar{\delta}^2) - 2(\alpha r + \beta \delta + \gamma \bar{\delta}) = 1 \quad (8\alpha \frac{1}{8} - 4\alpha 0 - 2\alpha 0 = 1)$$

$$2(8r^3 - 4r^2 - 2r - 1) + \beta(8\delta^3 - 4\delta^2 - 2\delta - 1) + \gamma(8\bar{\delta}^3 - 4\bar{\delta}^2 - 2\bar{\delta} - 1) = 1$$

r, β et $\bar{\beta}$ étant des racines de $8x^3 - 4x^2 - 6x + 1$ m.d.t.c. : $\alpha + \beta + \bar{\beta} = 1$ ($8r^3 - 4r^2 - 6r + 1 = 0, \dots$)

Notons par ailleurs que : $8\beta^2 + 4\beta + \frac{1}{\beta} = 8\bar{\beta}^2 + 4\bar{\beta} + \frac{1}{\bar{\beta}}$ et que :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \bar{\beta} = 1 \\ \alpha r + \beta \beta + \bar{\beta} \bar{\beta} = 0 \\ \alpha r^2 + \beta \beta^2 + \bar{\beta} \bar{\beta}^2 = 0 \end{cases}$$

En multipliant respectivement ces trois équations par

$1/r, \alpha$ et 8 m.d.t.c. alors : $\alpha(\frac{1}{\beta} + 4\beta + 8\beta^2) = 1/r$

C'est à dire : $\alpha = \frac{1}{8r^3 + 4r^2 + 1}$... il est aisé de prouver que : $\beta = \frac{r\bar{\beta}}{(\beta-r)(\beta-\bar{\beta})}$ et $\bar{\beta} = \frac{r\beta}{(\bar{\beta}-r)(\bar{\beta}-\beta)}$

* Montrons que le système proposé admet une solution et une seule (ce n'est pas demandé mais le type semble admettre implicitement ce résultat !)

Il suffit de montrer que la matrice $\begin{bmatrix} r & \beta & \bar{\beta} \\ r^2 & \beta^2 & \bar{\beta}^2 \\ r^3 & \beta^3 & \bar{\beta}^3 \end{bmatrix}$ est inversible (le système est alors Cramer.)

$$\begin{bmatrix} r & \beta & \bar{\beta} \\ 0 & \beta(\beta-r) & \bar{\beta}(\bar{\beta}-r) \\ 0 & \beta(\beta-r)(\beta+r) & \bar{\beta}(\bar{\beta}-r)(\bar{\beta}+r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & \beta & \bar{\beta} \\ 0 & \beta(\beta-r) & \bar{\beta}(\bar{\beta}-r) \\ 0 & 0 & \beta(\bar{\beta}-r)(\bar{\beta}+r-\beta-r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & \beta & \bar{\beta} \\ 0 & \beta(\beta-r) & \bar{\beta}(\bar{\beta}-r) \\ 0 & 0 & \beta(\bar{\beta}-r)(\bar{\beta}-\beta) \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - rL_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - r^2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - (\beta+r)L_2 \quad (\Delta \beta(\bar{\beta}-r)(\bar{\beta}+r) - \beta(\bar{\beta}-r)(\beta+r) = \beta(\bar{\beta}-r)(\bar{\beta}+\beta-r))$$

La matrice initiale est inversible si et seulement si : $r \neq 0, \beta(\beta-r) \neq 0, \bar{\beta}(\bar{\beta}-r)(\bar{\beta}-\beta) \neq 0$; ce qui est clair car r, β et $\bar{\beta}$ sont deux à deux distincts et non nuls.

Ceci achève donc de prouver que le système admet une solution et une seule que nous noterons $(\alpha, \beta, \bar{\beta})$. Ce qui précède montre que : $\alpha = \frac{1}{8r^3 + 4r^2 + 1}$. Notons que $\bar{\beta} = \bar{\beta}$.

$$\begin{cases} \alpha r + \beta \beta + \bar{\beta} \bar{\beta} = 0 \\ \alpha r^2 + \beta \beta^2 + \bar{\beta} \bar{\beta}^2 = 0 \\ \alpha r^3 + \beta \beta^3 + \bar{\beta} \bar{\beta}^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \bar{\alpha} r + \bar{\beta} \bar{\beta} + \bar{\bar{\beta}} \bar{\bar{\beta}} = 0 \\ \bar{\alpha} r^2 + \bar{\beta} \bar{\beta}^2 + \bar{\bar{\beta}} \bar{\bar{\beta}}^2 = 0 \\ \bar{\alpha} r^3 + \bar{\beta} \bar{\beta}^3 + \bar{\bar{\beta}} \bar{\bar{\beta}}^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \text{ par conjugaison. Ce } \alpha = \bar{\alpha} ; \text{ par}$$

unicité : $\begin{cases} \alpha r + \bar{\beta} \bar{\beta} + \bar{\beta} \bar{\beta} = 0 \\ \alpha r^2 + \bar{\beta} \bar{\beta}^2 + \bar{\beta} \bar{\beta}^2 = 0 \\ \alpha r^3 + \bar{\beta} \bar{\beta}^3 + \bar{\beta} \bar{\beta}^3 = 1/8. \end{cases}$; $(\alpha, \bar{\beta}, \bar{\beta})$ est aussi solution et donc : $(\alpha, \bar{\beta}, \bar{\beta}) = (\alpha, \beta, \bar{\beta})$ (unicité de la solution)

