CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

jeudi 24 avril 1997, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

Une éprouvette contient 10 bactéries, 4 sont des bactéries de type A, 6 de type B. On les laisse se reproduire en milliers d'exemplaires, la proportion de bactéries de chaque type restant inchangée. On prélève alors, au hasard, 10 bactéries que l'on met dans une autre éprouvette. On les laisse se reproduire en milliers d'exemplaires dans les mêmes conditions que précédemment, et on recommence l'expérience.
Que se passe-t-il après un grand nombre d'expériences?

L'énoncé théorique ci-dessous propose un modèle probabiliste pour répondre à cette question.

Définitions. Soit une variable aléatoire X; on note $E(X)$ l'espérance de X si celle-ci existe.

On note N un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{0,..,N\}$. On pose $p = \frac{k_0}{N}$ et $q = 1-p$.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, A, P), à valeurs dans $\{0,..,N\}$, dont les lois de probabilité sont définies de la manière suivante:

X_0 est la variable certaine égale à k_0.
X_1 suit la loi binomiale de paramètres N et p. (Par convention, on dit que la loi binomiale de paramètres N et 0 est la loi de la variable certaine égale à 0 et que la loi binomiale de paramètres N et 1 est la loi de la variable certaine égale à N).
Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,..,N\}$ tel que $P(X_n = k) \neq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n=k)$ est la loi binomiale de paramètres N et $\frac{k}{N}$. En d'autres termes:
pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,..,N\}$ tel que $P(X_n = k) \neq 0$ et pour tout entier i de $\{0,..,N\}$,

$$P(X_{n+1} = i / X_n = k) = C_N^i \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}$$ (avec la convention habituelle que $0^0 = 1$).

On a de plus l'hypothèse (H): pour tout entier n non nul, pour tout n-uplet $(k_1,..,k_n)$ de $\{0,..,N\}^n$ tel que $P(X_n = k_n, ..., X_1 = k_1) \neq 0$, pour tout entier i de $\{0,..,N\}$, $P(X_{n+1} = i / X_n = k_n, ..., X_1 = k_1) = P(X_{n+1} = i / X_n = k_n)$.
Cette hypothèse n'est utile que pour la question 6. de la partie 1.

On définit la suite de variables aléatoires $(F_n)_{n\geq 0}$ par $F_n = \frac{X_n}{N}$.

PRELIMINAIRE

Dans l'exemple ci-dessus, en appelant N le nombre de bactéries prélevées à chaque expérience, k_0 le nombre de bactéries de type A dans la première éprouvette au début de la première expérience et n le numéro de l'expérience, donner une interprétation de la variable X_n et justifier par des arguments tirés du cours, l'utilisation de la loi binomiale. Comment interpréter l'hypothèse (H)?

PARTIE 1

Dans cette partie, $N = 3$.

1) Que dire de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ si $k_0 = 0$? Si $k_0 = 3$?

On suppose désormais, dans la suite de cette partie, que $k_0 = 1$.

2) Pour tout entier n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. Montrer que $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix}$.

3) a) Soit le vecteur ligne $V = (0,1,2,3)$. Calculer VA.
b) Montrer que $E(X_n) = V\,U_n$, pour tout entier n. En déduire la valeur de $E(X_n)$.

4) a) On pose $Y_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\-1\end{pmatrix}$ et $Y_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. Calculer AY_2 et AY_3 en fonction de Y_2 et Y_3.

b) Montrer que A est diagonalisable. Donner ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.
c) Calculer A^n pour tout entier n.

5) a) Montrer que la loi de X_n est donnée par:

$$P(X_n=0)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n,\quad P(X_n=1)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$$

$$P(X_n=2)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right),\quad P(X_n=3)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite?

6) Pour tout entier n non nul, on définit l'événement $B_n=\bigcap_{k=1}^{n}(X_k\leq 1)$.

On pose $x_1=P(X_1=0)$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $x_k=P(X_1=1,\dots,X_{k-1}=1,X_k=0)$, et pour tout entier k non nul, $y_k=P(X_1=1,\dots,X_k=1)$.

a) Exprimer pour tout entier k non nul, x_{k+1} et y_{k+1} en fonction de y_k. En déduire les valeurs de x_n et y_n pour tout entier n non nul.

b) Montrer que $P(B_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k+y_n$. En déduire $P(B_n)$ et la limite de la suite $(P(B_n))_{n\geq 1}$.

c) En déduire la probabilité qu'il existe n vérifiant $F_n>0,5$.

