PARTIE I

Q1 Soient (x_1,x_2,x_3,x_4) et (y_1,y_2,y_3,y_4) deux éléments de $\mathbb{R}^4$. Posons $\hat{A} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\hat{A}\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}x_1 + x_2 = y_1 \\ \frac{1}{4}x_1 - x_2 + x_3 = y_2 \\ \frac{1}{4}x_1 - x_3 + x_4 = y_3 \\ \frac{1}{4}x_1 - x_4 = y_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}x_1 + x_2 = y_1 & \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_3 = y_1 + y_2 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -\frac{1}{4}x_1 + x_4 = y_1 + y_2 + y_3 & L_3 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ 0 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & L_4 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \end{cases}$$

$$\hat{A}\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{3}{4}x_1 + y_1 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_1 + y_1 + y_2 \\ x_4 = \frac{1}{4}x_1 + y_1 + y_2 + y_3 \\ 0 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \end{cases}$$

1er cas. $y_1+y_2+y_3+y_4 \neq 0$; le système n'a pas de solution.

2e cas. $y_1+y_2+y_3+y_4 = 0$. L'ensemble des solutions du système est :

$$\left\{ \left(x_1, \frac{3}{4}x_1 + y_1, \frac{1}{2}x_1 + y_1 + y_2, \frac{1}{4}x_1 + y_1 + y_2 + y_3\right) ; x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Cl. <u>le système admet au moins une solution si et seulement si $y_1+y_2+y_3+y_4 = 0$.</u>

Q2 On suppose que $y_1+y_2+y_3+y_4 = 0$.

Soit (x_1,x_2,x_3,x_4) une solution du système. $x_2 = \frac{3}{4}x_1 + y_1$, $x_3 = \frac{1}{2}x_1 + y_1 + y_2$ et $x_4 = \frac{1}{4}x_1 + y_1 + y_2 + y_3$.

$x_1+x_2+x_3+x_4 = a \Leftrightarrow a = x_1 + \frac{3}{4}x_1 + y_1 + \frac{1}{2}x_1 + y_1 + y_2 + \frac{1}{4}x_1 + y_1 + y_2 + y_3$

$x_1+x_2+x_3+x_4 = a \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}x_1 + 3y_1 + 2y_2 + y_3 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{5}(a - 3y_1 - 2y_2 - y_3)$

L'unique solution (x_1,x_2,x_3,x_4) du système vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4 = a$ est

$$\left(\frac{2}{5}(a-3y_1-2y_2-y_3), \frac{3}{10}(a-3y_1-2y_2-y_3)+y_1, \frac{1}{5}(a-3y_1-2y_2-y_3)+y_1+y_2, \frac{1}{10}(a-3y_1-2y_2-y_3)+y_1+y_2+y_3\right)$$

<u>ou</u>

$$\left(\frac{2}{5}(a-3y_1-2y_2-y_3), \frac{1}{10}(3a+y_1-6y_2-3y_3), \frac{1}{5}(a+2y_1+3y_2-y_3), \frac{1}{10}(a+7y_1+8y_2+9y_3)\right).$$

ou en remplaçant y_1 par $-y_2-y_3-y_4$:

$$\left(\frac{2}{5}(a+y_2+2y_3+3y_4), \frac{1}{10}(3a-7y_2-4y_3-y_4), \frac{1}{5}(a+y_2-3y_3-2y_4), \frac{1}{10}(a+y_2+2y_3-7y_4)\right).$$

PARTIE II - Q1 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $m_n = \min(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3})$.

Par conséquent : $m_n \leq p_{n+1}$, $m_n \leq p_{n+2}$, $m_n \leq p_{n+3}$ et $p_{n+4} = \frac{1}{4}(p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3}) \geq \frac{1}{4}\, 4 m_n = m_n$

Donc $m_n \leq \min(p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}) = m_{n+1}$

cl... $\forall n\in\mathbb{N}$, $m_n \leq m_{n+1}$; la suite $(m_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $M_n = \max(p_n, p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3})$. $M_n \geq p_n$, $M_n \geq p_{n+1}$, $M_n \geq p_{n+2}$, $M_n \geq p_{n+3}$ et

$M_n = \frac{1}{4}(M_n + M_n + M_n + M_n) \geq \frac{1}{4}(p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3}) = p_{n+4}$

donc $M_n \geq \max(p_{n+1}, p_{n+2}, p_{n+3}, p_{n+4}) = M_{n+1}$

cl... $\forall n\in\mathbb{N}$, $M_n \geq M_{n+1}$; la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

b) $\forall n\in\mathbb{N}$, $m_0 \leq m_n$ car $(m_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
$\forall n\in\mathbb{N}$, $M_n \leq M_0$ car $(M_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
Par définition des deux suites : $\forall n\in\mathbb{N}$, $m_0 \leq m_n \leq p_n \leq M_n \leq M_0$.

c) $(m_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par M_0 ; elle converge ; notons m sa limite.
$(M_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et minorée par m_0, elle converge ; notons M sa limite.
$\forall n\in\mathbb{N}$, $m_n \leq M_n$ donc $m \leq M$.

Q2 a) Soit $n\in\mathbb{N}$. $p_{n+4} = \frac{1}{4}(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n)$.

L'un des quatre réels $p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n$ est m_n et les trois autres sont inférieurs ou égaux à M_n

Par conséquent : $p_{n+4} \leq \frac{1}{4}(m_n + M_n + M_n + M_n) = \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m_n \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $p_{n+4} \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m_n \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m$ — $(m_n)_{n\geq 0}$ est croissante et converge vers m.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $p_{n+4} \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m$, $p_{n+5} \overset{\blacktriangle}{\leq} \frac{3}{4} M_{n+1} + \frac{1}{4} m \overset{*}{\leq} \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m$; $p_{n+6} \overset{\blacktriangle}{\leq} \frac{3}{4} M_{n+2} + \frac{1}{4} m \overset{*}{\leq} \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m$

et $p_{n+7} \overset{\blacktriangle}{\leq} \frac{3}{4} M_{n+3} + \frac{1}{4} m \overset{*}{\leq} \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m$

▲ formule précédente appliquée pour $n+1$, $n+2$ et $n+3$
* décroissance de la suite $(M_n)_{n\geq 0}$.