Par conséquent : $\bar{\beta} = \beta$ et $\bar{\beta} = \bar{\beta}$. $\bar{\beta} = \bar{\beta}$

c) Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 3 que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = \alpha r^n + \beta \beta^n + \bar{\beta} \bar{\beta}^n \text{ c'est à dire que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = \alpha r^n + \beta \beta^n + \bar{\beta} \bar{\beta}^n$$

La propriété est vraie pour $n=0, 1$ et 2 car $q_0 = q_1 = 0, q_2 = \frac{1}{8}$ et

$$\begin{cases} \alpha r + \beta \beta + \bar{\beta} \bar{\beta} = 0 \\ \alpha r^2 + \beta \beta^2 + \bar{\beta} \bar{\beta}^2 = 0 \\ \alpha r^3 + \beta \beta^3 + \bar{\beta} \bar{\beta}^3 = 1/8 \end{cases}$$

- Supposons la propriété vraie pour $n, n+1$ et $n+2$ ($n \in \mathbb{N}^*$), montrons la pour $n+3$.

$$\begin{aligned} 8q_{n+3} &= 4q_{n+2} + 2q_{n+1} + q_n \\ 8q_{n+2} &= 4(\alpha r^{n+1} + \beta z^{n+1} + \gamma \bar{z}^{n+1}) + 2(\alpha r^n + \beta z^n + \gamma \bar{z}^n) + (\alpha r^{n-1} + \beta z^{n-1} + \gamma \bar{z}^{n-1}) \quad (H.A) \\ 8q_{n+3} &= 4(\alpha r^{n+2} + 2r^{n+1} + r^n) + \beta(4z^{n+2} + 2z^{n+1} + z^n) + \gamma(4\bar{z}^{n+2} + 2\bar{z}^{n+1} + \bar{z}^n) \\ 8q_{n+3} &= \alpha 8r^{n+2} + \beta 8z^{n+2} + \gamma 8\bar{z}^{n+2} \text{ car } (r^n)_{n \geq 1}, (z^n)_{n \geq 1} \text{ et } (\bar{z}^n)_{n \geq 1} \text{ sont dans } \mathbb{C} \\ q_{n+3} &= \alpha r^{n+2} + \beta z^{n+2} + \gamma \bar{z}^{n+2} \dots \text{ ce qui achève la récurrence.} \end{aligned}$$

montrons que: $|q_n - \alpha r^n| \leq \frac{2|\beta|}{(8r)^{n/2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{8r} |w| \leq |w|$ pour $w \in \mathbb{C}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $|q_n - \alpha r^n| = |\beta z^n + \gamma \bar{z}^n| = |\beta z^n + \bar{\beta} \bar{z}^n| = |2 \operatorname{Re}(\beta z^n)| \leq 2|\beta z^n| = 2|\beta| |z|^n$

Or $|z| = \frac{1}{\sqrt{8r}}$; par conséquent: $|q_n - \alpha r^n| \leq \frac{2|\beta|}{(\sqrt{8r})^n} = \frac{2|\beta|}{(8r)^{n/2}}$ - q.t.d.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $q_n = \alpha r^n + \beta z^n + \gamma \bar{z}^n$
 $\frac{q_n}{r^n} = \alpha + \beta \left(\frac{z}{r}\right)^n + \gamma \left(\frac{\bar{z}}{r}\right)^n$

$\left|\frac{z}{r}\right| = \frac{|z|}{r} < 1$ et $\left|\frac{\bar{z}}{r}\right| = \frac{|\bar{z}|}{r} = \frac{|z|}{r} < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_n}{r^n} = \alpha$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{z}{r}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\bar{z}}{r}\right)^n = 0$

Par conséquent: $q_n \sim \alpha r^n$.

$\frac{q_{n+1}}{q_n} \sim \frac{\alpha r^{n+1}}{\alpha r^n} = r$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = r$.

Remarque... Ceci montre que les récurrences linéaires d'ordre p sont au niveau des équations de degré p ... et non pas le contraire... en général!

