

un grand bravo au concepteur pour la clarté et la précision de son énoncé (... le statut du jeu est admirable)
clarifier et simplifier (?)

1° L'urne contient b boules blanches et b boules noires

2° On effectue une succession de tirages dans l'urne en suivant le protocole suivant :

a.. On s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

b.. Lorsque l'on obtient une boule blanche on la remet dans l'urne ainsi que a boules blanches et on procède alors à un nouveau tirage

PARTIE I

(Q1) Nous notons N_i (resp. B_i) l'événement le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule noire (resp. blanche). Ici $a=b$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $n=1$, $p(X=n) = p(X=1) = p(N_1) = 1/2$. Supposons $n \geq 2$.

$$p(X=n) = p(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap N_n) = p(B_1) p(B_2|B_1) p(B_3|B_1 \cap B_2) \dots p(B_{n-1}|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-2}) p(N_n|B_1 \cap \dots \cap B_{n-1})$$

$$p(B_i|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{i-1}) = \frac{b+(i-1)a}{b+b+(i-1)a} = \frac{1+i-1}{2+i-1} = \frac{i}{i+1} \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

$a=b$

$$p(N_n|B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1}) = \frac{b}{b+b+(n-1)a} = \frac{1}{n+1}. \quad \text{Notons encore que } p(B_1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} !$$

$$p(X=n) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$p(X=1) = 1/2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, p(X=n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Récup : } \forall n \in \mathbb{N}^*, p(X=n) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} = \dots = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = p(X=n) = \frac{1}{n(n+1)}$$

b) Raisonnait : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n p_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1. \quad \text{Par conséquent } \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 \right\|$$

notale .. $p(X=0) = 1 - p(X \neq 0) = 1 - p\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} X=n\right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p(X=n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 - 1 = 0$

$$p(X=0) = 0$$

l'événement le jeu ne s'arrête pas est quasi-sûr.

d) $n p_n = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n p_n > 0$ et $n p_n \sim \frac{1}{n}$.

La série de terme général $n p_n$ est de même nature que la série de terme général $\frac{1}{n}$ (règle de comparaison des séries à termes positifs) donc divergente (Riemann)

Par conséquent X n'a pas d'espérance.

Q2 .. Retour au cas général.. On prend les mêmes et on recommence.

$A_n = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$. Si $n=1$, $P(A_1) = P(B_1) = \frac{b}{b+b} = 1/2$; supposons $n \geq 2$

$P(A_n) = P(B_1) P(B_2/B_1) \dots P(B_n/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1})$

$P(B_1) = 1/2 = \frac{b+(1-1)a}{2b+(1-1)a}$ et $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $P(B_i/B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{i-1}) = \frac{b+(i-1)a}{b+b+(i-1)a} = \frac{b+(i-1)a}{2b+(i-1)a}$

donc $P(A_n) = \prod_{i=1}^n \frac{b+(i-1)a}{2b+(i-1)a} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+a}{2b+k(a+b)}$

Q3 .. a) nature par récurrence que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\prod_{k=0}^i (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=0}^i x_k$

- C'est clair pour $i=0$ car $1+x_0 \geq 1+x_0$.

- Supposons la propriété vraie pour $i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ et notons la pour $i+1$

$$\prod_{k=0}^{i+1} (1+x_k) = (1+x_{i+1}) \prod_{k=0}^i (1+x_k) \geq (1+x_{i+1}) \left(1 + \sum_{k=0}^i x_k \right) = 1 + \sum_{k=0}^{i+1} x_k + x_{i+1} \sum_{k=0}^i x_k \geq 1 + \sum_{k=0}^{i+1} x_k$$

$1+x_{i+1} \geq 0$ et H.R. $x_k \geq 0$ pour $k \in \llbracket 0, i+1 \rrbracket$

ceci achève la récurrence.