Finalement $p_{n+4}, p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}$ sont majorés par $\frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m$; donc

$$M_{n+4} = \max(p_{n+4}, p_{n+5}, p_{n+6}, p_{n+7}) \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m.$$

cl... $\forall n\in\mathbb{N}$, $M_{n+4} \leq \frac{3}{4} M_n + \frac{1}{4} m$.

b) En passant à la limite, ce qui précède donne : $M \leq \frac{3}{4} M + \frac{1}{4} m$, soit $M \leq m$

Finalement $\pi \le m \le \pi$.

Conclusion.. $\pi = m$

$(p_n)_{n\ge 0}$ est donc encadrée par deux suites qui convergent vers $\pi = m$; $(p_n)_{n\ge0}$ converge vers $\pi = m$.

Conclusion.. **$(p_n)_{n\ge0}$ converge vers $\pi = m$.**

Remarque.. Soit $S = \{(p_n)_{n\ge0} \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \mid \forall n\in\mathbb{N},\ p_{n+4} = \frac{1}{4}(p_{n+3}+p_{n+2}+p_{n+1}+p_n)\}$

S est un espace vectoriel de dimension 4 (... isomorphe à $\mathbb{R}^4$)

L'étude classique de S n'est pas très simple car l'équation caractéristique est :

$z\in\mathbb{C}$ et $z^4 = \frac{1}{4}(z^3+z^2+z+1) = 0$; soit $z\in\mathbb{C}$ et $(z-1)(4z^3+3z^2+2z+1) = 0$

L'équation $z\in\mathbb{C}$ et $4z^3+3z^2+2z+1 = 0$ ... est assez rebelle !

Q3 a)

```
program mykones;

var n,i,j:integer;p:real;a:array[0..3] of real;

begin
  clrscr;
  for i:=0 to 3 do
  begin
    write('Donnez le terme d''indice ',i,' ');readln(a[i]);
    end;

  repeat
    write('Donnez l''indice N du dernier terme (N>=4) ');readln(n);
  until n>=4;
  clrscr;

  for i:=0 to 3 do
  writeln('p(',i,')=',a[i]);

  i:=3;j:=4;
  repeat
  i:=i+1;
  p:=0.25*(a[0]+a[1]+a[2]+a[3]);
  writeln('p(',i,')=',p);
  a[0]:=a[1];a[1]:=a[2];a[2]:=a[3];a[3]:=p;
  if (i mod 20=0) and (i<>n) then
    begin writeln;writeln;
          write('Tapez un nombre pour continuer ');
          read(j);
          clrscr;
    end;

  until i=n;

end.
```

Programme sommaire qu'il convient d'améliorer.

Il refuse $N<4$ et il affiche les résultats par tranches de 20

b..

$p_0 = 1$

$p_1 = 0{,}25$

$p_2 = 0{,}3125$

$p_3 = 0{,}390625$

$p_4 \simeq 0{,}488\ 281\ 250$

$p_5 \simeq 0{,}360\ 351\ 563$

$p_6 \simeq 0{,}387\ 939\ 453$

$p_7 \simeq 0{,}406\ 799\ 316$

$p_8 \simeq 0{,}410\ 842\ 896$

$p_9 \simeq 0{,}391\ 483\ 307$

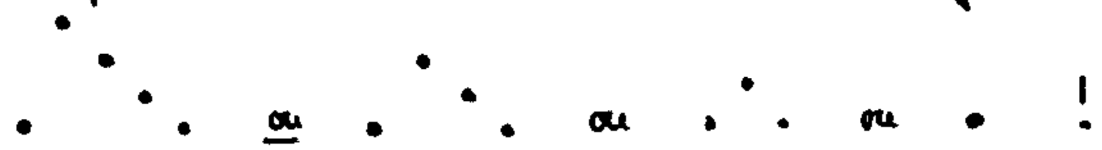
$p_{10} \simeq 0{,}399\ 266\ 243$

$p_{11} \simeq 0{,}402\ 097\ 940$

$p_{12} \simeq 0{,}40922596$

PARTIE III

Remarque... Cette promenade aléatoire modélise le rebond d'une balle facétieuse ...



Q1.. Soit $n\in\mathbb{N}$ $\{J_n=C_1\}$, $\{J_n=C_2\}$, $\{J_n=C_3\}$, $\{J_n=C_4\}$ est un système complet où J_n est la case où retourne le jeton à l'instant n.

$q(n+1,1)=p(J_{n+1}=C_1)=p(J_{n+1}=C_1\mid J_n=C_1)p(J_n=C_1)+p(J_{n+1}=C_1\mid J_n=C_2)p(J_n=C_2)+$
$p(J_{n+1}=C_1\mid J_n=C_3)p(J_n=C_3)+p(J_{n+1}=C_1\mid J_n=C_4)p(J_n=C_4)=\frac{1}{4}p(J_n=C_1)+1\,p(J_n=C_2)$.

Donc $\underline{\underline{q(n+1,1)=\frac{1}{4}q(n,1)+q(n,2)}}$.

De même on obtient : $\underline{\underline{q(n+1,2)=\frac{1}{4}q(n,1)+q(n,3)}}$ car $p(J_{n+1}=C_2\mid J_n=C_2)=p(J_{n+1}=C_2\mid J_n=C_4)=0$
et $p(J_{n+1}=C_2\mid J_n=C_1)=\frac{1}{4}$ et $p(J_{n+1}=C_2\mid J_n=C_3)=1$

De même : $\underline{\underline{q(n+1,3)=\frac{1}{4}q(n,1)+q(n,4)}}$
et $\underline{\underline{q(n+1,4)=\frac{1}{4}q(n,1)}}$.

Donc
$$\begin{pmatrix}q(n+1,1)\\q(n+1,2)\\q(n+1,3)\\q(n+1,4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&1&0&0\\\frac{1}{4}&0&1&0\\\frac{1}{4}&0&0&1\\\frac{1}{4}&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q(n,1)\\q(n,2)\\q(n,3)\\q(n,4)\end{pmatrix}.$$
$\forall n\in\mathbb{N}$, $Q_{n+1}=AQ_n$ avec $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&1&0&0\\\frac{1}{4}&0&1&0\\\frac{1}{4}&0&0&1\\\frac{1}{4}&0&0&0\end{pmatrix}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

b) $\underline{\underline{q(n+1,4)=\frac{1}{4}q(n,1)}}$.

$q(n+2,3)=\frac{1}{4}q(n+1,1)+q(n+1,4)$; $q(n+2,3)=\frac{1}{4}\big(q(n+1,1)+q(n,1)\big)$.

$\underline{\underline{q(n+2,3)=\frac{1}{4}\,[q(n+1,1)+q(n,1)]}}$.