(Q5) a) Programme calculant $q_4, q_5, \dots, q_N$ <pre> ? → N : 0 → A : 0 → B : 8 → C : N - 3 → N Lb1 0 8 ← (4C + 2B + A) → D A B → A : C → B : 0 → C Ds2 N : Goto 0 "FIN"</pre>	<table border="0"> <tr> <td>$q_4 = 0,062500$</td> <td>$q_{11} = 0,039551$</td> </tr> <tr> <td>$q_5 = 0,062500$</td> <td>$q_{12} \approx 0,036377$</td> </tr> <tr> <td>$q_6 = 0,062500$</td> <td>$q_{13} \approx 0,033447$</td> </tr> <tr> <td>$q_7 \approx 0,054588$</td> <td>$q_{14} \approx 0,030762$</td> </tr> <tr> <td>$q_8 \approx 0,050781$</td> <td>$q_{15} \approx 0,028290$</td> </tr> <tr> <td>$q_9 \approx 0,046875$</td> <td></td> </tr> <tr> <td>$q_{10} \approx 0,042969$</td> <td></td> </tr> </table>	$q_4 = 0,062500$	$q_{11} = 0,039551$	$q_5 = 0,062500$	$q_{12} \approx 0,036377$	$q_6 = 0,062500$	$q_{13} \approx 0,033447$	$q_7 \approx 0,054588$	$q_{14} \approx 0,030762$	$q_8 \approx 0,050781$	$q_{15} \approx 0,028290$	$q_9 \approx 0,046875$		$q_{10} \approx 0,042969$	
$q_4 = 0,062500$	$q_{11} = 0,039551$														
$q_5 = 0,062500$	$q_{12} \approx 0,036377$														
$q_6 = 0,062500$	$q_{13} \approx 0,033447$														
$q_7 \approx 0,054588$	$q_{14} \approx 0,030762$														
$q_8 \approx 0,050781$	$q_{15} \approx 0,028290$														
$q_9 \approx 0,046875$															
$q_{10} \approx 0,042969$															

Pour $\frac{q_{n+1}}{q_n}$, changez $N-3 \rightarrow N$ en $N-2 \rightarrow N$ et
 $8 \leftarrow (4C + 2B + A) \rightarrow D$ en $8 \leftarrow (4C + 2B + A) \rightarrow D : D/C$

Voir à la fin un programme en TP4

Pour $w_k = \frac{q_k}{4k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 3$

$$\begin{array}{lll} w_3 = 0,5000 & w_8 \approx 0,9233 & w_{13} \approx 0,9397 \\ w_4 = 1 & w_9 \approx 0,9364 & w_{14} \approx 0,9396 \\ w_5 = 1 & w_{10} \approx 0,9205 & w_{15} \approx 0,9196 \quad (\approx 0,919 \quad 633 \quad 225) \\ w_6 \approx 0,8750 & w_{11} \approx 0,9198 & \\ w_7 \approx 0,9286 & w_{12} \approx 0,9395 & \end{array}$$

b) Utilisons donc la dichotomie.

ce qui précède nous a permis de calculer $g(0,9197)$ et $g(0,9396)$.

$$g(0,9197) \approx 0,000619547 \quad \text{et} \quad g(0,9396) \approx -0,00044548$$

Par conséquent : $g(0,9197) \wedge g(0,9396) < 0$; $0,9196 < r < 0,9197$

PARTIE III

A

$$\textcircled{91} \quad p(Y_{n+1}=0) = p(Y_{n+1}=0/Y_n=0)p(Y_n=0) + p(Y_{n+1}=0/Y_n=1)p(Y_n=1) + p(Y_{n+1}=0/Y_n=2)p(Y_n=2) + p(Y_{n+1}=0/Y_n=3)p(Y_n=3)$$

$$\underline{p(Y_{n+1}=0)} = \frac{1}{2} (p(Y_n=0) + p(Y_n=3) + p(Y_n=2) + p(Y_n=3)) \quad (\dots \text{on doit chasser la pile au rang } n+1!)$$

$$p(Y_{n+1}=1) = \sum_{j=0}^3 p(Y_{n+1}=1/Y_n=j) = \frac{1}{2} p(Y_n=0) + 0 \cdot p(Y_n=1) + 0 \cdot p(Y_n=2) + \frac{1}{2} p(Y_n=3)$$

$$\underline{p(Y_{n+1}=3)} = \frac{1}{2} p(Y_n=0) + \frac{1}{2} p(Y_n=3)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{au rang } n+1 \text{ on doit avoir 3 faces de pile la dernière pile. Ceci} \\ \text{exige que au rang } n+1 \text{ et pile au rang } n \text{ on ait 3 faces de pile la} \\ \text{deuxième pile au rang } n! \end{array} \right.$

$$\text{De même } p(Y_{n+1}=2) = 0 \cdot p(Y_n=0) + \frac{1}{2} \cdot p(Y_n=1) + 0 \cdot p(Y_n=2) + 0 \cdot p(Y_n=3)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{même type de} \\ \text{raisonnement.} \end{array} \right.$

$$\underline{p(Y_{n+1}=2)} = \frac{1}{2} p(Y_n=1)$$

$$\text{En a aussi } \underline{p(Y_{n+1}=3)} = \frac{1}{2} p(Y_n=2).$$

$$\textcircled{92} \quad \text{a) Soit } n \in \mathbb{N}. \quad V_{n+1} = \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(Y_{n+1}=0) \\ p(Y_{n+1}=1) \\ p(Y_{n+1}=2) \\ p(Y_{n+1}=3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(Y_n=0) \\ p(Y_n=1) \\ p(Y_n=2) \\ p(Y_n=3) \end{bmatrix}$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} V_n ; \quad \underline{V_{n+1} = P V_n}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