En particulier la propriété vaut pour $i = n-1$

donc $\prod_{k=0}^{n-1} (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} x_k$

$\frac{1}{P(A_n)} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2b+k(a+b)}{b+a} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{b}{2b+k(a+b)} \right) \geq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{2b+k(a+b)}$

$\frac{b}{2b+k(a+b)} \geq 0$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$\frac{b}{2b+k(a+b)} \sim \frac{b}{a k}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{b}{2b+k(a+b)} > 0$. La série de terme général $\frac{b}{2b+k(a+b)}$ est donc

de même nature que la série de terme général $\frac{b}{a k}$ donc divergente

La suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{b}{2b+k(a+b)} \right)_{n \geq 1}$ est donc croissante $\left(\frac{b}{2b+k(a+b)} \geq 0 \right)$ et majorée

Par conséquent: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{b}{ka+b} \right) = +\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p(A_n)} = +\infty$

Finalement: $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A_n) = 0$.

Remarque... on pouvait aller plus vite en passant au log.

$$\ln \frac{ka+b}{ka+cb} \sim \frac{ka+b}{ka+cb} - 1 = -\frac{b}{ka+cb} \sim -\frac{b}{a} \times \frac{1}{k} \dots \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(\frac{ka+b}{ka+cb} \right) = -\infty \dots$$

b.. Notons T_n l'événement au cours duquel une boule noire a l'un des n premiers tirages

$$T_n = \bar{A}_n$$

$$T_n = \bigcup_{k=1}^n (X_k = k); \quad \sum_{k=1}^n p(X_k = k) = p\left(\bigcup_{k=1}^n (X_k = k)\right) = p(T_n) = p(\bar{A}_n) = 1 - p(A_n)$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n p(X_k = k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - p(A_n)) = 1. \quad \underline{\underline{\sum_{k=1}^{+\infty} p(X_k = k) = 1.}}$$

preuve... $p(X_k = 0) = 0$. L'événement le jeu ne s'arrête pas est quasi-sûr.

Q4.. C'est du COURS. Soit Z une var à valeurs dans $\mathbb{N}$, $E(Z)$ existe si la série de terme général $p(Z > n)$ converge. En cas d'existence: $E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(Z > n)$

Soit $\gamma(n) \subset \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(\gamma = n) = p_n$. Posons aussi $p_0 = p(\gamma = 0)$.

$$a) \quad E_n = \sum_{k=0}^n p(\gamma > k) = \sum_{k=0}^n (1 - p(\gamma \leq k)) = n+1 - \sum_{k=0}^n p(\gamma \leq k) = n+1 - \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k p(\gamma = i)$$

$$E_n = (n+1) - \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n p_i = (n+1) - \sum_{i=0}^n (n-i+1) p_i = (n+1)(1 - (p_0 + p_1 + \dots + p_n)) + \sum_{i=0}^n i p_i$$

$$E_n = (n+1)[1 - (p_0 + p_1 + \dots + p_n)] + \sum_{i=0}^n i p_i = (n+1)p(\gamma > n) + \sum_{i=0}^n i p_i$$

$$\text{ou encore } E_n = (n+1)[1 - (p_1 + p_2 + \dots + p_n)] + \sum_{i=1}^n i p_i = \underline{\underline{(n+1)[1 - \sum_{i=1}^n p_i] + \sum_{i=1}^n i p_i}}$$

b) Supposons que γ possède une espérance.

$$\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} - E_n = \sum_{k=0}^{n+1} p(\gamma > k) - \sum_{k=0}^n p(\gamma > k) = p(\gamma > n+1) \geq 0; (E_n)_{n \geq 0} \text{ est croissante.}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \quad E(\gamma) - E_n = \sum_{i=0}^{+\infty} i p_i - (n+1)[1 - \sum_{i=1}^n p_i] - \sum_{i=0}^n i p_i = \sum_{i=n+1}^{+\infty} i p_i - (n+1) \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{+\infty} p_i - \sum_{i=0}^n p_i \right)}_1$$

$$\text{donc } E(\gamma) - E_n = \sum_{i=n+1}^{+\infty} i p_i - \sum_{i=n+1}^{+\infty} (n+1) p_i = \sum_{i=n+1}^{+\infty} (i - (n+1)) p_i$$

à vce $[n+1, +\infty[$, $(i - (n+1)) p_i \geq 0$; donc $E(\gamma) - E_n \geq 0$. Finalement: $\forall n \in \mathbb{N}, E_n \leq E(\gamma)$.

la suite $(E_n)_{n \geq 0}$ est donc croissante et majorée par $E(Y)$, elle converge.
Cela signifie aussi que la série de terme général $p(Y > n)$ converge.

Supposons que $(E_n)_{n \geq 0}$ converge. Montrons que $E(Y)$ existe.

