PARTIE I

Q1, Q2 et Q3 ! $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -\frac{\cos x}{\sin x}$ sont continues et dérivables sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ donc f est continue et dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.

$\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x}$.

$\sin x - x\cos x = x - \frac{x^3}{6} - x(1-\frac{x^2}{2}) + o(x^3) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$; $\sin x - x\cos x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

donc $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{(1/3)x^3}{x\sin x} \sim \frac{(1/3)x^3}{x^2} = \frac{1}{3}x$; par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = 0 = f(0)$.

mieux : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{3}\frac{x}{x} = \frac{1}{3}$; par conséquent : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{3}$

Finalement : f est continue et dérivable en 0. $f'(0) = \frac{1}{3}$.

Pour finir : f est continue et dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

$f'(0) = \frac{1}{3}$ et $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$.

dérivée de la cotangente !

f' est clairement continue sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.

$\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^4} \underset{0}{\sim} \frac{x^3/6}{x^4}(x+\sin x) = \frac{1}{6}\Big(1 + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\Big)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-\sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{1}{3} = f'(0)$

$x - \sin x \sim x^3/6$

Finalement $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$; f' est continue en 0.

Conclusion... f est donc C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. $f'(0) = \frac{1}{3}$ et $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$.

(Q4) $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = \frac{1}{x^2\sin^2 x}(x-\sin x)(x+\sin x) > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > \sin x$!) et $f'(0) = \frac{1}{3}$

f est donc strictement croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2/\pi$

Remarque.. $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \le f(x) \le \frac{2}{\pi}$ donc $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \le \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{2}{\pi}$.

PARTIE II

(Q1) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. $A_n X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \\ \vdots \\ x_{n-2} + x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$

De manière plus rigoureuse ! Notons y_k la k^{e} coordonnée de $A_n X$.

$y_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} x_j$. $a_{kj} = 1$ si $|k-j| = 1$ et $a_{kj} = 0$ si $|k-j| \neq 1$.

donc $\underline{y_1 = x_2}$ ($|1-j| = 1 \Leftrightarrow j = 2$)

$\underline{y_k = x_{k-1} + x_{k+1} \text{ pour } k \in [\![2, n-1]\!]}$ ($|k-j| = 1 \Leftrightarrow j = k-1$ ou $j = k+1$)

$\underline{y_n = x_{n-1}}$ ($|n-j| = 1 \Leftrightarrow j = n-1$)

$q_n(X) = {}^tX A_n X = {}^tX Y$;

$q_n(X) = {}^tXY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1x_2 + \sum_{k=2}^{n-1} x_k(x_{k-1}+x_{k+1}) + x_n x_{n-1}$;

$q_n(X) = x_1x_2 + \sum_{k=2}^{n-1} x_kx_{k-1} + \sum_{k=2}^{n-1} x_kx_{k+1} + x_nx_{n-1}$;

$\underline{\underline{q_n(X)}} = x_1x_2 + \sum_{k=1}^{n-2} x_{k+1}x_k + \sum_{k=2}^{n-1} x_kx_{k+1} + x_nx_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1}x_k + \sum_{k=1}^{n-1} x_kx_{k+1} = \underline{\underline{2\sum_{k=1}^{n-1} x_kx_{k+1}}}$.

Q2 a) $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. $q_2(X) = 2x_1x_2$ et ${}^tXX = x_1^2 + x_2^2$.

$\underline{\underline{n=2}}$ $\quad (x_1-x_2)^2 \geq 0$ donne $x_1^2+x_2^2 \geq 2x_1x_2$ et $(x_1+x_2)^2 \geq 0$ donne : $2x_1x_2 \geq -x_1^2-x_2^2$

Donc : $-(x_1^2+x_2^2) \leq 2x_1x_2 \leq x_1^2+x_2^2$.