$q(n+3,2)=\frac{1}{4}q(n+2,1)+q(n+2,3)$; $\underline{\underline{q(n+3,2)=\frac{1}{4}\,[q(n,1)+q(n+1,1)+q(n+2,1)]}}$

$q(n+4,1)=\frac{1}{4}q(n+3,1)+q(n+3,2)$; $\underline{\underline{q(n+4,1)=\frac{1}{4}\,[q(n,1)+q(n+1,1)+q(n+2,1)+q(n+3,1)]}}$.

c) $q(0,1)=1$; $q(1,1)=\frac{1}{4}$; $q(2,1)=\frac{1}{4}q(1,1)+q(1,2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$.

$q(3,1)=\frac{1}{4}q(2,1)+q(2,2)=\frac{5}{16}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}q(1,1)+q(1,3)=\frac{5}{64}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5+4+16}{64}=\frac{25}{64}$

$q(0,1)=1,\ q(1,1)=\frac{1}{4},\ q(2,1)=\frac{5}{16},\ q(3,1)=\frac{25}{64}$.

Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ q(n,1)=p_n$.

→ c'est clair pour $n=0$, $n=1$, $n=2$ et $n=3$ $\left(p_3=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}=\frac{16+8+1}{64}=\frac{25}{64}\right)$.

→ Supposons la propriété vraie pour n, $n+1$, $n+2$ et $n+3$ et montrons la pour $n+4$ $(n\in\mathbb{N})$.

$q(n+4,1)=\frac{1}{4}[q(n+3,1)+q(n+2,1)+q(n+1,1)+q(n,1)]\underset{H.R.}{=}\frac{1}{4}[p_n+p_{n+1}+p_{n+2}+p_{n+3}]=p_{n+4}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall n\in\mathbb{N},\ q(n,1)=p_n$.

Donc la suite $(q(n,1))_{n\geq 0}$ converge. Posons $L=\lim_{n\to+\infty}q(n,1)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ q(n,4)=\frac{1}{4}q(n-1,1)$; donc $\lim_{n\to+\infty}q(n,4)=\frac{1}{4}L$

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ q(n,3)=\frac{1}{4}[q(n-2,1)+q(n-1,1)]$; donc $\lim_{n\to+\infty}q(n,3)=\frac{1}{2}L$.

$\forall n\in[\![3,+\infty[\![,\ q(n,2)=\frac{1}{4}[q(n-3,1)+q(n-2,1)+q(n-1,1)]$; donc $\lim_{n\to+\infty}q(n,2)=\frac{3}{4}L$.

d) $q(n,1)+q(n,2)+q(n,3)+q(n,4)=1$ ($\{J_n=C_1\},\{J_n=C_2\},\{J_n=C_3\},\{J_n=C_4\}$ est un système complet d'événements).

En passant à la limite on obtient : $L+\frac{3}{4}L+\frac{1}{2}L+\frac{1}{4}L=1$; $\frac{5}{2}L=1$; $L=\frac{2}{5}=0,4$

$\lim_{n\to+\infty}q(n,1)=0,4$; $\lim_{n\to+\infty}q(n,2)=0,3$; $\lim_{n\to+\infty}q(n,3)=0,2$; $\lim_{n\to+\infty}q(n,4)=0,1$.

Q2) a) $Y(n,1)+Y(n,2)+Y(n,3)+Y(n,4)=n+1$.

b) Soit $i\in[\![1,4]\!]$. $E[Z(n,i)]=P(Z(n,i)=1)=q(n,i)$.

$E[Y(n,i)]=\sum_{k=0}^{n}E[Z(k,i)]=\sum_{k=0}^{n}q(k,i)$.

Donc $E_n=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{n}q(k,1)\\ \sum q(k,2)\\ \sum q(k,3)\\ \sum q(k,4)\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}q(k,1)\\ q(k,2)\\ q(k,3)\\ q(k,4)\end{bmatrix}=\sum_{k=0}^{n}Q_k$. $E_n=Q_0+Q_1+\cdots+Q_n$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A - I_4)E_n = AE_n - E_n = A\left(\sum_{\ell=0}^{n} Q_\ell\right) - \sum_{\ell=0}^{n} Q_\ell = \sum_{\ell=0}^{n} AQ_\ell - \sum_{\ell=0}^{n} Q_\ell = \sum_{\ell=0}^{n} Q_{\ell+1} - \sum_{\ell=0}^{n} Q_\ell = Q_{n+1} - Q_0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $(A - I_4)E_n = Q_{n+1} - Q_0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $Y(n,1)+Y(n,2)+Y(n,3)+Y(n,4) = n+1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $E[Y(n,1)]+E[Y(n,2)]+E[Y(n,3)]+E[Y(n,4)] = n+1$.

$$A - I_4 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 & 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & -1 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \hat{A}.$$

Fixons n dans $\mathbb{N}$. Posons $x_1 = E[Y(n,1)]$, $x_2 = E[Y(n,2)]$, $x_3 = E[Y(n,3)]$ et $x_4 = E[Y(n,4)]$.

Posons encore $y_1 = q(n+1,1) - q(0,1)$, $y_2 = q(n+1,2) - q(0,2)$, $y_3 = q(n+1,3) - q(0,3)$ et $y_4 = q(n+1,4) - q(0,4)$.

1.. $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 - 1 = 0$

2.. $(A - I_4)E_n = Q_{n+1} - Q_0$ donne $\hat{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$

3.. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n+1$

Par conséquent d'après I et en remarquant que : $q(0,1) = 1$, $q(0,2) = q(0,3) = q(0,4) = 0$ on obtient :

$$E[Y(n,1)] = \frac{2}{5}\left[n+1 + q(n+1,2) + 2q(n+1,3) + 3q(n+1,4)\right]$$

$$E[Y(n,2)] = \frac{1}{10}\left[3n+3 - 7q(n+1,2) - 4q(n+1,3) - q(n+1,4)\right]$$

$$E[Y(n,3)] = \frac{1}{5}\left[n+1 + q(n+1,2) - 3q(n+1,3) - 2q(n+1,4)\right]$$

$$E[Y(n,4)] = \frac{1}{10}\left[n+1 + q(n+1,2) + 2q(n+1,3) - 7q(n+1,4)\right]$$

Rappelons que : $\lim_{n\to+\infty} q(n+1,2) = 0,3$, $\lim_{n\to+\infty} q(n+1,3) = 0,2$ et $\lim_{n\to+\infty} q(n+1,4) = 0,1$.

donc $\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{5}{2}E[Y(n,1)] - (n+1)\right] = 0,3 + 2\times 0,2 + 3\times 0,1 = 1$

Ainsi $\frac{5}{2}E[Y(n,1)] = (n+1) + 1 + \alpha_1(n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \alpha_1(n) = 0$.

donc $E[Y(n,1)] = \frac{2}{5}n + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\alpha_1(n)$. En posant $f_1 = \frac{2}{5}$, $g_1 = \frac{4}{5}$ et

$\varepsilon_1(n) = \frac{2}{5}\alpha_1(n)$ on obtient $E[Y(n,1)] = f_1 n + g_1 + \varepsilon_1(n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_1(n) = 0$

Gardons : $\underline{\underline{E[Y(n,1)] = \frac{2}{5}n + \frac{4}{5} + \varepsilon_1(n)}}$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_1(n) = 0$.

