## PARTIE I

Q1.. a) $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ ; $\underline{\underline{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1}}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-1/n)} = e^{\frac{\ln(1-1/n)}{1/n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1-1/n)}{1/n} = -1$ d'après a) donc $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}}}$.

Q2.. a) $f : x \mapsto e^{-x}$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à $f$ sur $[0,1]$ à l'ordre $n$.

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-0)^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\,du.$$

Une récurrence simple montre que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$.

Ce qui précède donne alors : $e^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-1)^k e^{-0} + \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!}(-1)^{n+1} e^{-u}\,du$

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u}\,du}}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in [0,1]$, $0 \leq \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} \leq \frac{1}{n!}$ (fin, non ?)

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u}\,du \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 du = \frac{1}{n!}$

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u}\,du \leq \frac{1}{n!}}}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|e^{-1} - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right| = \left|(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u}\,du\right| = \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u}\,du \leq \frac{1}{n!}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$ donc $\underline{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}}}$ (n'est-ce pas un résultat du programme ?).

## PARTIE II Coïncidences avec remise $N \in \mathbb{N}^*$

Q1.. Soit $i \in [\![1,N]\!]$. $p(X_i = 1) = \frac{N^{N-1}}{N^N}$ ← choix des boules des tirages $1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, N$

$\forall i \in [\![1,N]\!]$, $E(X_i) = p(X_i = 1) = \frac{1}{N}$.

donc $\underline{\underline{\forall i \in [\![1,N]\!],\ E(X_i) = \frac{1}{N}}}$. $E(S_N) = \sum\limits_{i=1}^{N} E(X_i) = N \times \frac{1}{N}$. $\underline{\underline{E(S_N) = 1}}$

Q2 a) Clairement si $k \in \mathbb{N}$ et si $k > N$ : $p(N,k) = 0$.

Soit $k \in [\![0,N]\!]$. Notons $A_k$ l'événement $\{S_N = k\}$.

$$p(N,k) = p(A_k) = \frac{\operatorname{card} A_k}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{\operatorname{card} A_k}{N^N}.$$

Appelons coïncidence le fait que le numéro de la boule portée à un tirage soit égal au rang du tirage.

$A_k$ se réalise si et seulement si au cours des $N$ tirages on a eu $k$ coïncidences et $k$ seulement. Notons qu'alors les $N-k$ tirages n'ayant pas donné une coïncidence ont amené une des $N-1$ boules dont le numéro est différent du rang du tirage.

Par conséquent $\operatorname{card} A_k = C_N^k \, (N-1)^{N-k}$ ← choix d'une boule pour les $N-k$ tirages ne donnant pas une coïncidence

↑ choix des $k$ tirages amenant une coïncidence

Finalement $p(N,k) = \dfrac{C_N^k (N-1)^{N-k}}{N^N}$ ; donc

$$\forall k \in [\![0,N]\!],\ p(N,k) = C_N^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k} \quad \text{si } 0 \leq k \leq N.$$

Remarque.. On pouvait encore en notant $C_i$ l'événement le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une coïncidence écrire :

$$p(N,k) = p(A_k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} p\Big(C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap \dots \cap C_{i_k} \cap \Big(\bigcap_{i \in [\![1,N]\!] - \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} \overline{C_i}\Big)\Big) \quad \text{donc}$$

$$p(N,k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq N} p(C_{i_1}) p(C_{i_2}) \dots p(C_{i_k}) \prod_{i \in [\![1,N]\!] - \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} p(\overline{C_i}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N} \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(\frac{N-1}{N}\right)^{N-k} \text{ et}$$

$p(C_i) = p(X_i = i) = \frac{1}{N}$

pour finir $p(N,k) = C_N^k \left(\frac{1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k}$

On pouvait aussi dire que : $S_N \hookrightarrow \mathcal{B}(N, 1/N)$. Comme somme de $N$ var de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/N$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $N \in [\![k, +\infty[\![$.