Par conséquent : $\underline{\underline{-{}^tXX \leq q_2(X) \leq {}^tXX}}$

b) $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$! $A_2^2 = I$. $\mathrm{Spec}(A_2) \subset \{-1,1\}$!

clairement : $A_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $1 \in \mathrm{Spec}(A_2)$; $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in F_1$

$A_2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $-1 \in \mathrm{Spec}(A_2)$; $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in F_{-1}$

Donc $\underline{\mathrm{Spec}(A_2) = \{-1,1\}}$. Nous sommes en dimension 2 donc A_2 est diagonalisable et $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) = F_1 \oplus F_{-1}$. On a alors $\dim F_1 = \dim F_{-1} = 1$. $\underline{\underline{F_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \text{ et } F_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)}}$

c) Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ avec $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$|q_2(X)| = {}^tXX \iff |2x_1x_2| = x_1^2+x_2^2 \iff 0 = |x_1|^2+|x_2|^2-2|x_1||x_2| \iff (|x_1|-|x_2|)^2 = 0$

$|q_2(X)| = {}^tXX \iff |x_1| = |x_2| \iff x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2 \iff X \in F_1$ ou $X \in F_{-1}$

$\{X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid |q_2(X)| = {}^tXX\} = F_1 \cup F_{-1}$

ou encore : si $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $\underline{\underline{|q_2(X)| = {}^tXX \text{ ssi } X \text{ est vecteur propre de } A_2}}$

Q3 Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$!

a) D'après ce qui précède : $\forall i \in [\![1,n-1]\!]$ $-(x_i^2+x_{i+1}^2) \leq 2x_ix_{i+1} \leq x_i^2+x_{i+1}^2$

Par sommation : $\underline{\underline{-\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i+1}^2) \leq q_n(X) \leq \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i+1}^2)}}$

b) $\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i+1}^2) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}^2 = {}^tXX - x_n^2 + ({}^tXX - x_1^2) = 2\,{}^tXX - (x_n^2+x_1^2) \leq 2\,{}^tXX$

$-\sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i+1}^2) = -2\,{}^tXX + (x_n^2+x_1^2) \geq -2\,{}^tXX$

Finalement : $\underline{\underline{-2\,{}^tXX \leq q_n(X) \leq 2\,{}^tXX}}$

b) suite. Si $X=0$: ${}^tXX = 0 = q_n(X)$ donc $|q_n(X)| = 2\,{}^tXX$

Réciproquement supposons $|q_n(X)| = 2\,{}^tXX$.

Pour fixer les idées supposons $q_n(X) = 2\,{}^tXX$ (même démonstration au presque ! pour $q_n(X) = -2\,{}^tXX$)

$$q_n(X) \leq \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{voir plus haut}}}{=} 2\,{}^tXX - (x_n^2 + x_1^2) \leq 2\,{}^tXX = q_n(X) \;!$$

Donc $q_n(X) = 2\,{}^tXX - (x_n^2+x_1^2) = 2\,{}^tXX$, on a donc $x_n^2 + x_1^2 = 0$; c'est à dire : $x_1 = x_n = 0$

On a en plus : $2\,{}^tXX = q_n(X) = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2 + x_{i+1}^2)$; $2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i^2+x_{i+1}^2)$;

$0 = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2$; $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $x_i = x_{i+1}$. Par conséquent : $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$! $X=0$

Finalement : $\underline{\underline{|q_n(X)| = 2\,{}^tXX \iff X = 0}}$

c) $X \neq 0$ et $A_nX = \lambda X$. Par conséquent : $-2\,{}^tXX < q_n(X) < 2\,{}^tXX$

$q_n(X) = {}^tX A_n X = {}^tX \lambda X = \lambda\,{}^tXX$; donc $-2\,{}^tXX < \lambda\,{}^tXX < 2\,{}^tXX$ (1)

X n'étant pas nul : ${}^tXX$ n'est pas nul (${}^tXX = $ " $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ") ; mieux ${}^tXX > 0$

Finalement en divisant par ${}^tXX$ (1) on obtient : $\underline{\underline{-2 < \lambda < 2}}$

ce qui signifie : $\mathrm{Spec}(A_n) \subset]-2, 2[$.

(Q4) Diagonalisation de la matrice A_n.

a) L'équation $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 = \lambda z - 1$ a même ensemble de solutions que l'équation $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 - 2\cos t\, z + 1 = 0$. Les solutions de cette équation sont e^{it} et e^{-it}

Par conséquent : E_λ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 qui admet $((\cos kt)_{k\geq 0}, (\sin kt)_{k\geq 0})$ pour base.

Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ un élément de E_λ. $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = a\cos kt + b\sin kt$.