On montre en partant de la même manière que :

$$\underline{\underline{E[Y(n,2)] = \frac{3}{10}n + \varepsilon_2(n) \quad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_2(n) = 0.}}$$

$$\underline{\underline{E[Y(n,3)] = \frac{1}{5}n + \frac{1}{10} + \varepsilon_3(n) \quad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_3(n) = 0}}$$

$$\underline{\underline{E[Y(n,4)] = \frac{1}{10}n + \frac{1}{10} + \varepsilon_4(n) \quad \text{avec} \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_4(n) = 0.}}$$

PARTIE IV

Q1 $\underline{\underline{p(U=1) = \frac{1}{4}}}$ (il passe de C_1 à C_2).

$p(U=2) = p(J_1 = C_4 \cap J_2 = C_2) + p(J_1 = C_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$.

$\underline{\underline{p(U=2) = \frac{5}{16}}}$.

Soit $n \in [\![3, +\infty[\![$

Notons que si le jeton retourne en C_3 (resp. C_4) à l'instant k il retourne en C_2 à l'instant $k+1$ (resp. $k+2$).

Trois cas se présentent pour que le jeton soit en C_2 à l'instant n pour la 1ère fois

1er cas.. il est en C_1 aux instants $0, 1, 2, \dots, n-1$ et passe en C_2 à l'instant n.

2ème cas.. Reste en C_1 aux instants $0, 1, 2, \dots, n-2$ passe en C_3 à l'instant $n-1$ et va normalement en C_2 à l'instant n (pour la première fois).

3ième cas.. Reste en C_1 aux instants $0, 1, 2, \dots, n-3$ passe en C_4 à l'instant $n-2$, va en C_3 à

$\longrightarrow$

l'instant $n-2$ puis va en C_2 à l'instant n pour la 1ère fois.

Donc $p(U=n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\times\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\times\frac{1}{4}\times 1+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-3}\times\frac{1}{4}\times 1\times 1$

$p(U=n)=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}=(1+4+16)\frac{1}{4^n}=\frac{21}{4^n}$.

Finalement : $p(U=1)=\frac{1}{4}$, $p(U=2)=\frac{5}{16}$ et $\forall n\in[\![3,+\infty[\![,\ p(U=n)=\frac{21}{4^n}$.

b) "Vérifions" ! $\sum_{n=1}^{+\infty}p(U=n)=\frac{1}{4}+\frac{5}{16}+21\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{4}+\frac{5}{16}+\frac{21}{64}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{4^{n-3}}$

$\sum_{n=1}^{+\infty}p(U=n)=\frac{1}{4}+\frac{5}{16}+\frac{21}{64}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{9}{16}+\frac{21}{64}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{9}{16}+\frac{21}{64}\times\frac{4}{3}=\frac{9}{16}+\frac{7}{16}=1$.

c) Pour $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 3$: $n\,p(U=n)=n\times\frac{21}{4^n}=\frac{21}{4}\times n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}>0$. La série de terme général $n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ est convergente donc la série de terme général $n\,p(U=n)$ est convergente donc absolument convergente ($n\,p(U=n)\geqslant 0$!)

Par conséquent $E(U)$ existe.

$E(U)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{5}{16}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{21}{4}\,n\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}+\frac{5}{8}+\frac{21}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-1\left(\frac{1}{4}\right)^{1-1}-2\left(\frac{1}{4}\right)^{2-1}\right)$

$E(U)=\frac{7}{8}+\frac{21}{4}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}-1-\frac{1}{2}\right]=\frac{7}{8}-\frac{21\times 3}{8}+\frac{21}{4}\times\frac{4^2}{3^2}=-7+\frac{28}{3}=\frac{7}{3}$.

$E(U)=\frac{7}{3}$.

Q2 a) $\pi(0,1)=1$ et ($\pi(0,1)=p(J_0=C_1)$)

$\pi(1,1)=\frac{1}{4}$ ($\pi(1,1)=p(J_1=C_1)$; il est passé de C_1 à C_1 sans passer par C_3 !)

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $n\geqslant 2$.

Si il est à l'instant n sur C_1 sans être passé avant sur C_3 cela signifie qu'à l'instant $n-1$ il est sur C_1 sans être passé avant sur C_3 ou qu'il est sur C_2 à l'instant $n-1$ sans être passé avant sur C_3 ce qui veut dire encore qu'il est à l'instant $n-2$ en C_1 sans être passé avant par C_3.

Par conséquent si nous notons A_n l'événement il est sur C_1 à l'instant n sans être passé avant par C_3 :

$\pi(n,1)=p(A_n)=p(A_{n-1}\text{ et }J_n=C_1)+p(A_{n-2}\text{ et }J_{n-1}=C_2\text{ et }J_n=C_1)$

$=p(J_n=C_1/A_{n-1})\,p(A_{n-1})+p(A_{n-2})\,p(J_{n-1}=C_2/A_{n-2})\,p(J_n=C_1\mid A_{n-2}\text{ et }J_{n-1}=C_2)$

$\pi(n,1)=\frac{1}{4}\pi(n-1,1)+\pi(n-2,1)\times\frac{1}{4}\times 1$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2\Rightarrow\pi(n,1)=\frac{1}{4}\left(\pi(n-1,1)+\pi(n-2,1)\right)$.