PARTIE 2

Dans cette partie, N est un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{1,..,N-1\}$.

On pose pour tout entier n, $u_n=P(X_n=0)+P(X_n=N)$ et $v_n=1-u_n$.

A. Loi de X_n

1) Montrer que pour tout entier i de $\{0,..,N\}$, $P(X_{n+1}=i)=\sum_{k=0}^{N}P(X_n=k)\,C_N^i\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}$.

2) Montrer que pour tout entier n, $E(X_{n+1})=E(X_n)$.

3) a) Montrer que pour tout entier n, $E\left[X_{n+1}(N-X_{n+1})\right]=\frac{N-1}{N}E\left[X_n(N-X_n)\right]$.

b) En déduire la valeur de $E\left[X_n(N-X_n)\right]$ en fonction de n, N et k_0.

4) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et convergente.

5) a) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans IR_+, prenant un nombre fini de valeurs.
Montrer que pour tout réel a strictement positif, $P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}$.

b) Etudier sur $[1,N-1]$ la fonction f définie par: $\forall x\in[1,N-1], f(x)=x(N-x)$.

c) En utilisant la valeur de $E\left[X_n(N-X_n)\right]$, montrer que pour tout entier n, $0\leq v_n\leq pq\frac{N^2}{N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$.

6) a) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$?

b) En déduire que pour tout entier k de $\{1,..,N\text{-}1\}$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = 0$.

c) En utilisant le résultat du 2), montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = N) = p$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 0)$.

d) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geq 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite?

B. Temps d'arrêt

On définit la variable aléatoire T par:

si pour tout entier n, $(X_n \neq 0)$ et $(X_n \neq N)$, alors $T = 0$

sinon, $T = n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = N)$.

1) Que vaut $P(T=0)$? Montrer que pour tout entier n non nul, $P(T=n) = v_{n-1} - v_n$.

2) a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} kP(T = k) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - nv_n$.

b) En déduire que T admet une espérance et que $E(T) \leq pq\dfrac{N^3}{N-1}$ (on ne cherchera pas à calculer $E(T)$).

C. Retour aux bactéries

Dans l'exemple des bactéries, on a posé la question : « Que se passe-t-il après un grand nombre d'expériences ? ». Pouvez-vous maintenant y répondre ?

PRELIMINAIRE

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. X_n compte le nombre de bactéries du type A dans les N bactéries prélevées lors de la $n^{ième}$ expérience.

Rappel.. Si X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ suivant une loi hypergéométrique de paramètre Π, m, p et si $\Pi > 10m$ on peut approximer X par une loi binomiale de paramètres m et p.

Soit $k \in [\![0, N]\!]$. Supposons l'événement $\{X_n = k\}$ réalisé. Avant la $(n+1)^{ième}$ expérience l'éprouvette contient S_n bactéries, $\frac{k}{N} S_n$ du type A et $(1-\frac{k}{N}) S_n$ du type B. Dans ces conditions le nombre de bactéries du type A obtenues lors du prélèvement de N bactéries suit une loi hypergéométrique de paramètres $S_n, N, \frac{k}{N}$.
Ila loi de X_{n+1} sachant $\{X_n = k\}$ est hypergéométrique de paramètres S_n, N et k/N.
S_n étant (sans doute) très grand devant N (on parle de reproduction par milliers) on peut s'autoriser à considérer que cette loi est binomiale de paramètres N et $\frac{k}{N}$ (voir le rappel !)

Donc $\forall k \in [\![0, N]\!]$, $X_{n+1} / \{X_n = k\} \hookrightarrow \mathcal{B}(N, \frac{k}{N})$ au moins lorsque la probabilité de $\{X_n = k\}$ n'est pas nulle.

L'hypothèse (H) indique que le processus est sans mémoire, autrement dit ce qui se produit au cours de la $(n+1)^{ième}$ expérience ne dépend que du résultat de la $n^{ième}$ expérience.

PARTIE I

(Q1) Si $k_0=0$, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de var quasi-certaines égales à 0.

Si $k_0=N=3$, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de var quasi-certaines égales à N.

Remarque.- Voir une démonstration à la fin par récurrence.