$u_0 = a + b\times 0 = a$ et $u_1 = a\cos t + b\sin t$, $b = \dfrac{u_1 - a\cos t}{\sin t} = \dfrac{u_1 - u_0\cos t}{\sin t}$ ($t \in]0,\pi[$)

Donc $\underline{\underline{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = u_0 \cos kt + \dfrac{u_1 - u_0\cos t}{\sin t} \times \sin kt.}}$

b) Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ un élément de E_λ. $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = u_0\cos kt + \dfrac{u_1 - u_0\cos t}{\sin t}\sin kt$.

$$(u_k)_{k\geq 0} \in F_\lambda(n) \iff \begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{et} \\ 0 = u_{n+1} = u_0\cos(n+1)t + \dfrac{u_1 - u_0\cos t}{\sin t}\sin(n+1)t = u_1\dfrac{\sin(n+1)t}{\sin t}. \end{cases}$$

$(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n) \iff u_0=0$ et $u_1\times \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}=0 \iff u_0=0$ et $u_1\times \sin(n+1)t=0$

1er cas... $\sin(n+1)t\neq 0$. $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n) \iff u_0=u_1=0 \underset{\underset{(u_k)_{k\geq 0}\in E_\lambda}{\uparrow}}{\iff} (u_k)_{k\geq 0}=0_{E_\lambda}$

Donc $F_\lambda(n)=\{0_{E_\lambda}\}$

2ème cas... $\sin(n+1)t=0$. $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)\iff u_0=0$

Montrons alors que $(u_k)_{k\geq 0}\in \mathrm{Vect}((\sin kt)_{k\geq 0})$.

Soit $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$; $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k \underset{\underset{u_0=0}{\uparrow}}{=} \frac{u_1}{\sin t}\times \sin kt$ donc $(u_k)_{k\geq 0}\in \mathrm{Vect}((\sin kt)_{k\geq 0})$.

Soit $(u_k)_{k\geq 0}\in \mathrm{Vect}((\sin kt)_{k\geq 0})$. $\exists a\in\mathbb{R}$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_k=a\sin kt$, donc $u_0=0$, $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$.

Conclusion... Si $(n+1)t\equiv 0\ (\pi)$: $F_\lambda(n)=\mathrm{Vect}((\sin kt)_{k\geq 0})$

Si $(n+1)t\not\equiv 0\ (\pi)$: $F_\lambda(n)=\{0_{E_\lambda}\}$

c) "Clarifions" cette question calamiteuse. Considérons $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Associons à X la suite $(u_k)_{k\geq 0}$ définie par :

$u_0=0$, $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $u_k=x_k$, $u_{n+1}=0$ et $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_{n+k+2}=\lambda u_{n+k+1}-u_{n+k}$.

Montrons, simplement que : $A_nX=\lambda X \iff (u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$.

$$A_nX=\lambda X \iff \begin{cases} x_2=\lambda x_1\\ x_{k-1}+x_{k+1}=\lambda x_k \text{ pour } k\in[\![2,n-1]\!]\\ x_{n-1}=\lambda x_n\end{cases} \iff \begin{cases} x_2=\lambda x_1\\ x_{k+1}=\lambda x_k-x_{k-1} \text{ pour } k\in[\![2,n-1]\!]\\ x_{n-1}=\lambda x_n\end{cases}$$

→ Supposons $A_nX=\lambda X$. Montrons que $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$. Il suffit de montrer que : $(u_k)_{k\geq 0}\in E_\lambda$ avec : $u_0=u_{n+1}=0$!

Montrons donc que : $\forall k\in\mathbb{N}$, $u_{k+2}=\lambda u_{k+1}-u_k$; c'est déjà clair si $k\geq n$ (voir définition de $(u_k)_{k\geq 0}$). Reste à vérifier que : $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $u_{k+2}=\lambda u_{k+1}-u_k$

$\forall k\in[\![2,n-1]\!]$, $x_{k+1}=\lambda x_k-x_{k-1}$ donc,

$\forall k\in[\![1,n-2]\!]$, $x_{k+2}=\lambda x_{k+1}-x_k$; par conséquent $\forall k\in[\![1,n-2]\!]$, $u_{k+2}=\lambda u_{k+1}-u_k$.