Il faut à priori que la série de terme général np_n est absolument convergente ou simplement convergente car $n \in \mathbb{N}^*$, $np_n \geq 0$.

Montrons donc que la suite $(\sum_{i=0}^n i p_i)_{n \geq 0}$ converge; cette suite est clairement croissante ($n \in \mathbb{N}$, $np_n \geq 0$!). Sa convergence sera assurée si l'on montre qu'elle est majorée.

$$\text{a: } \forall n \in \mathbb{N}, E_n = (n+1)p(Y > n) + \sum_{i=0}^n i p_i \quad (E_n)_{n \geq 0} \text{ est croissante.}$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n i p_i = E_n - (n+1)p(Y > n) \leq E_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n$$

Finalement $(\sum_{i=0}^n i p_i)_{n \geq 0}$ est croissante et majorée donc convergente; par conséquent $E(Y)$ existe.

Le qui précède montre que $E(Y)$ existe si et seulement si $(E_n)_{n \geq 0}$ converge.

Supposons donc que $E(Y)$ existe ou que $(E_n)_{n \geq 0}$ converge.

$$\text{Nous avons: } \forall n \in \mathbb{N}, E_n \leq E(Y) \quad \text{b)} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n \leq E(Y)$$

$$\text{Nous avons: } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^n i p_i \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n; \text{ donc } E(Y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n i p_i \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n$$

$$\text{Finalement: } E(Y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} E_n$$

$$\text{Or } E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(Y > n).$$

Remarque.. le résultat classique se montre chez les gens bien en 4 lignes.

$$\text{QS .. Soit } a \geq b. \quad \forall n \in \mathbb{N}, r_n(a) = p(X > n) = p("A_n") \stackrel{\text{puisque } n \geq 1}{=} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k a + b}{k a + 2b} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{b}{k a + 2b} \right).$$

g) soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall k \in [0, n-1], \frac{b}{k a + 2b} \geq \frac{b}{k a_2 + 2b} \quad \text{car } a_1 \leq a_2$$

$$\text{Or } \forall k \in [0, n-1], 0 \leq \frac{k a_1 + b}{k a_2 + 2b} = 1 - \frac{b}{k a_2 + 2b} \leq 1 - \frac{b}{k a_1 + 2b} = \frac{k a_1 + b}{k a_1 + 2b}$$

$$\text{Par conséquent: } r_n(a_1) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k a_1 + b}{k a_1 + 2b} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k a_2 + b}{k a_2 + 2b} = r_n(a_2).$$

$$\text{si } n=0: r_n(a_1) = 1 \leq 1 = r_n(a_2)$$

$$\text{Finalement: } \forall n \in \mathbb{N}, \underline{r_n(a_1) \leq r_n(a_2)} \text{ si } a_1 \leq a_2. \quad \text{car il est } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^p \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$b \leq a \text{ donc: } \forall n \in \mathbb{N}^*, r_n(a) \geq r_n(b) = p(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n+1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n(a) \geq \frac{1}{n+1} > 0$$

la série de terme général $1/n$ est divergente il a été de même de la série de terme

$$r_n(a) = p(X_0 > n);$$

b) La série de terme général $p(X_0 > n)$ étant divergente, $\varnothing$ prouve que X_0 n'a pas d'espérance lorsque : $a \geq b$.

Q6.. $1 \leq a < b$

a) $r_{n+1}(a) = \prod_{k=0}^n \frac{ka+b}{ka+cb} = \frac{na+b}{na+cb} r_n(a)$. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce résultat vaut avec

pour $n=0$ car $r_0(a) = 1$ et $r_1(a) = 1/2 = \frac{b}{2b} = \frac{0+b}{0+cb}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1}(a) = \frac{na+b}{na+cb} r_n(a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)r_{n+1}(a) = \frac{n+1}{n} \times \frac{na+b}{na+cb} (nr_n(a))$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)r_{n+1}(a)}{nr_n(a)} = \frac{n+1}{n} \times \frac{na+b}{na+cb}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{(n+1)r_{n+1}(a)}{nr_n(a)} - 1 = \frac{(n+1)(na+b) - n(na+cb)}{n(na+cb)} = \frac{n(a-b)+b}{n(na+cb)} = \frac{(a-b)}{n(na+cb)} \left[n + \frac{b}{a-b} \right].$$

si $n > -\frac{b}{a-b} = \frac{b}{b-a}$ alors $\frac{1}{n(na+cb)} \left[n + \frac{b}{a-b} \right] > 0$ dnc : $\frac{(a-b)}{n(na+cb)} \left[n + \frac{b}{a-b} \right] < 0$