(Q2) Pour ne pas me répéter je me propose de traiter la question 1 du A de la partie II qui contient en partie cette question.

Soit $i\in [\![0,N]\!]$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

V1 Une première version négligente. $(\{X_n=\ell\})_{\ell\in[\![0,N]\!]}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne alors :

$p(X_{n+1}=i)=\sum_{\ell=0}^{N} p(X_{n+1}=i/X_n=\ell)\,p(X_n=\ell)$

Or $X_{n+1}/\{X_n=\ell\}\hookrightarrow \mathcal{B}(N,\frac{\ell}{N})$.

Par conséquent : $p(X_{n+1}=i)=\sum_{\ell=0}^{N} C_N^i\left(\frac{\ell}{N}\right)^i\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i}p(X_n=\ell)$.

V2 Plus précisément.. Ce qui précède est ce que l'on fait le plus souvent. Mais ici le texte est très précis et dit que $X_{n+1}/_{\{X_n=\ell\}}\hookrightarrow\mathcal{B}(N,\frac{\ell}{N})$ dans la mesure où $p(\{X_n=\ell\})\neq 0$.

Il faut donc jouer beaucoup plus fin. Notons que le système complet $(\{X_n=\ell\})_{\ell\in[\![0,N]\!]}$ nous permet d'écrire que :

$p(X_{n+1}=i)=\sum_{\ell=0}^{N} p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=\ell\})$.

Fixons ℓ dans $[\![0,N]\!]$ et calculons $p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=\ell\})$ en distinguant deux cas.

1er Cas.- $p(\{X_n=\ell\})\neq 0$ alors $p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=\ell\})=p(X_{n+1}=i/X_n=\ell)\,p(X_n=\ell)$

donc $p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=\ell\})=C_N^i\left(\frac{\ell}{N}\right)^i\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i}p(X_n=\ell)$

2e Cas.- $p(\{X_n=\ell\})=0$ alors $\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=\ell\}\subset\{X_n=\ell\}$ donc :

$0\leqslant p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=\ell\})\leqslant p(X_n=\ell)=0$; $p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=\ell\})=p(X_n=\ell)=0$

Mais alors on peut encore écrire : $p(\{X_{n+1}=i\}\cap\{X_n=\ell\})=C_N^i\left(\frac{\ell}{N}\right)^i\left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i}p(X_n=\ell)$!

Cette fois c'est clair : $\forall i \in [\![0,N]\!]$, $p(X_{n+1}=i) = \sum_{\ell=0}^{N} C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i} p(X_n=\ell)$ au moins pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Reste le cas $n=0$. $X_{n+1} = X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(N, \frac{k_0}{N})$. $X_0 = k_0$.

$$\forall i \in [\![0,N]\!],\ p(X_{n+1}=i) = C_N^i \left(\frac{k_0}{N}\right)^i \left(1-\frac{k_0}{N}\right)^{N-i} \underset{\uparrow}{=} \sum_{\ell=0}^{N} C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i} p(X_n=\ell)$$

$$p(X_n=\ell) = p(X_0=\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ell = k_0 \\ 0 & \text{si } \ell \neq k_0 \end{cases}$$

Finalement : $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in [\![0,N]\!],\ p(X_{n+1}=i) = \sum_{\ell=0}^{N} C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i} p(X_n=\ell).}}$

Ici $N=3$ et $k_0 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall i \in [\![0,3]\!]$, $p(X_{n+1}=i) = \sum_{\ell=0}^{3} C_3^i \left(\frac{\ell}{3}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{3}\right)^{3-i} p(X_n=\ell)$.

$$p(X_{n+1}=0) = \sum_{\ell=0}^{3} \left(1-\frac{\ell}{3}\right)^3 p(X_n=\ell) = p(X_n=0) + \frac{8}{27} p(X_n=1) + \frac{1}{27} p(X_n=2).$$

$$p(X_{n+1}=1) = \sum_{\ell=0}^{3} 3 \times \frac{\ell}{3} \left(1-\frac{\ell}{3}\right)^2 p(X_n=\ell) = \frac{4}{9} p(X_n=1) + \frac{2}{9} p(X_n=2)$$