Reste les cas $k=0$ et $n-1$

$u_2=x_2=\lambda x_1=\lambda u_1=\lambda u_1-u_0$ (car $u_0=0$). $u_{n+1}=0 \overset{!}{=} \lambda x_n-x_{n-1}=\lambda u_n-u_{n-1}$

ceci achève de prouver que $(u_k)_{k\geq 0}\in E_\lambda$ et donc que $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$ car $u_0=u_{n+1}=0$

→ Réciproquement supposons que $(u_k)_{k\geq 0}\in F_\lambda(n)$ et vérifions que $A_nX=\lambda X$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{k+2} = \lambda u_{k+1} - u_k$

Donc $x_1 = u_1 = \lambda u_1 - u_0 = \lambda u_1 - 0 = \lambda x_1$

Si $k \in [\![2, n-1]\!]$, $x_{k+1} \underset{\substack{\uparrow \\ 3 \leq k+1 \leq n}}{=} u_{k+1} = \lambda u_k - u_{k-1} \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \leq k \leq n-1 \\ 1 \leq k-1 \leq n-2}}{=} \lambda x_k - x_{k-1}$

Enfin : $x_{n-1} = u_{n-1} \underset{\substack{\uparrow \\ u_{n+1} = \lambda u_n - u_{n-1}}}{=} \lambda u_n - u_{n+1} = \lambda x_n - 0 = \lambda x_n$.

Finalement $x_2 = \lambda x_1$, $\forall k \in [\![2, n-1]\!]$, $x_{k+1} = \lambda x_k - x_{k-1}$ et $x_{n-1} = \lambda x_n$; donc $AX = \lambda X$

d) Analyse.. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(A_n)$. $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $(u_k)_{k \geq 0}$ est la suite associée à X. $(u_k)_{k\geq 0} \in F_\lambda(u)$ et $(u_k)_{k\geq 0}$ n'est

pas la suite nulle donc $F_\lambda(u) \neq \{0_{E_\lambda}\}$ donc $(n+1)t \equiv 0 \ (\pi)$.

Synthèse.. Supposons $(n+1)t \equiv 0$. $F_\lambda(u) \neq \{0_{E_\lambda}\}$. Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ un élément

non nul de $F_\lambda(u)$. Posons $x_i = u_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

$(u_k)_{k\geq 0}$ est la suite associée à $X = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ et $(u_k)_{k\geq 0} \in F_\lambda(u)$; par conséquent $AX = \lambda X$.

x_1 n'est pas nul ($u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 0 \Rightarrow u_3 = u_0 = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, u_k = 0$!) donc $X \neq 0$.

Par conséquent $\lambda \in \mathrm{Spec}(A_n)$.

Conclusion. $\mathrm{Spec}(A_n) \subset]-2, 2[$. Soit $\lambda \in]-2,2[$. $\exists t \in]0, \pi[$, $\lambda = 2\cos t$.

$\lambda \in \mathrm{Spec}(A_n) \Leftrightarrow (n+1)t \equiv 0 \ (\pi) \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z}$, $t = \frac{p\pi}{n+1} \underset{\substack{\uparrow \\ t \in]0,\pi[}}{\Leftrightarrow} \exists p \in [\![1, n]\!]$, $t = \frac{p\pi}{n+1}$.

Finalement : $\underline{\mathrm{Spec}(A_n) = \left\{ 2\cos \frac{p\pi}{n+1} \ ; \ p \in [\![1, n]\!] \right\}}$.

Soit $\lambda = 2\cos\theta_p$ avec $\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}$ et $p \in [\![1, n]\!]$. $\lambda \in \mathrm{Spec}(A_n)$.

Soit $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $(u_k)_{k\geq 0}$ la suite associée.

$AX = \lambda X \Leftrightarrow (u_k)_{k\geq 0} \in F_\lambda(u) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_k = a \sin k\theta_p \Rightarrow X \in \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{bmatrix} \right)$.

$F_\lambda \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{bmatrix} \right)$. Comme $\dim F_\lambda \geq 1$: $F_\lambda = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{bmatrix} \right)$.

ceci répond largement à la question !!

e) $\forall p \in [\![1, n]\!]$, $F_{2\cos\theta_p} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{bmatrix} \right) = \mathrm{Vect}(X_p)$.

Q5 a) $A_nX=\lambda X$ et $A_nY=\mu Y$. Multiplions la 1ère par ${}^tY$ et la seconde par ${}^tX$.