$$C_N^k = \frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{k!} \sim \frac{N^k}{k!} \ ; \quad p(N,k) \sim \frac{N^k}{k!}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{-k}$$

$$\lim_{N \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^N = e^{-1} \text{ et } \lim_{N \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{-k} = 1$$

Donc $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} p(N,k) = \frac{1}{k!} e^{-1}$. $(S_N)$ converge en loi vers une var qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

PARTIE III

Q1 a) $F(N,N)=1$. Il y a une seule bijection de $E_N$ sur lui-même ayant $N$ points fixes : $Id_{E_N}$

$F(N,N-1)=0$. Fixer $N-1$ de $E_N$ fait fixer le $N^{\text{ème}}$ aussi !

b) Notons $S_N$ l'ensemble des permutations de $E_N$ et, pour tout $k\in[\![0,N]\!]$, $S_N^k$ les éléments de $S_N$ ayant $k$ points fixes.

$S_N$ est réunion disjointe de $S_N^0, S_N^1, \dots, S_N^N$ ; par conséquent :

$$N! = \operatorname{card} S_N = \sum_{k=0}^{N} \operatorname{card} S_N^k = \sum_{k=0}^{N} F(N,k)$$

$$\underline{\underline{N! = \sum_{k=0}^{N} F(N,k).}}$$

Q2 .. a) Pour construire une permutation de $E_N$ ayant $k$ points fixes, on choisit les $k$ points fixes et construit une permutation des $N-k$ points restant n'ayant pas de point fixe. Il y a $C_N^k$ manières de choisir les $k$ points fixes et $\omega_{N-k}$ manières de faire une permutation sans point fixe des $N-k$ autres points.

Par conséquent : $\underline{\underline{F(N,k)=C_N^k\,\omega_{N-k}}}$ pour tout $k\in[\![0,N]\!]$.

b) $$N! \underset{\text{Q1 b)}}{=} \sum_{k=0}^{N} F(N,k) \underset{\text{Q2 a)}}{=} \sum_{k=0}^{N} C_N^k\,\omega_{N-k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{k!\,(N-k)!}\,\omega_{N-k}$$

Donc $$\underline{\underline{1 = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\,\frac{\omega_{N-k}}{(N-k)!}}}.$$

c) La SEULE question non triviale du problème. Néanmoins les initiés auront reconnu « l'inversion de Pascal ». Utilisons donc une démarche analogue à celle de la démonstration de la formule d'inversion.

Montrons à l'aide d'une récurrence forte que : $\forall N\in\mathbb{N}$, $\dfrac{\omega_N}{N!}=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k!}$

– La formule est claire pour $N=0$ $\left(\omega_0=1,\ \dfrac{\omega_0}{0!}=1=\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$

– Supposons la propriété vraie $\underline{\text{jusqu'à } N}$ et montrons-la pour $N+1$.

$$1 = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{1}{k!}\,\frac{\omega_{N+1-k}}{(N+1-k)!} = \frac{\omega_{N+1}}{(N+1)!} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k!}\,\frac{\omega_{N+1-k}}{(N+1-k)!} = \frac{\omega_{N+1}}{(N+1)!} + \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{N+1-k} \frac{(-1)^i}{i!} .$$

$k \in [\![1,N+1]\!] \Rightarrow N+1-k \in [\![0,N]\!]$ ⊕ HR

$$\text{donc } \frac{\omega_{N+1}}{(N+1)!} = 1 - \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{i=0}^{N+1-k} \frac{(-1)^i}{(k+i)!}\, C_{k+i}^{k} \underset{\boxed{j=k+i}}{=} 1 - \sum_{k=1}^{N+1} \sum_{j=k}^{N+1} \frac{1}{j!}\, C_j^k\, (-1)^{j-k} \underset{\text{inversion des 2 }\Sigma}{=} 1 - \sum_{j=1}^{N+1} \sum_{k=1}^{j} \frac{(-1)^{j-k}}{j!}\, C_j^k$$

$$\frac{\omega_{N+1}}{(N+1)!} \underset{(-1)^{-k}=(-1)^k}{=} 1 - \sum_{j=1}^{N+1} \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{k=1}^{j} (-1)^k C_j^k = 1 - \sum_{j=1}^{N+1} \frac{(-1)^j}{j!} \left[ \sum_{k=0}^{j} (-1)^k C_j^k - 1 \right]$$