$$p(X_{n+1}=2) = \sum_{\ell=0}^{3} 3 \times \left(\frac{\ell}{3}\right)^2 \left(1-\frac{\ell}{3}\right) p(X_n=\ell) = \frac{2}{9} p(X_n=1) + \frac{4}{9} p(X_n=2)$$

$$p(X_{n+1}=3) = \sum_{\ell=0}^{3} 1 \times \left(\frac{\ell}{3}\right)^3 p(X_n=\ell) = \frac{1}{27} p(X_n=1) + \frac{8}{27} p(X_n=2) + p(X_n=3)$$

ce qui donne matriciellement :

$$\begin{pmatrix} p(X_{n+1}=0) \\ p(X_{n+1}=1) \\ p(X_{n+1}=2) \\ p(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(X_n=0) \\ p(X_n=1) \\ p(X_n=2) \\ p(X_n=3) \end{pmatrix};\ \text{donc}\ \underline{\underline{U_{n+1} = AU_n.}}$$

(Q3) a) $VA = (0,1,2,3) \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} & \frac{8}{27} & 1 \end{pmatrix} = (0,1,2,3)$. $\underline{\underline{VA = V.}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Pour $A = (a_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq 3 \\ 0 \leq j \leq 3}}$. $\forall (i,j) \in [\![0,3]\!]^2$, $a_{ij} = p(X_{n+1}=i / X_n=j)$.

donc $\forall j \in [\![0,3]\!]$, $\sum_{i=0}^{3} a_{ij} = \sum_{i=0}^{3} p(X_{n+1}=i / X_n=j) = 1$ car $(\{X_{n+1}=i\})_{0\le i\le 3}$ est un système complet d'événements. ce qui justifie le fait que la somme des coefficients de chaque colonne de la matrice vaut 1.

Remarquons encore que si l'on pose $VA = (v'_0, v'_1, v'_2, v'_3)$,

$\forall j \in [\![0,3]\!]$, $v'_j = \sum_{i=0}^{3} i\, a_{ij} = \sum_{i=0}^{3} i\, p(X_{n+1}=i/X_n=j) = E(X_{n+1}/X_n=j)$.

Donc car si $VA=V$: $\forall j \in [\![0,3]\!]$, $E(X_{n+1}/X_n=j) = j$.

Or $E(X_{n+1}) = \sum_{j=0}^{3} E(X_{n+1}/X_n=j)\, p(X_n=j)$; $E(X_{n+1}) = \sum_{j=0}^{3} j\, p(X_n=j) = E(X_n)$!

retrouvons ce résultat. Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$VU_n = (0,1,2,3)\begin{pmatrix} p(X_n=0)\\ p(X_n=1)\\ p(X_n=2)\\ p(X_n=3)\end{pmatrix} = 0\,p(X_n=0)+1\,p(X_n=1)+2\,p(X_n=2)+3\,p(X_n=3) = E(X_n).$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $E(X_n)=VU_n$. Donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = VU_{n+1} = VAU_n = VU_n = E(X_n)$.

La suite $(E(X_n))_{n\ge 0}$ est constante. Comme $E(X_0)=1$. $\forall n\in\mathbb{N}$, $E(X_n)=1$.

(Q4) a) Un calcul simple donne : $AY_2 = \frac{2}{9}Y_2$ (resp. $AY_3 = \frac{2}{3}Y_3$)

b) Notons que $\frac{2}{9}$ et $\frac{2}{3}$ sont des valeurs propres de A car $Y_2\neq 0$ et $Y_3\neq 0$!

Notons encore que 1 est valeur propre de A car $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\neq 0$ et $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Notons $\widehat{F}_1, \widehat{F}_{2/9}, \widehat{F}_{2/3}$ les sous-espaces propres de A associés aux valeurs propres 1, 2/9, 2/3.

$\widehat{F}_1, \widehat{F}_{2/9}$ et $\widehat{F}_{2/3}$ étant en somme directe dans $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, $\dim \widehat{F}_1 + \dim \widehat{F}_{2/9} + \dim \widehat{F}_{2/3} \le 4$

Or $\dim \widehat{F}_{2/9} \ge 1$, $\dim \widehat{F}_{2/3} \ge 1$ et $\dim \widehat{F}_1 \ge 2$ car $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ sont des éléments non liés de $\widehat{F}_1$

Nécessairement $\dim \widehat{F}_1 = 2$, $\dim \widehat{F}_{2/9} = \dim \widehat{F}_{2/3} = 1$

$2+1+1=4$! Donc 1°. A n'a pas d'autre valeur propre que 1, $\frac{2}{9}$ et $\frac{2}{3}$

2°. A est diagonalisable car la somme des dimensions des sous-espaces propres est 4.