$$4n^2 - 2n^2 - n^2 - n = 0 \text{ donc } 4n^3 V_{n-1} - 2n^3 V_{n-1} - n^2 V_{n-1} - n V_{n-1} = 0$$

$$n V_{n-1} = V_n, \quad n^2 V_{n-1} = V_{n+1}, \quad n^3 V_{n-1} = V_{n+2} \text{ et } n^4 V_{n-1} = V_{n+3}$$

$$\text{Par conséquent, } 4 V_{n+3} - 2 V_{n+2} - V_{n+1} - V_n = 0.$$

En particulier $4d_{n+3} - 2d_{n+2} - d_{n+1} - d_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 0$.

$d_1 = d_2 = 0$. $d_3 = \frac{1}{8}$ (FFF) et $d_4 = \frac{1}{36}$ (PFFF). La pompe est lancée!

d) Il suffit de remarquer que: $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 0 \Rightarrow d_{k+3} = \frac{1}{4}(2d_{k+2} + d_{k+1} + d_k)$.

Noter que ceci vaut aussi pour $k = -1$.

Donc $\forall k \in \mathbb{N}^0, d_{k+3} = \frac{1}{4}(2d_{k+2} + d_{k+1} + d_k)$.

Pour l'algorithme ou le programme, même chose que pour II (95%)!

(remplacer $8^{-1}(4C+2B+A) \rightarrow 0$ par $4^{-1}(2C+B+A) \rightarrow 0$ au voi la partie "II-éco"; voir encore à la fin).

$d_4 = 0,062500$; $d_5 = 0,062500$; $d_6 = 0,078125$; $d_7 = 0,070313$; $d_8 = 0,070313$;
 $d_9 = 0,072266$; $d_{10} = 0,071289$; $d_{11} = 0,071289$; $d_{12} = 0,071533$; $d_{13} = 0,071411$;
 $d_{14} = 0,071411$; $d_{15} = 0,071442$.

e)

Il apparaît que: $d_4 = d_5, d_7 = d_8, d_{10} = d_{11}; d_{13} = d_{14}$; noter que $d_1 = d_2$!

ce qui laisse croire que: $\forall k \in \mathbb{N}, d_{3k+1} = d_{3k+2}$.

Montrons ce résultat par récurrence (ce qui n'est pas demandé ... dans le texte initial)

- P: évident pour $k=0$.

- Supposons la propriété vraie pour $k \in \mathbb{N}$ ($d_{3k+1} = d_{3k+2}$) et montrons-le pour $k+1$ ($d_{3k+4} = d_{3k+5}$).

$$\begin{aligned} d_{3k+5} - d_{3k+4} &= \frac{1}{4}(2d_{3k+4} + d_{3k+3} + d_{3k+2} - 4d_{3k+4}) = \frac{1}{4}(d_{3k+3} + d_{3k+2} - 2d_{3k+4}) \\ &= \frac{1}{8}(2d_{3k+3} + 2d_{3k+2} - 4d_{3k+4}) = \frac{1}{8}(2d_{3k+3} + 2d_{3k+2} - 2d_{3k+3} - d_{3k+2} - d_{3k+1}) \\ &= \frac{1}{8}(d_{3k+2} - d_{3k+1}) = 0 \quad (\text{H.R.}) \quad \text{ceci achève la récurrence et prouve le} \end{aligned}$$

résultat.

Remarque. Au point de vue de l'option économique (MEC88!) l'étude de la suite $(d_n)_{n \geq 1}$ (... qui est notée $(p_n)_{n \geq 1}$).

On montre en particulier que: - $\forall n \in \mathbb{N}^0, d_n = \frac{1}{14} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{2^n} \cos \frac{2\pi n}{3} + \frac{1}{+13} \frac{1}{2^n} \sin \frac{2\pi n}{3}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \frac{1}{14} \quad (= 0,071429 \dots)$$

$$|d_n - \frac{1}{14}| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \quad (\text{vitesse de convergence}).$$

③ ① En fait le principe est le même que pour A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$
 $\forall i \in \{0, 1, 2\}$, $p(Z_{n+1}=i) = \sum_{j=0}^3 p(Z_{n+1}=i/Z_n=j) p(Z_n=j)$

$$p(Z_{n+1}=0/Z_n=3) = 0 \text{ pour } i=0, 1 \text{ ou } 2 \text{ et } p(Z_{n+1}=3/Z_n=3) = 1.$$

$$p(Z_{n+1}=0/Z_n=j) \text{ pour } j=0, 1 \text{ ou } 2 \text{ est } 1/2 \text{ (d'après la règle du lancer } n+1).$$

$$p(Z_{n+1}=1/Z_n=0) = 1/2 \text{ (face au } n^{\text{ème}} \text{ lancer)}. p(Z_{n+1}=1/Z_n=1) = p(Z_{n+1}=1/Z_n=2) = 0.$$