Posons pour simplifier : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\Pi(n,1)$

$u_0=1,\ u_1=1/4$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2 \Rightarrow u_n=\frac{1}{4}(u_{n-1}+u_{n-2})$; ou encore :

$u_0=1\ ,\ u_1=1/4$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=\frac{1}{4}(u_{n+1}+u_n)$

Il s'agit d'une récurrence linéaire d'ordre 2

$x\in\mathbb{C}$ et $x^2=\frac{1}{4}(x+1) \iff x=\frac{1+\sqrt{17}}{8}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{17}}{8}$

$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\alpha\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^n+\beta\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^n$

$1=u_0=\alpha+\beta$ et $\frac{1}{4}=u_1=\frac{\alpha+\beta}{8}+\frac{\sqrt{17}}{8}(\alpha-\beta)=\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{17}}{8}(\alpha-\beta)$; $\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha-\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$

$\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\frac{4}{\sqrt{17}}\ \frac{1+\sqrt{17}}{8}$. $\quad\beta=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{4}{\sqrt{17}}\ \frac{1-\sqrt{17}}{8}$

Donc $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ \Pi(n,1)=\frac{4}{\sqrt{17}}\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^{n+1}-\frac{4}{\sqrt{17}}\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^{n+1}}}$

b) Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$, B_n l'événement il est à l'instant n sur C_2 sans jamais être passé sur C_3.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Etre en C_2 à l'instant n sans être passé sur C_3 avant signifie que l'on est " en C_1 à l'instant $n-1$ sans être passé sur C_3 avant et qu'à l'instant n on se trouve sur C_2.

$B_n=A_{n-1}\cap(J_n=C_2)$.

$\Pi(n,2)=p(B_n)=p(A_{n-1}\cap(J_n=C_2))=p(J_n=C_2/A_{n-1})\,p(A_{n-1})=\frac{1}{4}\Pi(n-1,1)$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Pi(n,2)=\frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^n-\frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^n$

$\Pi(0,2)=0$ et $\frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^0-\frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^0=0$; la formule précédente vaut pour $n=0$.

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ \Pi(n,2)=\frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^n-\frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^n}}$

Un raisonnement analogue donne : $\Pi(0,4)=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Pi(n,4)=p(A_{n-1}$ et $J_n=C_4)=\cdots=\frac{1}{4}\Pi(n-1,1)$

Finalement : $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N},\ \Pi(n,4)=\Pi(n,2)}}=\frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^n-\frac{1}{\sqrt{17}}\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^n$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $p(V=n)=p(V=n/A_{n-1})\,p(A_{n-1})+p(V=n/B_{n-1})\,p(B_{n-1})+p(V=n/D_{n-1})\,p(D_{n-1})$

(D_n est l'événement il est sur C_4 à l'instant n sans être jamais passé sur C_3 ; $p(D_n)=\Pi(n,4)$)

Donc $p(V=n)=\frac{1}{4}\Pi(n-1,1)+0\times\Pi(n-1,2)+1\times\Pi(n-1,4)=\frac{1}{4}\Pi(n-1,1)+\Pi(n-1,4)$.

Supposons $n\geq 2$. $p(V=n)=\frac{1}{4}\Pi(n-1,1)+\frac{1}{4}\Pi(n-2,1)=\Pi(n,1)$

Notons que : $p(V=0)=0$ et $p(V=1)=\frac{1}{4}=\Pi(1,1)$

Donc $p(V=0)=0$ et $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ p(V=n)=\frac{4}{\sqrt{17}}\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^{n+1}-\frac{4}{\sqrt{17}}\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^{n+1}}}$

$\left|\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right|<1$ et $\left|\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right|<1$ donc les séries de terme général $n\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)^{n-1}$ et $n\left(\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)^{n-1}$ sont convergentes ; il en est de même pour les séries de terme général $n\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)^{n+1}$ et $n\left(\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)^{n+1}$ (multiplication par $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)^2$ et $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)^2$).

ceci assure la convergence de la série de terme général $\frac{4}{\sqrt{17}}n\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^{n+1}-\frac{4}{\sqrt{17}}n\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^{n+1}$ donc de la série de terme général $np(V=n)$.

Comme $np(V=n)\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série de terme général $np(V=n)$ est absolument convergente.

Donc $E(V)$ existe et

$$E(V)=\sum_{n=0}^{+\infty}np(V=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}np(V=n)=\frac{4}{\sqrt{17}}\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^2\sum_{n=1}^{+\infty}n\left[\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^{n-1}-\frac{4}{\sqrt{17}}\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^2\sum_{n=1}^{+\infty}n\left[\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^{n-1}=\frac{4}{\sqrt{17}}\,\frac{18+2\sqrt{17}}{64}\times\frac{1}{\left[1-\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right]^2}-\frac{4}{\sqrt{17}}\,\frac{18-2\sqrt{17}}{64}\,\frac{1}{\left[1-\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right]^2}$$

$$E(V)=\frac{4(18+2\sqrt{17})}{\sqrt{17}(7-\sqrt{17})^2}-\frac{4(18-2\sqrt{17})}{\sqrt{17}\,(7+\sqrt{17})^2}=\frac{4}{\sqrt{17}\,(49-17)^2}\left[(18+2\sqrt{17})(7+\sqrt{17})^2-(18-2\sqrt{17})(7-\sqrt{17})^2\right]$$

$$E(V)=\frac{4}{32^2\sqrt{17}}\left[2(9+\sqrt{17})(2)(33+7\sqrt{17})-2(9-\sqrt{17})(2)(33-7\sqrt{17})\right]=\frac{1}{64\sqrt{17}}\left[(9+\sqrt{17})(33+7\sqrt{17})-(9-\sqrt{17})(33-7\sqrt{17})\right]$$

$$E(V)=\frac{1}{64\sqrt{17}}\left[33\sqrt{17}+63\sqrt{17}+33\sqrt{17}+63\sqrt{17}\right]=\frac{2\times 36\times\sqrt{17}}{64\sqrt{17}}=3$$

$\underline{\underline{E(V)=3}}$

Exercice de cartable.. W est la var indiquant le premier instant $n\geq 1$ où le jeton retourne sur la case C_4.

Trouver la loi de W et calculer $E(W)$.

<u>Exercice d'informatique</u>.. Simuler la promenade du jeton entre les instants 0 et n (n est donné par l'utilisateur).

Il serait intéressant de visualiser le déplacement du jeton sur l'écran. Je propose de faire un affichage décalé sur le modèle suivant qui permet de lire sur quelle case se trouve le jeton à l'instant i.

C_1	C_2	C_3	C_4
0			
	1		
2			
			3
		4	
	5		
6			

N'apparait à l'écran que les temps 0, 1, 2, 3, ... (ne pas oublier les boucles de temporisation !)