Par conséquent : si $n > \frac{b}{b-a} : \frac{(n+1)r_{n+1}(a)}{nr_n(a)} - 1 < 0$ dnc $(n+1)r_{n+1}(a) < nr_n(a)$

Finalement $(nr_n(a))_{n \geq 0}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

cette suite étant minorée par 0, elle converge.

En particulier $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (nr_n(a))$.

b) On suppose que : $l \neq 0$. $(nr_n(a))_{n \geq 0}$ est décroissante à partir d'un certain rang p et converge vers l . Par conséquent : $nr_n(a) \geq l$ pour $n \geq p$.

$$\forall n \in [p, +\infty[, nr_n(a) \geq l. \quad \forall n \in [p, +\infty[, r_n(a) \geq \frac{l}{n}.$$

$$\forall n \in [p, +\infty[, \quad 0 < \frac{l}{n} \leq r_n(a) \text{ et la série de terme général } \frac{l}{n} \text{ diverge ;}$$

par conséquent la série de terme général $r_n(a) = p(X_0 > n)$ diverge.

X_0 n'a donc pas d'espérance si l est différent de zéro.

Pour les initiés

$$\frac{r_{n+1}(a)}{r_n(a)} = \frac{na+b}{na+cb} = \frac{1 + \frac{b}{na}}{1 + \frac{cb}{na}} = \left(1 + \frac{b}{na}\right) \left(1 - \frac{cb}{na}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$\frac{r_{n+1}(a)}{r_n(a)} = 1 - \frac{b}{a} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$; comme $\frac{b}{a} > 1$ d'après
dnc la convergence de la série de T.G. $r_n(a)$!
et l'existence de $E(X_0)$.

c) Rappelons que : $\forall k \in \mathbb{N}, r_{k+1}(a) = \frac{k+a}{k+2b} r_k(a)$
 soit $k \in \mathbb{N}$

$$(k+2b)r_{k+1}(a) = k r_k(a) + b r_k(a)$$

$$(k+a)r_{k+1}(a) - k r_k(a) = (-2b+a)r_{k+1}(a) + b r_k(a)$$

$$\text{Donc } a(k+1)r_{k+1}(a) - a k r_k(a) = (a-2b)r_{k+1}(a) + b r_k(a)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, a(k+1)r_{k+1}(a) - a k r_k(a) = (a-2b)r_{k+1}(a) + b r_k(a)$$

$$\Rightarrow a \sum_{k=0}^n (k+1)r_{k+1}(a) - a \sum_{k=0}^n k r_k(a) = (a-2b) \sum_{k=0}^n r_{k+1}(a) + b \sum_{k=0}^n r_k(a)$$

soit $n \in \mathbb{N}$

$$a(n+1)r_{n+1}(a) - 0 = (a-2b) \left(\sum_{k=0}^{n+1} r_k(a) - r_0(a) \right) + b \sum_{k=0}^n r_k(a)$$

$$a(n+1)r_{n+1}(a) = (a-2b) \left(\sum_{k=0}^{n+1} r_k(a) - 1 \right) + b \sum_{k=0}^n r_k(a)$$

$$a(n+1)r_{n+1}(a) + a - 2b = (a-2b)r_{n+1}(a) + (a-b) \sum_{k=0}^n r_k(a)$$

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^n r_k(a) = \frac{1}{a-b} \left[a(n+1)r_{n+1}(a) + a - 2b - (a-2b)r_{n+1}(a) \right]$$

Nous savons que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n r_n(a) = 0$ et que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(a) = 0$

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n r_k(a) \right) = \frac{1}{a-b} [a + a - 2b - 0] = \frac{a + a - 2b}{a-b}$

La série de terme général $r_n(a)$ est donc convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n(a) = \frac{a + a - 2b}{a-b}$

ceci montre que : 1° $E(\lambda_a)$ existe (94)

2° $\ell = 0$ (96...b)

3° $E(\lambda_a) = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n(a) = \frac{a + a - 2b}{a-b} = \frac{a - 2b}{a-b}$

Finalement λ_a possède une espérance et $E(\lambda_a) = \frac{a - 2b}{a-b} = \frac{2b - a}{b - a}$.