${}^tYA_nX=\lambda\,{}^tYX$ et ${}^tXA_nY=\mu\,{}^tXY$

Transposons ${}^tYA_nX=\lambda\,{}^tYX$; on obtient : ${}^tX\,{}^tA_nY=\lambda\,{}^tXY$ $\quad ({}^t({}^tY)=Y)$.

Or A_n est symétrique donc ${}^tA_n=A_n$.

Finalement ${}^tXA_nY=\lambda\,{}^tXY$ et ${}^tXA_nY=\mu\,{}^tXY$. $\lambda\,{}^tXY=\mu\,{}^tXY$. ${}^tXY=0$ car $\lambda\neq\mu$.

Morale .. 2 vecteurs propres associés à 2 valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Soit $(p,q)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $p\neq q$

$X=\begin{bmatrix}\sin\theta_p\\ \sin 2\theta_p\\ \vdots\\ \sin n\theta_p\end{bmatrix}$ est un vecteur propre associé à $\lambda=2\cos\theta_p$ et $Y=\begin{bmatrix}\sin\theta_q\\ \sin 2\theta_q\\ \vdots\\ \sin n\theta_q\end{bmatrix}$ est associé à la valeur propre $\mu=2\cos\theta_q$.

Donc ${}^tXY=0$ car $\lambda\neq\mu$. Finalement $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta_p\sin k\theta_q=0}}$.

b) Soit $p\in[\![1,n]\!]$, $z=e^{2i\theta_p}=e^{i\frac{2p\pi}{n+1}}\neq 1$.

$\sum_{k=0}^{n}z^k=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}=\frac{1-e^{i2p\pi}}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0$; $\sum_{k=0}^{n}z^k=0$.

En particulier : $0=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}z^k\right)=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{i\frac{2kp\pi}{n+1}}\right)=\sum_{k=0}^{n}\cos\left(2k\frac{p\pi}{n+1}\right)$

$\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta_p)=0$, soit encore $1+\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta_p)=0$

Finalement : $\underline{\underline{\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta_p)=-1.}}$

${}^tX_pX_p=\sum_{k=1}^{n}\sin^2k\theta_p=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos(2k\theta_p)}{2}=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta_p)=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}(-1)=\frac{n+1}{2}$.

$\underline{\underline{{}^tX_pX_p=\frac{n+1}{2}.}}$

c) $M=(b_{k,\ell})$ avec $b_{k,\ell}=\sin(k\theta_\ell)=\sin\left(k\frac{\ell\pi}{n+1}\right)=\sin(\ell\theta_k)=b_{\ell,k}$; ceci prouve que M est symétrique. Considérons $M^2=(c_{p,q})$. Soit $(p,q)\in[\![1,n]\!]^2$.

$c_{p,q}=\sum_{k=1}^{n}b_{p,k}b_{k,q}=\sum_{k=1}^{n}\sin(k\theta_p)\times\sin(k\theta_q)=\begin{cases}0 & \text{si } p\neq q\\ {}^tX_pX_p=\frac{n+1}{2} & \text{si } p=q\end{cases}$

Finalement $M^2=\frac{n+1}{2}I_n$

Donc $M\left(\frac{2}{n+1}M\right)=I_n$.

M est inversible et $\underline{\underline{M^{-1}=\frac{2}{n+1}M}}$.

Normal pour une matrice de passage !

Q1 a) $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$. $\displaystyle\int_0^\pi \sin kt \sin \ell t\,dt = \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi \left(\cos((k-\ell)t)-\cos((k+\ell)t)\right)dt\right]$

$$\int_0^\pi \cos((k+\ell)t)\,dt = \begin{cases} \pi & \text{si } k=\ell=0 \\ \left[\dfrac{\sin(k+\ell)t}{k+\ell}\right]_0^\pi = 0 & \text{si } k\neq\ell \end{cases} \qquad \int_0^\pi \cos((k-\ell)t)\,dt = \begin{cases} \pi & \text{si } k=\ell \\ \text{et} & \\ \left[\dfrac{\sin(k-\ell)t}{k-\ell}\right]_0^\pi = 0 & \text{si } k\neq\ell \end{cases}$$