$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $1, 1, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}$.

c) Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base ci-dessus.

$P^{-1}AP = D$ où $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2/9&0\\0&0&0&2/3\end{pmatrix}$. $A = PDP^{-1}$

$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n = (PDP^{-1})^n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{récurrence simple}}}{=} PD^nP^{-1} = P\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&(2/9)^n&0\\0&0&0&(2/3)^n\end{pmatrix}P^{-1}$. Reste à calculer P^{-1}.

Soient $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}$ $\in$ deux éléments de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ tels que $PX=Y$

$$\begin{cases}x'=x+z+t\\ y'=-3z-t\\ z'=3z-t\\ t'=y-z+t\end{cases}\qquad \begin{cases}t=-\frac{1}{2}(y'+z')\\ z=\frac{1}{3}(z'+t)=\frac{1}{6}(2z'-y'-z')=\frac{1}{6}(-y'+z')\\ x=x'-z-t=\frac{1}{6}(6x'+y'-z'+3y'+3z')=x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z'\\ y=t'+z-t=\frac{1}{6}(6t'-y'+z'+3y'+3z')=t'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'=\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'+t'\end{cases}$$

Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2/3&1/3&0\\0&1/3&2/3&1\\0&-1/6&1/6&0\\0&-1/2&-1/2&0\end{pmatrix}$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour simplifier l'écriture $\alpha=(2/9)^n$ et $\beta=(2/3)^n$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&0&-3&-1\\0&0&3&-1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\alpha&0\\0&0&0&\beta\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&\alpha&\beta\\0&0&-3\alpha&-\beta\\0&0&3\alpha&-\beta\\0&1&-\alpha&\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2/3&1/3&0\\0&1/3&2/3&1\\0&-1/6&1/6&0\\0&-1/2&-1/2&0\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&2/3-\alpha/6-\beta/2&1/3+\alpha/6-\beta/2&0\\0&\alpha/2+\beta/2&-\alpha/2+\beta/2&0\\0&-\alpha/2+\beta/2&\alpha/2+\beta/2&0\\0&1/3+\alpha/6-\beta/2&2/3-\alpha/6-\beta/2&1\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n&\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n&0\\0&\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n&-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n&0\\0&-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n&\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n&0\\0&\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n&\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n&1\end{pmatrix}$$

Q5 a) $U_0 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$ (récurrence immédiate). U_n est donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$ la deuxième colonne de A^n.

Par conséquent $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(X_n=0)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n$, $P(X_n=1)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$

$P(X_n=2)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$, $P(X_n=3)=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n$

Remarques. 1. Observons qu'il n'est pas utile de calculer A^n pour obtenir U_n. Il suffit de décomposer U_0 sur une base de vecteurs propres. Posons $Y_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $Y_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.
(Y_0,Y_1,Y_2,Y_3) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres $1, 1, 2/9$ et $2/3$.
donc $\exists (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, $U_0 = aY_0+bY_1+cY_2+dY_3$.
$\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n = A^nU_0 = a\,A^nY_0+b\,A^nY_1+c\,A^nY_2+d\,A^nY_3$
$\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n = aY_0+bY_1+c\left(\frac{2}{9}\right)^nY_2+d\left(\frac{2}{3}\right)^nY_3$. Il ne reste plus qu'à obtenir a,b,c,d.
(a,b,c,d) sont les coordonnées de U_0 dans la base (Y_0,Y_1,Y_2,Y_3) donc $P\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=U_0=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.
donc $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ est la deuxième colonne de P^{-1}. $(a,b,c,d)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{6},-\frac{1}{2}\right)$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ... ce qui redonne le résultat mais plus rapidement.

Notons que P^{-1} n'est pas utile pour trouver (a,b,c,d) ; il suffit de résoudre le système $P\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ ce qui est plus simple que de trouver P^{-1}.