Message personnel .. Géjé aimé je pars maintenant que tu gagnes de λ_a et de son espérance et particulièrement indigeste. L'utilisation de la

(pour des produits !), de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$ avec un jet de Duhamel

(initialement démontré) aurait rendu la preuve plus légère.

Géjé c'est bien de te dévouer pour faire la cuisine mais n'oublie pas que c'est nous qui la mangeons... alors "TANT QUE tu la fais aussi bien arrête toi"

PARTIE II

Q3. a) Remarque: u_n mesure le nombre de boules blanches dans l'urne au n -ième tirage si il a lieu. Dans la partie I $u_n = na + b$

si $n=1$: $p(A_1) = 1/2 = \frac{u_0}{u_0+b}$

si $n \geq 2$: $p(A_n) = p(B_1) p(B_2/B_1) \dots p(B_n / B_1, B_2, \dots, B_{n-1})$

$$p(A_n) = \frac{u_0}{u_0+b} \times \frac{u_1}{u_1+b} \times \dots \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-1}+b} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{u_k+b}$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = p(A_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k}{u_k+b} = \frac{1}{L} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{u_k+b}$

b) soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{u_n}{u_n+b} \leq 1$. $(q_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente

Puisque $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \leq q_1 = \frac{1}{L}$ donc: $L \leq \frac{1}{L}$.

c) soit $n \in \mathbb{N}^*$;

$$\bar{A}_n = \bigcup_{k=1}^n N_k. \quad 1 - p(A_n) = p(\bar{A}_n) = \sum_{k=1}^n p(N_k) = \sum_{k=1}^n p_k$$

donc $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 - p(A_n) = 1 - q_n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 - q_n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = L$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_1 + p_2 + \dots + p_n) = 1 - L$

Finalement: $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 - L$

d) soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{q_n} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{u_k+b}{u_k}$; $\ln \frac{1}{q_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + \frac{b}{u_k})$. (Enfin le log!)

La suite $(\ln \frac{1}{q_n})$ converge donc si la série de terme général $\ln(1 + \frac{b}{u_n})$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(1 + \frac{b}{u_n}) \geq 0$

Supposons que la série de T.G. $\ln(1 + \frac{b}{u_n})$ converge; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(1 + \frac{b}{u_n}) = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{u_n} = 0$ donc

$\frac{b}{u_n} \vee \ln(1 + \frac{b}{u_n}) \geq 0$; la série de T.G. $\ln(1 + \frac{b}{u_n})$ étant convergente celle de T.G. $\frac{b}{u_n}$ aussi

Réciproquement supposons que la série de T.G. $\frac{b}{u_n}$ converge; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{u_n} = 0$ donc

$\ln(1 + \frac{b}{u_n}) \sim \frac{b}{u_n}$; la série de T.G. $\ln(1 + \frac{b}{u_n})$ converge.

En dernier, la suite $(h(\frac{1}{q_n}))$ converge et ne tend pas vers la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge

cette suite et cette série ont donc de même nature.

Notons H l'événement ne jamais obtenir une boule noire

$$P(H) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n \quad P(H) = 0 \Leftrightarrow P(\bar{H}) = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} P_n = 1 \Leftrightarrow L = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0^+ \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty$$

$$P(H) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} h(\frac{1}{q_n}) = +\infty \Leftrightarrow (h(\frac{1}{q_n}))_{n \geq 0} \text{ diverge} \Leftrightarrow \text{la série de terme général } \frac{1}{u_n} \text{ diverge.}$$

la suite $(h(\frac{1}{q_n}))$ est croissante

La probabilité de ne pas obtenir de boule noire est nulle si la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge.

c) * $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = b + na$

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n-1} = a$; on est dans les conditions de la partie I

Après chaque tirage d'une boule blanche on remet cette boule et on ajoute une boule blanche

conséquence $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{na}$; la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge et on obtient

ainsi $P(H) = 0$ (voir I 2 c et I 3 b)

* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = ba^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n-1} = ba^n - ba^{n-1} = ba^{n-1}(a-1)$

Si on tire une boule blanche au n -ième tirage on la remet et on ajoute $(a-1)ba^{n-1}$ boules blanches.