Il serait aussi intéressant de récupérer la fréquence f_i du passage du jeton sur C_i (ceci fournirait pour n assez grand une estimation de $q(n,i)$)

A la fin de la promenade, "l'utilisateur efface l'écran" et f_1, f_2, f_3, f_4 apparaissent.

Rappel.. Random(x) fournit un entier appartenant à $[0,x[$.

U (resp. V) indique le premier instant n ($n \geqslant 1$) où le jeton retourne sur C_2 (resp. C_3).
Intéressons nous donc à W ! W indiquant le premier instant n ($n \geqslant 1$) où le jeton retourne sur C_4.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons a_n la probabilité pour que le jeton soit placé à l'instant n sur C_1 sans jamais avoir été placé au cours des instants $0, 1, 2, \dots, n$ sur la case C_4.
$a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{4}$ et $a_2 = \frac{5}{16}$ $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \dots C_1C_2C_1 \text{ ou } C_1C_1C_1\right)$

Un raisonnement analogue à celui de III Q 2 a donné : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3} = \frac{1}{4}(a_{n+2} + a_{n+1} + a_n)$

Donc $\underline{\underline{a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{4},\ a_2 = \frac{5}{16} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+3} = \frac{1}{4}(a_{n+2} + a_{n+1} + a_n)}}$.

$\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(W = n) = \frac{1}{4} a_{n-1}}}$ (Tant à l'instant n pour la 1ère fois en C_4 il était donc à l'instant $n-1$ en C_1 sans jamais avoir été en C_4).

L'axiomatique probabiliste assure la convergence de la série de terme général $p(W=n)$ donc de la série de terme général a_n.
Assurons nous que $\sum_{n=1}^{+\infty} p(W=n) = 1$ c'est à dire que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 4$
Posons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
convergences claires...

$$S = a_0 + a_1 + a_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+3} = a_0 + a_1 + a_2 + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

$S = a_0 + a_1 + a_2 + \frac{1}{4}(S - a_0 - a_1) + \frac{1}{4}(S - a_0) + \frac{1}{4} S$; $\left(1 - \frac{3}{4}\right) S = \frac{1}{2} a_0 + \frac{3}{4} a_1 + a_2$
$S = 2a_0 + 3a_1 + 4a_2 = 2 + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 4$!

$$\underline{\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} p(W=n) = 1.}}$$

Etudions l'espérance de W. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\,p(W=n) = \frac{1}{4} n a_{n-1} = \frac{1}{4}(n-1) a_{n-1} + \frac{1}{4} a_{n-1}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n\,p(W=n) \geqslant 0$ donc l'existence de $E(W)$ résultera de la convergence de la série de T.G. $n\,p(W=n)$ ... qui résultera de la convergence de la série de T.G. $\frac{1}{4}(n-1)a_{n-1}$ ou $\frac{1}{4} n a_n$ (... la série de T.G. $\frac{1}{4} a_{n-1}$ converge)
Imaginons un instant que la série de T.G. $n a_n$ converge et posons $S' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n$
calculons S'

$S' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n = a_1 + 2a_2 + \sum_{n=3}^{+\infty} n a_n = a_1 + 2a_2 + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)a_{n+3}$

$S' = a_1 + 2a_2 + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)\frac{1}{4}(a_{n+2}+a_{n+1}+a_n)$

$4S' = 4a_1 + 8a_2 + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)a_{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty}n a_n + 3\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$

$4S' = 4a_1 + 8a_2 + (S'-a_1) + (S-a_1-a_0) + S' + 2(S-a_0) + S' + 3S$

$4S' = 2a_1 + 8a_2 - 3a_0 + 3S' + 6S$; $S' = 2a_1 + 8a_2 - 3a_0 + 6S$

$S' = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 3 + 24 = 24.$

On a donc $E(W) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(n)a_{n-1} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1} = \frac{1}{4}(S'+S) = \frac{28}{4} = 7$

$\underline{\underline{E(W) = 7}}$

Il ne reste plus (!!) qu'à prouver la convergence de la série de terme général $n a_n$.

Rappel... $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{5}{16}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3} = \frac{1}{4}(a_{n+2}+a_{n+1}+a_n)$.

Donc $a_3 = \frac{25}{64}$, $a_4 = \frac{61}{256}$, $a_5 = \frac{241}{1024}$, $a_6 = \frac{885}{4096}$.

<u>1ère piste</u>. Nous avons $a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6$

Une récurrence simple donne alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3 \Rightarrow a_n \geq a_{n+1}$ (récurrence d'ordre 3)

Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3 \Rightarrow a_{n+3} = \frac{1}{4}(a_{n+2}+a_{n+1}+a_n) \leq \frac{3}{4}a_n$.

On obtient alors (toujours par récurrence) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \Rightarrow a_{3n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}a_3 = \frac{4}{3}a_3\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \Rightarrow a_{3n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}a_4 = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{3}}a_4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+\frac{1}{3}}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \Rightarrow a_{3n+2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}a_5 = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{3}}a_5\left(\frac{3}{4}\right)^{n+\frac{2}{3}}$

Ainsi $n \in \mathbb{N}^*$: $a_{3n} \leq \frac{4}{3}a_3\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^{3n}$

$a_{3n+1} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{3}}a_4\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^{3n+1}$

$a_{3n+2} \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{3}}a_5\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^{3n+2}$

Ceci suffit pour dire que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \Rightarrow a_n \leq \lambda\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^n$

Remarque... $\frac{4}{3}a_3 \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{5/3}a_5 \geq \left(\frac{4}{3}\right)^{4/3}a_4$; on peut prendre $\lambda = \frac{4}{3}a_3 = \frac{25}{48}$

En fait en prenant $\lambda = 1$ on obtient $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}}}$, $a_n \leq \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n a_n \leq n\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^n$. La série de terme général $n\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^n$ est convergente car $\left|\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right| < 1$ donc la série de terme général $n a_n$ converge ... cqfd.

<u>2ème piste</u>.. Pour dès le départ à obtenir $a_n \leqslant \lambda r^n$ avec $0 < r < 1$

on a l'idée de chercher λ et r tels que : $\left.\begin{array}{l} a_n \leqslant \lambda r^n \\ a_{n+1} \leqslant \lambda r^{n+1} \\ a_{n+2} \leqslant \lambda r^{n+2} \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n+3} \leqslant \lambda r^{n+3}$

Pour cela il suffisait d'avoir $\frac{1}{4}(\lambda r^n + \lambda r^{n+1} + \lambda r^{n+2}) \leqslant \lambda r^{n+3}$

Il suffisait donc d'avoir $\frac{1}{4}(1 + r + r^2) \leqslant r^3$ c'est à dire $4r^3 - r^2 - r - 1 \geqslant 0$ (l'équation caractéristique n'est pas loin !)