$$p(Z_{n+1}=2/Z_n=0) = p(Z_{n+1}=2/Z_n=1) = 0 \text{ et } p(Z_{n+1}=2/Z_n=2) = 1/2 \text{ (le } n^{\text{ème}} \text{ face d'une face)}.$$

$$p(Z_{n+1}=3/Z_n=0) = p(Z_{n+1}=3/Z_n=1) = 0 \text{ et } p(Z_{n+1}=3/Z_n=2) = 1/2 \text{ (} \text{--- } \text{)}$$

$$\text{d'où } p(Z_{n+1}=0) = \frac{1}{2} p(Z_n=0) + \frac{1}{2} p(Z_n=1) + \frac{1}{2} p(Z_n=2)$$

$$p(Z_{n+1}=1) = \frac{1}{2} p(Z_n=0)$$

$$p(Z_{n+1}=2) = \frac{1}{2} p(Z_n=2)$$

$$p(Z_{n+1}=3) = \frac{1}{2} p(Z_n=2) + p(Z_n=3) = \frac{1}{2} (p(Z_n=2) + 2 p(Z_n=3))$$

② a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$W_{n+1} = \begin{bmatrix} p(Z_{n+1}=0) \\ p(Z_{n+1}=1) \\ p(Z_{n+1}=2) \\ p(Z_{n+1}=3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p(Z_n=0) + p(Z_n=1) + p(Z_n=2) \\ p(Z_n=0) \\ p(Z_n=2) \\ p(Z_n=2) + 2 p(Z_n=3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(Z_n=0) \\ p(Z_n=1) \\ p(Z_n=2) \\ p(Z_n=3) \end{bmatrix} = N W_n.$$

b) $8N^4 - 12N^3 + 2N^2 + N + I_4 = 0$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $8N^4 W_n - 12N^3 W_n + 2N^2 W_n + N W_n + I_4 W_n = 0$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $8W_{n+4} - 12W_{n+3} + 2W_{n+2} + W_{n+1} + W_n = 0$

En considérant les dernières coordonnées on obtient:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underline{8d'_{n+4} - 12d'_{n+3} + 2d'_{n+2} + d'_{n+1} + d'_n = 0}.$$

c) $p(X=1) = p(X=2) = 0$; $p(X=3) = \frac{1}{8}$ (FFF) et $p(X=4) = \frac{1}{16}$ (FFFF).

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $p(X=n) = p(X \leq n) - p(X \leq n-1) = p(Z_n=3) - p(Z_{n-1}=3) = d'_n - d'_{n-1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow \underline{p(X=n) = d'_n - d'_{n-1}}$.

d) Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n = d'_n - d'_{n-1}$ (preu cavalière $d'_0 = 0$!).

$\Delta_1 = d'_1 - d'_0 = 0$; $\Delta_2 = d'_2 - d'_1 = 0 - 0$; $\Delta_3 = d'_3 - d'_2 = d'_3 = 1/8$ (FFF).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 = 8d'_{n+4} - 12d'_{n+3} + 2d'_{n+2} + d'_{n+1} + d'_n = 8(d'_{n+4} - d'_{n+3}) - 4(d'_{n+3} - d'_{n+2}) - 2(d'_{n+2} - d'_{n+1})$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 = 8\Delta_{n+4} - 4\Delta_{n+3} - 2\Delta_{n+2} - \Delta_{n+1} - (d'_{n+1} - d'_n)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $8\Delta_{n+4} = 4\Delta_{n+3} + 2\Delta_{n+2} + \Delta_{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $8\Delta_{n+3} = 4\Delta_{n+2} + 2\Delta_{n+1} + \Delta_n$. Vérifier que ceci vaut encore pour $n=1$.

$$4D_3 + 2D_2 + D_1 = 1/2$$

$$8D_4 = 8(d'_4 - d'_3) = 8\left(\frac{3}{16} - \frac{1}{8}\right) \quad (d'_4 = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots \text{FFF ou PFFF})$$

$$\text{Donc } 8D_4 = \frac{1}{2} = 4D_3 + 2D_2 + D_1$$

$$\text{Finalement } \begin{cases} D_3 = D_2 = 0, D_1 = 1/8 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 8D_{n+3} = 4D_{n+2} + 2D_{n+1} + D_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} q_1 = q_2 = 0, q_3 = 1/8 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 8q_{n+3} = 4q_{n+2} + 2q_{n+1} + q_n \end{cases}$$

Une seule séquence d'ordre 2 existe alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n = q_n$.

$$\text{Finalement : } \underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*, p(X=n) = q_n = \alpha r^n + \beta z^n + \gamma \bar{z}^n}}$$

$$\text{Ceci donne encore : } \underline{\underline{p(X=n) \sim \alpha r^n}}$$

$$\text{Donc } \frac{p(X=n+1)}{p(X=n)} \sim \frac{\alpha r^{n+1}}{\alpha r^n} ; \quad \underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(X=n+1)}{p(X=n)} = r}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n p(X=n) \geq 0$; l'existence de EX résulte alors de la convergence de la série de terme général $n p(X=n)$.