$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{ba^n}$ et donc le terme général d'une série convergente; $P(H) \neq 0$.

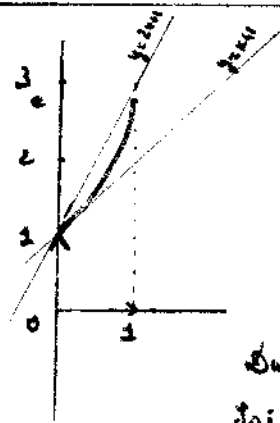
l'événement ne pas obtenir une boule noire n'est plus qu'une impossibilité (normal on rajoute des boules de boules blanches)

2. a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = ba^n$

($q_0 = 1$ et) $\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n(a) = q_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ba^k}{ba^k + b} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{a^k + 1}$

($q_0(a) = 1$ et) $\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{a^k + 1}$

b) $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ $\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{q^k} = \frac{1}{q^n} \times \frac{1 - (\frac{1}{q})^p}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1}{q^{n+1}} \times \frac{1}{q-1} \times (1 - \frac{1}{q^p}) \leq \frac{1}{q^{n+1}(q-1)}$



Montrons que: $\forall x \in [0, 1], 1+x \leq e^x \leq 1+ex$

Vs Etude de 2 fonctions ... pour problème.

V2 $f: x \mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est "au-dessus de sa tangente" et "en dessous de sa corde".

La tangente au point A d'abscisse 0 admet pour équation $y = x + 1$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, x+1 \leq e^x$; en particulier $\forall x \in [0, 1], x+1 \leq e^x$

Soit B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. La corde [AB] est portée par la droite (AB)

d'équation $y = \frac{e-1}{1-0}(x-0)+1 = (e-1)x+1$

Donc $\forall x \in [0, 1], e^x \leq (e-1)x+1$. Comme $e-1 \leq e$: $\forall x \in [0, 1], e^x \leq 1+ex$

Finalement: $\forall x \in [0, 1], 1+x \leq e^x \leq 1+ex$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{q_n(a)}{q_{n+p}(a)} = \frac{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{a^k+1}}{\prod_{k=0}^{n+p-1} \frac{a^k}{a^k+1}} = \prod_{k=0}^{n+p-1} \frac{a^k+1}{a^k} = \prod_{k=n}^{n+p-1} \left(1 + \frac{1}{a^k}\right)$$

$$1 \leq \prod_{k=n}^{n+p-1} \left(1 + \frac{1}{a^k}\right) \leq \prod_{k=n}^{n+p-1} e^{1/a^k} = e^{\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{a^k}} \leq e^{\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}}$$

$\uparrow$
 $1 + \frac{1}{a^k} \geq 1$

$x+1 \leq e^x$ pour $x \in [0, 1]$ ou $\mathbb{R}$

Donc $1 \leq \frac{q_n(a)}{q_{n+p}(a)} \leq e^{\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}}$ ou $q_{n+p}(a) \leq q_n(a) \leq e^{\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}} q_{n+p}(a)$

En faisant tendre p vers $+\infty$ on obtient: $L(a) \leq q_n(a) \leq e^{\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}} L(a)$.

$$0 \leq q_n(a) - L(a) \leq (e^{\frac{1}{a^{n-1}(a-1)}} - 1) L(a) \leq \frac{1}{a^{n-1}(a-1)} L(a) \leq \frac{1}{a^{n-1}(a-1)} \quad (0 \leq L(a) \leq 1/2)$$

c) Voir à la fin $e^x \leq 1+ex$ pour $x \in [0, 1]$

d) $a_1 \in \mathbb{N}^*, a_2 \in \mathbb{N}^*$ et $a_1 \leq a_2$. Soit $n \in \mathbb{N}$

Si $n=0$: $q_0(a_1) = 1 \leq 1 = q_0(a_2)$

Supposons $n \geq 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{x^k}{1+x^k}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (calcul de la dérivée)

on écrit $\frac{x^k}{1+x^k} = 1 - \frac{1}{1+x^k}$

Donc $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{a_1^k}{1+a_1^k} \leq \frac{a_2^k}{1+a_2^k}$. Donc $q_n(a_1) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_1^k}{1+a_1^k} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_2^k}{1+a_2^k} = q_n(a_2)$

Finalement: $\forall n \in \mathbb{N}, q_n(a_1) \leq q_n(a_2)$. En passant à la limite on obtient: $L(a_1) \leq L(a_2)$.