Etudions rapidement $f : x \mapsto 4x^3 - x^2 - x - 1$ sur $[0,1]$. $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = 12x^2 - 2x - 1$

x	0		$\frac{1+\sqrt{13}}{12}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	2

les arguments usuels donne $\alpha \in]0,1[$ tel que : $\forall x \in [0,\alpha[$, $f(x) < 0$, $f(\alpha) = 0$ et $\forall x \in]\alpha,1]$, $f(x) > 0$. Par dichotomie : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$

Prenons maintenant $r = 0{,}9$ (par exemple !) et $\lambda = 1$ (car $a_0 = 1$)

Alors $a_0 \leqslant r^0$, $a_1 = \frac{1}{4} \leqslant r^1$, $a_2 = \frac{5}{16} \leqslant r^2$; de plus : $a_n \leqslant r^n$, $a_{n+1} \leqslant r^{n+1}$ et $a_{n+2} \leqslant r^{n+2}$

donne $a_{n+3} \leqslant r^{n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par récurrence d'ordre 3 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant r^n$ ... pour la suite voir plus haut.

Remarque.. $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \simeq 0{,}90856$! Exercice de contrôle.. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $b_{n+3} = \frac{1}{4}(b_{n+2} + b_{n+1} + b_n)$. Etudier la convergence de cette suite et de la série de T.G. b_n.

⚠ les programmes qui suivent sont sans malice et peuvent être très largement améliorés.

<u>1er Programme</u> .. MYKONOS. Calcule les termes d'une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+4} = \frac{1}{4}(P_{n+3} + P_{n+2} + P_{n+1} + P_n)$

L'utilisateur donne P_0, P_1, P_2, P_3 et l'indice du dernier terme à calculer.

Particularité.. L'ordinateur affiche les résultats "par paquets de 20".

<u>2ème Programme</u> .. HEC88 V1 Simule la promenade aléatoire du jeton

L'utilisateur donne la borne supérieure de l'intervalle de temps.

L'ordinateur affiche la case où se trouve le jeton à l'instant t

Il donne pour finir la fréquence de positionnement du jeton sur C_i

Particularités.. . a été écrit sans tableau.

. affichage assez lent.

<u>3e Programme</u> .. HEC88 V2 même chose que V1 avec tableaux

Particularités... Affiche lentement la position du jeton entre les instants 0 et 20 et s'arrête. L'utilisateur le relance et l'affichage se déroule normalement jusqu'à la fin (c'est à dire très vite)

. Il donne aussi le nombre de passages sur C_i.

<u>4ème Programme</u>.. HEC88 V3 ... voir plus loin

```
program mykonos;

var n,i:integer;b:real;a:array[0..3] of real;

begin
   clrscr;
   for i:=0 to 3 do
   begin
     write('Donnez le terme d''indice ',i,'  ');readln(a[i]);
     end;

   repeat
     write('Donnez l''indice N du dernier terme (N>=4) ');readln(n);
   until n>=4;
   clrscr;

   for i:=0 to 3 do
   writeln('p(',i,')=',a[i]:2:9);

   i:=3;
   repeat
   i:=i+1;
   b:=0.25*(a[0]+a[1]+a[2]+a[3]);
   writeln('p(',i,')=',b:2:9);
   a[0]:=a[1];a[1]:=a[2];a[2]:=a[3];a[3]:=b;
   if ((i+1)mod(20)=0) and (i<n) then
      begin writeln;writeln;
            write('Pour poursuivre validez  ');
            read(b);
            clrscr;
       end;

    until(i>=n);

   end.
```

Exécution.

```
Donnez le terme d'indice 0  1
Donnez le terme d'indice 1  0.25
Donnez le terme d'indice 2  0.3125
Donnez le terme d'indice 3  0.390625
Donnez l'indice N du dernier terme (N>=4) 30
```

```
p(0)=1.000000000
p(1)=0.250000000
p(2)=0.312500000
p(3)=0.390625000
p(4)=0.488281250
p(5)=0.360351563
p(6)=0.387939453
p(7)=0.406799316
p(8)=0.410842896
p(9)=0.391483307
p(10)=0.399266243
p(11)=0.402097940
p(12)=0.400922596
p(13)=0.398442522
p(14)=0.400182325
p(15)=0.400411346
p(16)=0.399989697
p(17)=0.399756473
p(18)=0.400084950
p(19)=0.400060619
```

```
Pour poursuivre validez


p(20)=0.399972967
p(21)=0.399968747
p(22)=0.400021516
p(23)=0.400006030
p(24)=0.399992383
p(25)=0.399997244
p(26)=0.400004369
p(27)=0.400000006
p(28)=0.399998500
p(29)=0.400000030
p(30)=0.400000726
```

```
program HEC88V1;

var a,b,c,d,p,i,n,h,j:integer;

begin
  clrscr;
  repeat
  write('Donnez la borne superieure n de l''intervalle de temps (n>=1) ');
  readln(n);writeln;
  until n>=1;

  randomize;a:=1;b:=0;c:=0;d:=0;i:=0;h:=20000;
  writeln('A l''instant ',0,' il est en         C1');

  repeat
  p:=random(4)+1;
  if (p=4) and (i<n) then
    begin
    d:=d+1;
    i:=i+1;for j:=1 to h do;
    writeln('A l''instant ',i:2,' il est en                                    C',p);
    p:=p-1;
    end;
  if (p=3) and (i<n) then
    begin
    c:=c+1;
    i:=i+1;for j:=1 to h do;
    writeln('A l''instant ',i:2,' il est en                           C',p);
    p:=p-1;
    end;
  if (p=2) and (i<n) then
  begin
  b:=b+1;
  i:=i+1;for j:=1 to h do;
  writeln('A l''instant ',i:2,' il est en                C',p);
  p:=p-1;
  end;
if (p=1)and (i<n) then
  begin
  a:=a+1;
  i:=i+1;for j:=1 to h do;
  writeln('A l''instant ',i:2,' il est en          C',p);
  end;
  until i=n;

writeln;
write('Pour continuer tapez un entier ');
read(p);clrscr;n:=n+1;
writeln('La fréquence de positionnement sur C1 est : ',a/n:1:7);
writeln('La fréquence de positionnement sur C2 est : ',b/n:1:7);
writeln('La fréquence de positionnement sur C3 est : ',c/n:1:7);
writeln('La fréquence de positionnement sur C4 est : ',d/n:1:7);
end.
```