Finalement :
- Si $k\neq\ell$: $\displaystyle\int_0^\pi \sin(kt)\sin(\ell t)\,dt = 0$
- Si $k=\ell\neq 0$: $\displaystyle\int_0^\pi \sin(kt)\sin(\ell t)\,dt = \pi/2$
- Si $k=\ell=0$: $\displaystyle\int_0^\pi \sin(kt)\sin(\ell t)\,dt = 0$

b) $\displaystyle\int_0^\pi g^2(t)\,dt = \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n a_k \sin kt\right)\left(\sum_{\ell=1}^n a_\ell \sin \ell t\right)dt = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n \int_0^\pi a_k a_\ell \sin kt \sin \ell t\,dt$

$\displaystyle\int_0^\pi g^2(t)\,dt = \sum_{k=1}^n a_k^2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2$. $\underline{\displaystyle\int_0^\pi g^2(t)\,dt = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2}$

c) Posons $M_n A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\forall p\in[\![1,n]\!]$, $x_p = \displaystyle\sum_{k=1}^n b_{pk}\, a_k = \sum_{k=1}^n a_k \sin(k\theta_p) = g(\theta_p)$

$A = M_n^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \dfrac{2}{n+1} M \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$ donc $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $a_k = \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\sum_{p=1}^n b_{kp}\, x_p$

$\underline{\forall k\in[\![1,n]\!],\ a_k = \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\sum_{p=1}^n g(\theta_p)\sin(k\theta_p)}$.

d) $\forall p\in[\![1,n]\!]$, $g(\theta_p) = b_p \iff \begin{bmatrix} g(\theta_1) \\ g(\theta_2) \\ \vdots \\ g(\theta_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \iff M_n A = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \iff A = M_n^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ceci prouve clairement l'existence et l'unicité de A.

En clair : $\begin{bmatrix} a_1(n) \\ a_2(n) \\ \vdots \\ a_n(n) \end{bmatrix} = M_n^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{2}{n+1} M_n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$; on a donc $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\underline{a_k(n) = \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\sum_{p=1}^n \sin(k\theta_p)}$

Q2 Etude des coefficients $a_k(n)$.

Soit $k\in[\![1,n]\!]$. $a_k(n) = \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\sum_{p=1}^n \sin(k\theta_p) = \dfrac{2}{n+1}\sum_{p=1}^n \sin(p\theta_k)$

$$\sum_{p=1}^n \sin(p\theta_k) = \Im\left(\sum_{p=1}^n \cos(p\theta_k) + i\sin(p\theta_k)\right) = \Im\left(\sum_{p=1}^n (e^{i\theta_k})^p\right) = \Im\left(e^{i\theta_k}\,\frac{1-(e^{i\theta_k})^n}{1-e^{i\theta_k}}\right)$$

$\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1} \neq 0\ [2\pi]$

$$\sum_{p=1}^n \sin(p\theta_k) = \Im\left(e^{i\theta_k/2}\, e^{i\theta_k n/2}\, \frac{e^{-i\theta_k n/2}-e^{i\theta_k n/2}}{e^{-i\theta_k/2}-e^{i\theta_k/2}}\right)$$

$$\sum_{p=1}^n \sin(p\theta_k) = \Im\left(e^{i\frac{n+1}{2}\theta_k}\,\frac{-2i\sin(n\theta_k/2)}{-2i\sin(\theta_k/2)}\right) = \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta_k\right)\times\frac{\sin(n\theta_k/2)}{\sin(\theta_k/2)} = \sin\left(\frac{n+1}{2}\times\frac{k\pi}{n+1}\right)\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\times\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}$$

Donc $a_k(n) = \frac{2}{n+1} \sin\frac{k\pi}{2} \times \frac{\sin\left[\frac{n+1}{2}\times\frac{k\pi}{n+1} - \frac{k\pi}{2(n+1)}\right]}{\sin\left[\frac{k\pi}{2(n+1)}\right]} = \frac{\frac{2}{n+1}\sin\frac{k\pi}{2}}{\sin\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)}\left[\sin\frac{k\pi}{2}\cos\frac{k\pi}{2(n+1)} - \cos\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}\right]$

Clairement si k est pair : $\sin\frac{k\pi}{2}=0$ et : $a_k(n)=0$.