Or $n p(X=n) \sim n \alpha r^n = \alpha r (nr^{n-1})$. $|r| < 1$ donc la série de terme général $\alpha r (nr^{n-1})$ converge. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $n p(X=n)$ (absolument) converge. EX existe.

$$EX = \sum_{n=1}^{+\infty} n p(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n q_n = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} n r^n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} n z^n + \gamma \sum_{n=1}^{+\infty} n \bar{z}^n \quad (\text{les 3 séries convergent})$$

$$EX = \alpha r \sum_{n=1}^{+\infty} n r^{n-1} + \beta z \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} + \gamma \bar{z} \sum_{n=1}^{+\infty} n \bar{z}^{n-1} = \alpha \frac{r}{(1-r)^2} + \beta \frac{z}{(1-z)^2} + \gamma \frac{\bar{z}}{(1-\bar{z})^2}$$

doit trouver α, β, γ de $f(x \mapsto 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1)$ dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} (104u^2 + 44u + 14)(u-1)^2 &= (104u^2 + 44u + 14)(u^2 - 2u + 1) \\ &= 104u^4 + 44u^3 + 14u^2 - 208u^3 - 88u^2 - 28u + 104u^2 + 44u + 14 \\ &= 104u^4 + 164u^3 + 30u^2 + 16u + 14 \\ &= 13u \times (8u^3 - 16u^2 + 30u + 14) = 13u \times (4u^2 + 2u + 1) - 164u^3 + 30u^2 + 16u + 14 \\ &= -112u^3 + 56u^2 + 29u + 14 = -14(8u^3) + 56u^2 + 29u + 14 \\ &= -14(4u^2 + 2u + 1) + 56u^2 + 29u + 14 = u \cdot \frac{u}{(u-1)^2} = 104u^2 + 44u + 14 \end{aligned}$$

Exercice... Réfléchir au pourquoi (... voir $E(x)$) et surtout au comment de cette formule (considérer les restes des divisions de $zg(x)$ et $g(x)$ par $(x-1)^2$... et éliminer les constantes).

Revenons à $E(X)$.

$$E(X) = \alpha \frac{r}{(1-r)^2} + \beta \frac{\bar{r}}{(1-\bar{r})^2} + \gamma \frac{\bar{\bar{r}}}{(1-\bar{\bar{r}})^2} = \alpha(104r^2 + 44r + 14) + \beta(104\bar{r}^2 + 44\bar{r} + 14) + \gamma(104\bar{\bar{r}}^2 + 44\bar{\bar{r}} + 14)$$

$$E(N) = 104(\alpha r^2 + \beta \bar{z}^2 + \delta \bar{z}) + 44(\alpha r + \beta \bar{z} + \delta \bar{z}) + 14(\alpha + \beta + \delta)$$

Notons aussi dans $\Pi \mathcal{G}_2$ que: $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (p3), $\alpha + \beta \gamma + \gamma \bar{\gamma} = \alpha \gamma^2 + \beta \gamma^2 + \gamma \bar{\gamma}^2 = 0$.

Quint doc: E(X)=14.

e) d'enceinte du pichilou

doit $\in \mathbb{N}^*$. Notons F : l'ensemble admettant face au $i^{\text{ème}}$ place.

$(P_1, F_1 \cap P_2, F_1 \cap F_2 \cap P_3, F_1 \cap F_2 \cap F_3)$ est un système complet d'événements

$$p(X=n+1 | \mathcal{P}_3) = p(X=n+2) \quad (\text{tout est à faire à } n+2 \text{ pas car})$$

$$P(X=n+1 | F_1 \cap F_2) = P(X=n+1) \quad (4 \quad " \quad n+1 \quad ")$$

$$p(X=n+1) / (F_1 \cap F_2 \cap P_2) = p(X=n) \quad (4 \quad " \quad " \quad " \quad " \quad)$$

$$p(X=n_3 | F_1 \cap F_2 \cap F_3) = 0 \quad \text{car} \quad n+3 \geq 4 \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

de formule de probabilité totale donne alors :

$$p(X=n+3) = p(P_3) p(X=n+2) + p(F_1 \cap P_2) p(X=n+1) + p(F_1 \cap F_2 \cap P_3) p(X=n) + 0.$$

Doc $p(X=n+3) = \frac{1}{2} p(X=n+2) + \frac{1}{4} p(X=n+1) + \frac{1}{8} p(X=n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Question 1: $p(X=1)=p(X=2)=0$ et $p(X=3)=p(F_1 \cap F_2 \cap F_3)=1/8 \dots$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 8p(X=n+3) = 4p(X=n+2) + 2p(X=n+1) + p(X=n)$$

En retour des la pinte (q_v)

Retournons maintenant $E(X)$. Commençons par l'existence.