2. On peut encore aller plus vite. Posons $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=P(X_n=0)$, $b_n=P(X_n=1)$, $c_n=P(X_n=2)$ et $d_n=P(X_n=3)$. $a_0=c_0=d_0=0$ et $b_0=1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+\frac{8}{27}b_n+\frac{1}{27}c_n \\ b_{n+1}=\frac{4}{9}b_n+\frac{2}{9}c_n \\ c_{n+1}=\frac{2}{9}b_n+\frac{4}{9}c_n \\ d_{n+1}=\frac{1}{27}b_n+\frac{8}{27}c_n+d_n \end{cases}$$

$\forall n\in\mathbb{N}$, $b_{n+1}+c_{n+1}=\frac{2}{3}(b_n+c_n)$ et $b_{n+1}-c_{n+1}=\frac{2}{9}(b_n-c_n)$

donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n+c_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n(b_0+c_0)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $b_n-c_n=\left(\frac{2}{9}\right)^n(b_0-c_0)=\left(\frac{2}{9}\right)^n$

Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$ et $c_n=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^{(*)}$, $a_n = a_n - a_0 = \sum_{\ell=0}^{n-1}(a_{\ell+1}-a_\ell) = \sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{8}{27}b_\ell + \frac{1}{27}c_\ell\right)$

$\forall n\in\mathbb{N}^{(*)}$, $a_n = \sum_{\ell=0}^{n-1}\left[\frac{8}{27}\times\frac12\left(\left(\frac23\right)^\ell+\left(\frac29\right)^\ell\right) + \frac{1}{27}\,\frac12\left(\left(\frac23\right)^\ell - \left(\frac29\right)^\ell\right)\right] = \frac16\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac23\right)^\ell - \frac{7}{54}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac29\right)^\ell$

$\forall n\in\mathbb{N}^{(*)}$, $a_n = \frac16\,\frac{1-\left(\frac23\right)^n}{1-\frac23} - \frac{7}{54}\,\frac{1-\left(\frac29\right)^n}{1-\frac29} = \frac12\left(1-\left(\frac23\right)^n\right) - \frac16\left(1-\left(\frac29\right)^n\right) = \frac13 - \frac12\left(\frac23\right)^n - \frac16\left(\frac29\right)^n.$

d_n peut alors résulter de $d_n = 1-a_n-b_n-c_n$.

En une demi-page le tour est joué. Mais pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué !

b) $\lim_{n\to+\infty} p(X_n=0) = \frac23$, $\lim_{n\to+\infty} p(X_n=1) = \lim_{n\to+\infty} p(X_n=2) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} p(X_n=3) = \frac13$ car $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac23\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac29\right)^n = 0$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} p(F_n=0) = \frac23$, $\lim_{n\to+\infty} p(F_n=\frac13) = \lim_{n\to+\infty} p(F_n=\frac23) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} p(F_n=1) = \frac13$

$(F_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/3$.

Q6 **a)** Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Supposons que $p(X_1=1,\dots,X_k=1) = y_k \neq 0$.

$x_{k+1} = p(X_1=1,\dots,X_k=1, X_{k+1}=0) = p(X_{k+1}=0 / X_1=1,\dots,X_k=1)\,p(X_1=1,\dots,X_k=1)$

$x_{k+1} = p(X_{k+1}=0/X_k=1)\,y_k = C_3^0\left(\frac13\right)^0\left(1-\frac13\right)^{3-0} y_k = \frac{8}{27}y_k$. $x_{k+1} = \frac{8}{27}y_k$.

$y_{k+1} = p(X_1=1,\dots,X_k=1, X_{k+1}=1) = p(X_{k+1}=1 / X_1=1,\dots,X_k=1)\,p(X_1=1,\dots,X_k=1)$

$y_{k+1} = p(X_{k+1}=1/X_k=1)\,y_k = C_3^1\left(\frac13\right)^1\left(1-\frac13\right)^{3-1} y_k = \left(\frac23\right)^2 y_k = \frac49 y_k$. $y_{k+1} = \frac49 y_k$.

Supposons maintenant $p(X_1=1,\dots,X_k=1) = y_k = 0$.

$\{X_1=1,\dots,X_k=1, X_{k+1}=0\} \subset \{X_1=1,\dots,X_k=1\}$ et $\{X_1=1,\dots,X_k=1, X_{k+1}=1\} \subset \{X_1=1,\dots,X_k=1\}$

donc $0 \leq x_{k+1} = p(X_1=1,\dots,X_k=1,X_{k+1}=0) \leq p(X_1=1,X_2=1,\dots,X_k=1) = y_k = 0$.