Supposons k impair. $\sin^2\frac{k\pi}{2}=1$ et $\cos\frac{k\pi}{2}=0$; Donc $a_k(n) = \frac{2}{n+1}\;\frac{\cos\frac{k\pi}{2(n+1)}}{\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}}$ ... cqfd.

b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$ et k impair ($k \in [\![1,n]\!]$).

le tableau de variation de f dans ≡ Q4 donne : $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{\pi}$

Donc $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \leq \frac{2}{\pi}$; en particulier : $0 \leq \frac{1}{\frac{k\pi}{2(n+1)}} - \frac{\cos k\pi/2(n+1)}{\sin(k\pi/2(n+1))} \leq \frac{2}{\pi}$

en multipliant par $\frac{2}{n+1}$ on obtient :

$$0 \leq \frac{4}{k\pi} - a_k(n) \leq \frac{4}{(n+1)\pi}.$$

c) Si k est pair : $\beta_k = 0$ (si $n \geq k$: $a_k(n)=0$)

Si k est impair : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq k \Rightarrow 0 \leq \frac{4}{k\pi} - a_k(n) \leq \frac{4}{(n+1)\pi}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{(n+1)\pi} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_k(n) = \frac{4}{k\pi}$; $\beta_k = \frac{4}{k\pi}$.

Q3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\forall t \in [0,\pi]$, $g_n(t) - h_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (a_n(k) - \beta_k)\sin kt$

Donc $\int_0^\pi (g_n(t) - h_n(t))^2 dt = \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_n(k)-\beta_k)^2$ (Voir Q1 b) ... avec "$a_k = a_n(k) - \beta_k$" !)

Si $k \in [\![1,n]\!]$ et si k est pair : $[a_n(k)-\beta_k]^2 = 0$

Si $k \in [\![1,n]\!]$ et si k est impair : $[a_n(k)-\beta_k]^2 \leq \left[\frac{4}{(n+1)\pi}\right]^2 = \frac{16}{\pi^2(n+1)^2}$. (Q2 b et c)

Dans les deux cas : $[a_n(k)-\beta_k]^2 \leq \frac{16}{\pi^2(n+1)^2}$.

Donc $0 \leq \int_0^\pi (g_n(t)-h_n(t))^2 dt \quad \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}[a_n(k)-\beta_k]^2 \leq \frac{\pi}{2}\times n \times \frac{16}{\pi^2(n+1)^2} = \frac{8n}{\pi(n+1)^2} \leq \frac{8}{\pi(n+1)}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{\pi(n+1)} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\pi (g_n(t)-h_n(t))^2 dt = 0$.

b) On admet donc que : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\int_0^\pi (1-h_n(t))^2 dt = \int_0^\pi dt + \int_0^\pi h_n^2(t)dt - 2\int_0^\pi h_n(t)dt = \pi + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\beta_k\int_0^\pi \sin kt\, dt$

$= \pi + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}\beta_k \frac{1}{k}[1-\cos k\pi]$; $1-\cos k\pi = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ est pair} \\ 2 \text{ si } k \text{ est impair.}\end{cases}$

$= \pi + \frac{\pi}{2}\sum_{1\leq 2k+1\leq n}\frac{16}{[(2k+1)\pi]^2} - 2\sum_{1\leq 2k+1\leq n}\frac{4}{(2k+1)\pi}\times\frac{1}{2k+1}\times 2$

$$\int_0^1 (1-h_n(t))^2 dt = \pi + \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{16}{\pi} \sum_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} E(\frac{n-1}{2}) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{E(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 (1-h_n(t))^2 dt = \pi + \frac{8}{\pi} \times \frac{\pi^2}{8} - \frac{16}{\pi} \times \frac{\pi^2}{8} = \pi + \pi - 2\pi = 0$!

c) rappel.. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a-b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ (ie à $(a+b)^2 \geq 0$!!)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leq J_n = \int_0^1 (1-g_n(t))^2 dt = \int_0^1 \left[(1-h_n(t)) - (g_n(t)-h_n(t)) \right]^2 dt \leq 2\int_0^1 (1-h_n(t))^2 dt + 2\int_0^1 (g_n(t)-h_n(t))^2 dt$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$ d'après Q3a et b)

Pour les initiés (g_n) converge vers 1 "pour la norme $\| \ \|_2$"