Il suffit par une récurrence d'ordre 3 que: $\forall n \in \mathbb{N}^*, p(x=n) \leq \left(\frac{13}{4}\right)^n$

c'est d'ici pour $n = 1, 2$ et 3

Supposons la propriété vraie pour $n, n+1, n+2$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et mettons la pour $n+3$.

$$8p(X=n+3) = 4p(X=n+2) + 2p(X=n+1) + p(X=n)$$

$$8p(X=n+3) \leq 4\left(\frac{13}{14}\right)^{n+2} + 2\left(\frac{13}{14}\right)^{n+1} + \left(\frac{13}{14}\right)^n = \left(\frac{13}{14}\right)^{n+3} \left[4\left(\frac{14}{13}\right) + 2\left(\frac{14}{13}\right)^2 + \left(\frac{14}{13}\right)^3 \right]$$

$$8p(X=n+3) \leq \left(\frac{13}{14}\right)^{n+3} \frac{1}{13^3} [4 \times 14 \times 13^2 + 2 \times 14^2 \times 13 + 14^3] = \frac{17304}{33^3} \left(\frac{13}{14}\right)^{n+3}$$

$$p(X=n+3) \leq \frac{17304}{8 \times 1197} \left(\frac{13}{14}\right)^{n+3} = \frac{2163}{1197} \left(\frac{13}{14}\right)^{n+3} \leq \left(\frac{13}{14}\right)^{n+3}. \text{ Ici admette la récurrence.}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq n p(X=n) \leq n \left(\frac{13}{14}\right)^n$. La série de terme général $n \left(\frac{13}{14}\right)^n$ étant convergente il en est de même de la série de terme général $n p(X=n)$ (règle de comparaison des séries à termes positifs)

La série de terme général $n p(X=n)$ est absolument convergente ($n p(X=n) \geq 0 \dots$) donc $E(X)$ existe.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $8n p(X=n+3) = 4n p(X=n+2) + 2n p(X=n+1) + n p(X=n)$.

Donc $8 \sum_{n=1}^{+\infty} n p(X=n+3) = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n p(X=n+2) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n p(X=n+1) + \sum_{n=1}^{+\infty} n p(X=n)$ (les quatre séries sont convergentes). Par quelques changements d'indice on obtient:

$$8 \sum_{n=4}^{+\infty} (n-3) p(X=n) = 4 \sum_{n=3}^{+\infty} (n-2) p(X=n) + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) p(X=n) + E(X)$$

$$(n-3) p(X=n) = 0 \text{ pour } n=3, 2 \text{ et } 1 \text{ (ok!)}$$

$$(n-2) p(X=n) = 0 \text{ pour } n=2 \text{ et } 1$$

$$(n-1) p(X=n) = 0 \text{ pour } n=1$$

Il vient alors:

$$8 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-3) p(X=n) = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-2) p(X=n) + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1) p(X=n) + E(X) \text{ ou :}$$

$$8E(X) - 24 \sum_{n=1}^{+\infty} p(X=n) = 4E(X) - 8 \sum_{n=1}^{+\infty} p(X=n) + 2E(X) - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} p(X=n) + E(X)$$

$$\text{Donc } 8E(X) - 4E(X) - 2E(X) - E(X) = (24 - 8 - 2) \sum_{n=1}^{+\infty} p(X=n) = 14$$

Donc $E(X) = 14$.

L'algorithme de I §5 q1

```

program HEC88MI1;
uses crt;
var k,n:integer;a,b,c,d:real;
begin
  clrscr;
  a:=0;b:=0;c:=1/8;
  write('Donnez la valeur de n. n=');readln(n);writeln;

  for k:=3 to n do
    begin
      write('q(',k,')=',c:10:6);
      d:=(4*c+2*b+a)/8;
      writeln('      q(',k+1,')/q(',k,')=',d/c:8:4);
      a:=b;b:=c;c:=d;
    end;

end.

```

q(3)= 0.125000	q(4)/q(3)= 0.5000
q(4)= 0.062500	q(5)/q(4)= 1.0000
q(5)= 0.062500	q(6)/q(5)= 1.0000
q(6)= 0.062500	q(7)/q(6)= 0.8750
q(7)= 0.054688	q(8)/q(7)= 0.9286
q(8)= 0.050781	q(9)/q(8)= 0.9231
q(9)= 0.046875	q(10)/q(9)= 0.9167
q(10)= 0.042969	q(11)/q(10)= 0.9205
q(11)= 0.039551	q(12)/q(11)= 0.9198
q(12)= 0.036377	q(13)/q(12)= 0.9195
q(13)= 0.033447	q(14)/q(13)= 0.9197
q(14)= 0.030762	q(15)/q(14)= 0.9196
q(15)= 0.028290	q(16)/q(15)= 0.9196

COMPLEMENT S

1°. Complément 1.

(* simulation du temps d'attente des 3 faces consécutifs *)

```

program hec88MI1b;

```

```

uses crt;
var n,k:integer;moy:real;

```

```

function simule:integer;
var compteur,compte_face:integer;
begin
  compteur:=0;compte_face:=0;
  while compte_face<3 do
    begin
      compteur:=compteur+1;
      if random(2)=0 then compte_face:=0
        else compte_face:=compte_face+1;
    end;
  simule:=compteur;
end;

```

```

begin
  randomize;
  write('Donnez le nombre n d''itérations souhaitées. n=');readln(n);

  moy:=0;
  for k:=1 to n do moy:=moy+simule;

  writeln('Nous avons simulé ',n,' fois l''expérience. ');
  write('Le temps d''attente de 3 faces consécutives est en moyenne, ');
  writeln('sensiblement ',moy/n:5:2);
  writeln('Pour mémoire l''espérance est 14. ');
end.