Finalement $x_{k+1} = y_k = 0$. De même $y_{k+1} = y_k = 0$; on a donc encore $x_{k+1} = \frac{8}{27}y_k$ et $y_{k+1} = \frac49 y_k$.

Finalement : $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $x_{k+1}=\frac{8}{27}y_k$ et $y_{k+1}=\frac{4}{9}y_k$.

La suite $(y_k)_{k\geq1}$ est géométrique de raison $\frac{4}{9}$ et de premier terme $y_1=p(X_1=1)=C_3^1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$y_1=\frac{4}{9}$. donc $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $y_k=\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}y_1=\left(\frac{4}{9}\right)^k$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*$, $x_{k+1}=\frac{8}{27}y_k$ donc $\forall k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, $x_k=\frac{8}{27}y_{k-1}=\left(\frac{8}{27}\right)\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^k$

$x_1=p(X_1=0)=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^1$

donc $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $x_k=\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^k$ et $y_k=\left(\frac{4}{9}\right)^k$... ou $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x_n=\frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n$ et $y_n=\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Observons que si $k\in\mathbb{N}^*$ dès que l'événement $\{X_k=0\}$ est réalisé alors $\{X_i=0\}$ est réalisé pour tout $i\in[\![k,+\infty[\![$ dès lors $B_n=\bigcap_{k=1}^{n}\{X_k\leq1\}$ est la réunion disjointe des événements $\{X_1=0\}$, $\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}$, $\{X_1=1\}\cap\{X_2=1\}\cap\{X_3=0\},\dots,$ $\{X_1=1\}\cap\{X_2=1\}\cap\dots\cap\{X_{n-1}=1\}\cap\{X_n=0\}$, $\{X_1=1\}\cap\{X_2=1\}\cap\dots\cap\{X_n=1\}$.

Donc $p(B_n)=p(X_1=0)+p(X_1=1,X_2=0)+p(X_1=1,X_2=1,X_3=0)+\dots+p(X_1=1,X_2=1,\dots,X_{n-1}=1,X_n=0)+$ $p(X_1=1,X_2=1,\dots,X_n=1)$

dès lors $p(B_n)=x_1+x_2+\dots+x_n+y_n$. $p(B_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k+y_n$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p(B_n)=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k+\left(\frac{4}{9}\right)^n=\frac{2}{3}\,\frac{1-(4/9)^n}{1-4/9}\times\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^n=\frac{8}{15}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)+\left(\frac{4}{9}\right)^n$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $p(B_n)=\frac{8}{15}+\frac{7}{15}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n$ $\qquad$ $\lim_{n\to+\infty}p(B_n)=\frac{8}{15}$.

c) Notons S l'événement : " il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $F_n>0,5$ "

$\bar{S}=\bigcap_{n=0}^{+\infty}\{F_n\leq0,5\}=\bigcap_{n=0}^{+\infty}\{X_n\leq\frac{3}{2}\}=\bigcap_{n=0}^{+\infty}\{X_n\leq1\}=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\{X_n\leq1\}$ car $\{X_0\leq1\}$ est un événement certain (X_0 est la variable aléatoire égale à $k_0=1$).

On a encore $\bar{S}=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\{X_n\leq1\}=\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n$. $p(\bar{S})=p\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\right)$. Notons que la suite $(B_n)_{n\geq1}$ est décroissante, par conséquent $p\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}B_n\right)=\lim_{n\to+\infty}p(B_n)=\frac{8}{15}$; $p(\bar{S})=\frac{8}{15}$; $p(S)=\frac{7}{15}$

La probabilité pour qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $F_n>0,5$ est $7/15$.

PARTIE 2

$N \geq 2$ et $k_0 \in [\![1, N-1]\!]$

A Loi de X_n

Q1 Cette question a été détaillée en I Q1. Rappelons que :

$$\forall i \in [\![0,N]\!],\quad P(X_{n+1}=i) = \sum_{\ell=0}^{N} P(X_n=\ell)\, C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i}.$$

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$E(X_{n+1}) = \sum_{i=0}^{N} i\, P(X_{n+1}=i) = \sum_{i=0}^{N} i \left(\sum_{\ell=0}^{N} P(X_n=\ell)\, C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i}\right) = \sum_{\ell=0}^{N} P(X_n=\ell) \sum_{i=0}^{N} i\, C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i}$$

$$E(X_{n+1}) = \sum_{\ell=0}^{N} P(X_n=\ell) \left(\sum_{i=0}^{N} i\, C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i}\right)$$

Remarque.. cette formule n'est autre que : $E(X_{n+1}) = \sum_{\ell=0}^{N} P(X_n=\ell)\, E(X_{n+1}/X_n=\ell)$!