Binôme

$$= 1 - \sum_{j=1}^{N+1} \frac{(-1)^j}{j!} \Big[ \underbrace{(1-1)^j - 1}_{=-1 \text{ car } j \geq 1} \Big] = 1 + \sum_{j=1}^{N+1} \frac{(-1)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{N+1} \frac{(-1)^j}{j!}$$

Finalement $\dfrac{\omega_{N+1}}{(N+1)!} = \displaystyle\sum_{j=0}^{N+1} \frac{(-1)^j}{j!}$ ce qui achève la récurrence.

Par conséquent : $\underline{\underline{\dfrac{\omega_N}{N!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!}}}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

d) $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\omega_N}{N!} = \lim_{N\to+\infty} \left( \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = e^{-1}$ ; $\underline{\underline{\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\omega_N}{N!} = e^{-1}}}$

Nous retiendrons que : $\underline{\underline{\omega_N \sim e^{-1} N!}}$

## PARTIE IV  Désormais : $N \geq 2$.

Q1 a) Soit $i \in [\![1,N]\!]$. $E(Y_i) = p(Y_i = 1) = \dfrac{(N-1)!}{N!} = \dfrac{1}{N}$ ; $\underline{\underline{E(Y_i) = \dfrac{1}{N}}}$

Soit $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$ tel que $i < j$.

$E(Y_i Y_j) = p(Y_i Y_j = 1) = p(Y_i = 1 \text{ et } Y_j = 1) = \dfrac{(N-2)!}{N!}$ ← Nb de tirages où les boules $B_i$ et $B_j$ sortent respectivement aux rangs $i$ et $j$
← Nb de tirages possibles.

$\underline{\underline{E(Y_i Y_j) = \dfrac{1}{N(N-1)}}}$.

b) $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = E(Y_i Y_j) - E(Y_i)E(Y_j) = \dfrac{1}{N(N-1)} - \dfrac{1}{N^2} = \dfrac{1}{N^2(N-1)}$

$\underline{\underline{\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \dfrac{1}{N^2(N-1)}}}$

c) $Y_i$ et $Y_j$ ne sont pas indépendantes car $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) \neq 0$

**Q2** $E(T_N) = E(Y_1+Y_2+\cdots+Y_N) = \sum_{i=1}^{N} E(Y_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} = 1$. $\underline{\underline{E(T_N) = 1}}$

$$V(T_N) = V(Y_1+Y_2+\cdots+Y_N) = \sum_{i=1}^{N} V(Y_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq N} \mathrm{cov}(Y_i,Y_j) = \sum_{i=1}^{N} p(Y_i=1)\,p(Y_i=0) + 2\sum_{1\leq i<j\leq N} \frac{1}{N^2(N-1)}$$

$$V(T_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right) + 2 \times \underset{\uparrow}{C_N^2} \times \frac{1}{N^2(N-1)}$$

nombre de termes dans la $2^{\text{ème}}$ $\Sigma$

$$V(T_N) = N \times \frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right) + 2 \times \frac{N(N-1)}{2} \times \frac{1}{N^2(N-1)}$$

$V(T_N) = \frac{N-1}{N} + \frac{1}{N} = 1$. $\underline{\underline{V(T_N) = 1}}$ ... ce qui ne surprendra personne.