```

Donnez le nombre n d'itérations souhaitées. $n=9999$

Nous avons simulé 9999 fois l'expérience.

Le temps d'attente de 3 faces consécutives est en moyenne, sensiblement 14.02

Pour mémoire l'espérance est 14.

Donnez le nombre n d'itérations souhaitées. $n=100$

Nous avons simulé 100 fois l'expérience.

Le temps d'attente de 3 faces consécutives est en moyenne, sensiblement 14.63

Pour mémoire l'espérance est 14.

Donnez le nombre n d'itérations souhaitées. $n=10000$

Nous avons simulé 10000 fois l'expérience.

Le temps d'attente de 3 faces consécutives est en moyenne, sensiblement 14.00

Pour mémoire l'espérance est 14.

2. Complément 2 : recherche des zéros de $P=8X^3-4X^2-2X-1$

Soit $a \in \mathbb{R}$. $P = \sum_{k=0}^3 \frac{(x-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)$. $P' = 24x^2 - 8x - 2$, $P'' = 48x - 8$, $P''' = 48$.

Pour $a = 8/48$ (on fait apparaître le terme " x^2 " !). $a = 1/6$. $P'''(a) = 48$, $P''(a) = 0$, $P'(a) = -8/3$ et $P(a) = -38/27$.

On a alors $P = 8(x-a)^3 - \frac{8}{3}(x-a) - \frac{38}{27}$.

Soit $x \in \mathbb{C}$. Pour $y = x - a$. $8y^3 - 4y^2 - (y-1) = 0 \Leftrightarrow 8y^3 - \frac{8}{3}y - \frac{38}{27} = 0$.

Pour $y = u + v$ avec $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ et supposons que : $8y^3 - \frac{8}{3}y - \frac{38}{27} = 0$.

$$0 = 8y^3 - \frac{8}{3}y - \frac{38}{27} = 8(u^3 + v^3) + 8(u+v)(3uv - \frac{1}{3}) - \frac{38}{27}.$$

Pour $uv = \frac{1}{9}$ (on a d'ailleurs $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ tq $u+v=y$ et $uv=\frac{1}{9}$!).

$$\text{Alors } u^3 v^3 = (1/9)^3 \text{ et } 8(u^3 + v^3) = \frac{38}{27}; \quad u^3 v^3 = 1/9 \text{ et } u^3 + v^3 = \frac{19}{4 \times 27}.$$

u^3 et v^3 sont les solutions de $T \in \mathbb{C}$ et $T^2 - \frac{19}{4 \times 27} T + (\frac{1}{9})^3 = 0$.

avec $u^3 \in \left\{ \frac{19 + \sqrt{297}}{8 \times 27}, \frac{19 - \sqrt{297}}{8 \times 27} \right\}$ (résolution de l'équation du second degré !).

La symétrie au polynôme unitaire à choisir $u^3 = \frac{19 + \sqrt{297}}{8 \times 27}$

$$\text{ou } u = \sqrt[3]{\frac{19 + \sqrt{297}}{8 \times 27}} \text{ et } v = \sqrt[3]{\frac{19 - \sqrt{297}}{8 \times 27}} \quad (\text{car } uv = \frac{1}{9}); \quad y = \frac{\sqrt[3]{19 + \sqrt{297}}}{6} + \frac{\sqrt[3]{19 - \sqrt{297}}}{6}$$

$$\text{ou } u = \frac{\sqrt[3]{19 + \sqrt{297}}}{6} j \text{ et } v = \frac{\sqrt[3]{19 - \sqrt{297}}}{6} \quad (\text{car } uv = 1/9); \quad y = \frac{\sqrt[3]{19 + \sqrt{297}}}{6} j + \frac{\sqrt[3]{19 - \sqrt{297}}}{6} j^2.$$

$$\text{de même } u = \frac{\sqrt[3]{19 + \sqrt{297}}}{6} j^2 \text{ donne } y = \frac{\sqrt[3]{19 + \sqrt{297}}}{6} j^2 + \frac{\sqrt[3]{19 - \sqrt{297}}}{6} j.$$

$$\text{Finalement les zéros de } 8X^3 - 4X^2 - 2X - 1 \text{ sont : } \begin{cases} r = \frac{\sqrt[3]{19 + \sqrt{297}}}{6} + \frac{\sqrt[3]{19 - \sqrt{297}}}{6} + \frac{1}{6} \approx 0,919643378 \\ z = \frac{\sqrt[3]{19 + \sqrt{297}}}{6} j + \frac{\sqrt[3]{19 - \sqrt{297}}}{6} j^2 + \frac{1}{6} \\ \text{et } \bar{z} \end{cases}$$

et $\bar{z}$!