Voir exécution p 13

HEC 89 V1

```
Donnez la borne superieure n de l'intervalle de temps (n>=1) 20

A l'instant  0 il est en     C1
A l'instant  1 il est en                 C4
A l'instant  2 il est en             C3
A l'instant  3 il est en         C2
A l'instant  4 il est en     C1
A l'instant  5 il est en         C2
A l'instant  6 il est en     C1
A l'instant  7 il est en     C1
A l'instant  8 il est en     C1
A l'instant  9 il est en                 C4
A l'instant 10 il est en             C3
A l'instant 11 il est en         C2
A l'instant 12 il est en     C1
A l'instant 13 il est en         C2
A l'instant 14 il est en     C1
A l'instant 15 il est en     C1
A l'instant 16 il est en         C2
A l'instant 17 il est en     C1
A l'instant 18 il est en             C3
A l'instant 19 il est en         C2
A l'instant 20 il est en     C1

Pour continuer tapez un entier

La fréquence de positionnement sur C1 est : 0.4761905
La fréquence de positionnement sur C2 est : 0.2857143
La fréquence de positionnement sur C3 est : 0.1428571
La fréquence de positionnement sur C4 est : 0.0952381
```

pour n=1000 →

HEC 89 V2

```
A l'instant  0 le jeton est sur     c1
A l'instant  1 le jeton est sur          c2
A l'instant  2 le jeton est sur     c1
A l'instant  3 le jeton est sur          c2
A l'instant  4 le jeton est sur     c1
A l'instant  5 le jeton est sur          c2
A l'instant  6 le jeton est sur     c1
A l'instant  7 le jeton est sur          c2
A l'instant  8 le jeton est sur     c1
A l'instant  9 le jeton est sur     c1
A l'instant 10 le jeton est sur               c3
A l'instant 11 le jeton est sur          c2
A l'instant 12 le jeton est sur     c1
A l'instant 13 le jeton est sur          c2
A l'instant 14 le jeton est sur     c1
A l'instant 15 le jeton est sur          c2
A l'instant 16 le jeton est sur     c1
A l'instant 17 le jeton est sur                    c4
A l'instant 18 le jeton est sur               c3
A l'instant 19 le jeton est sur          c2
A l'instant 20 le jeton est sur     c1

Pour continuer validez

        ...

Entre les instants 0 et 1000,

le nombre de passage(s) sur la case 1 est : 405
le nombre de passage(s) sur la case 2 est : 307
le nombre de passage(s) sur la case 3 est : 196
le nombre de passage(s) sur la case 4 est : 93

la fréquence de passage sur la case 1 est : 0.4045954
la fréquence de passage sur la case 2 est : 0.3066933
la fréquence de passage sur la case 3 est : 0.1958042
la fréquence de passage sur la case 4 est : 0.0929071
```

```
program HEC89V2;

var i,n,p,j:integer;
var c:array[1..4] of integer;
var b:array[1..4] of string[30];

begin

   clrscr;randomize;
   repeat
   write('Donnez la borne supérieure de l''intervalle de temps (n>=1) ');
   readln(n);writeln;
   until n>=1;
   clrscr;

   for i:=1 to 4 do c[i]:=0;p:=1;
   b[1]:='        ';b[2]:=b[1]+b[1];b[3]:=b[1]+b[2];b[4]:=b[1]+b[3];

   for i:=0 to n do
     begin
     writeln('A l''instant ',i:2,' le jeton est sur ',b[p],'o',p);
     if i<=10 then begin
                   for j:=0 to 30000 do;
                   for j:=0 to 30000 do;
                   end;
                   if i=20 then begin
                   writeln;writeln('Pour continuer validez ');readln
                   end;

     c[p]:=c[p]+1;
     if p=1 then p:=random(4)+1
             else p:=p-1;
     end;

    writeln;write('Pour continuer validez ');readln;clrscr;
    writeln('Entre les instants 0 et ',n,'.');writeln;
    for i:=1 to 4 do
       writeln('le nombre de passage(s) sur la case ',i,' est : ',c[i]);
    writeln;
    for i:=1 to 4 do
       writeln('la frequence de passage sur la case ',i,' est : ',c[i]/(n+1):1:1);

end.
```

Voir exécution p13

Programme HEC89V3

Simule plusieurs fois la promenade aléatoire et calcule la moyenne du temps d'apparition du jeton pour la première fois sur C_i $(1 < i \leq 4)$

```
program HEC73;

var r,i,j,p,t:integer;
var c,s:array[2..4] of real;


begin
   clrscr;randomize;for i:=2 to 4 do c[i]:=0;

   repeat
      write('Donnez le nombre N de fois que vous souhaitez recommencer l''expérienc
      readln(r);clrscr;
    until r>0;

    i:=0;

    repeat
      i:=i+1;p:=1;t:=0;for j:=2 to 4 do s[j]:=0;
      repeat
        t:=t+1;
        if p=1 then p:=random(4)+1
               else p:=p-1;
        if (p<>1) and (s[p]=0) then s[p]:=t;
       until s[2]*s[3]*s[4]<>0;
     for j:=2 to 4 do c[j]:=c[j]+s[j]
     until i=r;
     writeln('Nous avons simulé ',r,' fois la promenade aléatoire,');
     writeln('la moyenne du temps d''apparition du jeton pour la première fois ');
     writeln;
     for j:=2 to 4 do
     writeln(' sur la case C',j,' est :', c[j]/r);
end.
```

```
Nous avons simulé 100 fois la promenade aléatoire,
la moyenne du temps d'apparition du jeton pour la première fois

 sur la case C2 est :  2.2700000000E+00
 sur la case C3 est :  2.6900000000E+00
 sur la case C4 est :  7.0400000000E+00
```

```
Nous avons simulé 1000 fois la promenade aléatoire,
la moyenne du temps d'apparition du jeton pour la première fois

 sur la case C2 est :  2.3420000000E+00
 sur la case C3 est :  3.1300000000E+00
 sur la case C4 est :  6.6260000000E+00
```

```
Nous avons simulé 10000 fois la promenade aléatoire,
la moyenne du temps d'apparition du jeton pour la première fois

 sur la case C2 est :  2.3395000000E+00
 sur la case C3 est :  2.9680000000E+00
 sur la case C4 est :  6.9831000000E+00
```

pour mémoire $E(U) = \frac{7}{3}$

$E(V) = 3$

$E(W) = 7$