La suite $(L(a))_{a \geq 2}$ est donc croissante

(a) est géré dans l'avant dernière ligne !)

Pour $n=1$, (3) donne : $0 \leq q_1(a) - L(a) \leq \frac{1}{(a-1) \times a^0} = \frac{1}{a-1}$ pour tout $a \in [1, +\infty[$

Comme $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a-1} = 0$: $\lim_{a \rightarrow +\infty} (q_1(a) - L(a)) = 0$. Noter que $q_1(a) = 1/2$ pour tout $a \in [1, +\infty[$.

Pareillement : $\lim_{a \rightarrow +\infty} L(a) = 1/2$.

ALGORITHMIQUE. Remarques 1.. À partir de $q_1 = 1/2$

$$2.. \forall k \in \mathbb{N}, \frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{a^{k+1}}{a^k}; \quad \forall k \in \mathbb{N}, q_{k+1} = \frac{a^{k+1}}{a^k} q_k$$

$$\text{On a donc } \forall k \in \mathbb{N}^*, \underline{a^k = a^{k-1} \times a!}$$

$$3.. \text{On continue à calculer } q_k(a) \text{ tant que } \frac{1}{(a-1)a^{n-1}} > \varepsilon$$

et n'apas le contraire ; cette condition équivaut à $a^{n-1} < \frac{1}{\varepsilon(a-1)}$.

Je mets dans $\frac{1}{\varepsilon(a-1)}$ dans TEST

PROGRAM GEGE;

VAR A, COMPT: INTEGER; EPSILON, B, Q: REAL;

BEGIN

A := 0; EPSILON := 0;

REPEAT

WRITE ('DONNEZ LA VALEUR DE A (A ENTIER > 1); A = ');

READLN(A);

UNTIL (A > 1);

REPEAT

WRITE ('DONNEZ LA PRECISION E (E > 0); E = ');

READLN(EPSILON);

UNTIL (EPSILON > 0);

TEST := 1/EPSILON/(A-1); B := 1; Q := 1/2; COMPT := 1;

WHILE (B < TEST) DO

BEGIN

B := B * A; Q := Q * B / (1+B); COMPT := COMPT + 1;

END;

WRITELN(Q, ' EST UNE VALEUR APPROCHEE DE L('A,') A 'EPSILON, ' PRES');

WRITELN('C'EST LE TERME D'INDECE 'COMPT, ' DE LA SUITE');

END.

```
! -> A, 1 -> X: 0.0001 + E: 0.5 -> Q:
1 -> N
L10: IF 1/N: AA -> X: QX / (1+X) -> Q:
11: X := (A-1) -> W: W > E -> GOTO 0:
Q -> N
CASIO 7000G ↑
```

E	n	Q
$E=10^{-1}$	n=15	0,109 724 04
$E=10^{-2}$	n=25	0,109 711 233
$E=10^{-5}$	n=31	0,109 711 221

a	Q
a=10	0,449545459
$E=10^{-3}$ a=50	0,480 996 078
a=100	0,494 999 505
a=500	0,498 999 996
a=1000	0,499 500 000

```

Press any key to return to Turbo Pascal
Program HEC92;
uses crt;
var a,compt:integer;epsilon,b,q,test:real;

begin
clrscr;a:=0;epsilon:=0;
repeat
    write('Donnez la valeur de a (a entier supérieur ou égal à 2); a=');
    readln(a)
until a>1;

repeat
    write('Donnez la précision epsilon (epsilon>0); epsilon=');
    readln(epsilon);writeln;
until epsilon >0;

test:=1/epsilon/(a-1);b:=1;q:=1/2;compt:=1;
while b< test do
    begin
        b:=b*a;q:=q*b/(1+b);compt:=compt+1;
    end;
writeln(q,' est une valeur approchée de L(',a,') à ',epsilon:0:9,' près');
writeln;writeln('C'est le terme d'indice ',compt,' de la suite');
end.

```