**Q3** **a)** $q(N,k) = 0$ si $k > N$.

Soit $k \in [\![0,N]\!]$.

$$q(N,k) = p(T_N = k) = \frac{\mathrm{card}(\{T_N = k\})}{N!} = \frac{F(N,k)}{N!} \overset{\text{III 2 a)}}{=} \frac{C_N^k\, \omega_{N-k}}{N!} = \frac{\omega_{N-k}}{k!\,(N-k)!}$$

$$\underline{\underline{\forall k \in [\![0,N]\!],\ q(N,k) = \frac{\omega_{N-k}}{k!\,(N-k)!}}}.$$

**b)** Soit $k \in \mathbb{N}$. $\quad q(N,k) = \frac{\omega_{N-k}}{k!\,(N-k)!} \underset{\text{III 2 d}}{\sim} \frac{e^{-1}(N-k)!}{k!\,(N-k)!} = \frac{e^{-1}}{k!}$

Donc $\underline{\underline{\lim_{N\to+\infty} q(N,k) = \frac{e^{-1}}{k!} = \lim_{N\to+\infty} p(N,k)}}$. Ce qui n'est pas une grosse surprise !

## PARTIE V

**Q1..** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$

$$\omega_{n-1} + \omega_{n-2} = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-2)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$(n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2}) = (n-1)(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$(n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2}) = n(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

$$(n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2}) = n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} - (n-1)! \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underbrace{- n! \frac{(-1)^n}{n!} - (-1)^{n-1}}_{=0} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \omega_n$$

Par conséquent : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \omega_n = (n-1)(\omega_{n-1}+\omega_{n-2})$

<u>Exercice</u> .. Retrouver ce résultat directement (... commencer par donner une image à 1 distincte de 1 à 1 et envisager deux cas 1°. a a pour image 1
2°. a a pour image $b \notin \{1,a\}$)

Q2.. <u>a)</u> $\bar q(N,0) = q(N,N) = \dfrac{F(N,N)}{N!} = \dfrac{1}{N!}$.

$\bar q(N,1) = q(N,N-1) = \dfrac{F(N,N-1)}{N!} = 0$.

<u>b)</u> Soit $k \in [\![2,N]\!]$

$\bar q(N,k) = q(N,N-k) = \dfrac{\omega_k}{k!(N-k)!}$ ; $\omega_k = k!(N-k)!\,\bar q(N,k)$ ; $\omega_{k-1} = (k-1)!(N+1-k)!\,\bar q(N,k-1)$ et

$\omega_{k-2} = (k-2)!(N+2-k)!\,\bar q(N,k-2)$.

$k!(N-k)!\,\bar q(N,k) = \omega_k = (k-1)(\omega_{k-1}+\omega_{k-2}) = (k-1)(k-1)!(N+1-k)!\,\bar q(N,k-1) + (k-1)!(N+2-k)!\,\bar q(N,k-2)$

Divisons par $(k-1)!(N-k)!$. Il vient :

$k\,\bar q(N,k) = (k-1)(N+1-k)\,\bar q(N,k-1) + (N+2-k)(N+1-k)\,\bar q(N,k-2)$

Soit : $\bar q(N,k) = \dfrac{N+1-k}{k}\left[(k-1)\bar q(N,k-1) + (N+2-k)\bar q(N,k-2)\right]$

Q3

```
? → N : 1÷N! → A : 0 → B : 1 → K : Lbl 0 : K+1 → K : (N-K+1)÷K ×
(N-K+1)÷K × ((K-1)B + (N+2-K)A) → C ◢
B → A : C → B : K < N Goto 0 : "FIN"
```

$\omega_0 = 1$
$\omega_1 = 0$
$\omega_2 = 1$
$\omega_3 = 2$
$\omega_4 = 9$
$\omega_5 = 44$
$\omega_6 = 265$
$\omega_7 = 1854$
$\omega_8 = 14\,833$
$\omega_9 = 133496$
$\omega_{10} = 1\,334\,961$

| | |
|---|---|
| $k=0$ | 0,000 000 |
| $k=1$ | 0 |
| $k=2$ | 0,000 012 |
| $k=3$ | 0,000 066 |
| $k=4$ | 0,000 521 |
| $k=5$ | 0,003 056 |
| $k=6$ | 0,015 336 |
| $k=7$ | 0,061 310 |
| $k=8$ | 0,183 941 |
| $k=9$ | 0,367 879 |
| $k=10$ | 0,367 879 |