Si X est une var suivant une loi binômiale de paramètre N et $\frac{\ell}{N}$ ($\ell \in [\![0,N]\!]$),

$E(X) = N \times \frac{\ell}{N} = \ell$ et $V(X) = N\left(\frac{\ell}{N}\right)\left(1-\frac{\ell}{N}\right) = \frac{\ell(N-\ell)}{N}$. Par conséquent :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{N} i\, C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i} = \ell} \text{ et } \boxed{\sum_{i=0}^{N} i(N-i)\, C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i} = N E(X) - E(X^2) = N E(X) - V(X) - E(X)^2}$$

$$= N\ell - \frac{\ell(N-\ell)}{N} - \ell^2 = \boxed{\frac{N-1}{N}\, \ell(N-\ell).}$$

Revenons à $E(X_{n+1})$.

$$E(X_{n+1}) = \sum_{\ell=0}^{N} P(X_n=\ell) \times \left(\sum_{i=0}^{N} i\, C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i}\right) = \sum_{k=0}^{N} P(X_n=\ell) \times \ell = E(X_n)$$

donc $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_{n+1}) = E(X_n).}$ $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ E(X_n) = E(X_0) = \frac{k_0}{N}.}$

Q3 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $E(X_{n+1}(N-X_{n+1})) = \sum_{i=0}^{N} i(N-i)\, P(X_{n+1}=i)$

$$E(X_{n+1}(N-X_{n+1})) = \sum_{i=0}^{N} i(N-i) \left(\sum_{\ell=0}^{N} C_N^{i} \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i} P(X_n=\ell)\right)$$

$$E(X_{n+1}(N-X_{n+1})) = \sum_{\ell=0}^{N} P(X_n=\ell) \left(\sum_{i=0}^{N} i(N-i)\, C_N^i \left(\frac{\ell}{N}\right)^i \left(1-\frac{\ell}{N}\right)^{N-i}\right) = \sum_{\ell=0}^{N} P(X_n=\ell)\, \frac{N-1}{N}\, \ell(N-\ell)$$

donc $E(X_{n+1}(N-X_{n+1})) = \frac{N-1}{N} \sum_{\ell=0}^{N} \ell(N-\ell)\, P(X_n=\ell) = \frac{N-1}{N}\, E(X_n(N-X_n))$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad E(X_{n+1}(N-X_{n+1})) = \frac{N-1}{N}\, E(X_n(N-X_n)).$$

b) $(E(X_n(N-X_n)))_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$ et de premier terme $E(X_0(N-X_0)) = \ell_0(N-\ell_0)$. Par conséquent :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_n(N-X_n)) = \ell_0(N-\ell_0)\left(\frac{N-1}{N}\right)^n.$

Q4 a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = p(X_{n+1}=0) + p(X_{n+1}=N) = \sum_{k=0}^{N} p(X_n=k)\, C_N^0 \left(\frac{k}{N}\right)^0\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-0} + \sum_{k=0}^{N} p(X_n=k)\, C_N^N\left(\frac{k}{N}\right)^N\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-N}.$$

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^N p(X_n=k) + \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^N p(X_n=k)$$

$$u_{n+1} = p(X_n=0) + p(X_n=N) + \sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^N p(X_n=k) + \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^N p(X_n=k).$$

donc $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^N p(X_n=k) + \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^N p(X_n=k) \geq 0.$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = p(X_n=0) + p(X_n=N) \leq \sum_{k=0}^{N} p(X_n=k) = 1$. $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par 1.

Par conséquent : $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.

Q5 a) Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ l'ensemble des valeurs que prend X ($r \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 < x_2 < \dots < x_r$).

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $I = \{i \in [\![1, r]\!] \mid x_i \geq a\}$

$$p(X\geq a) = \sum_{i\in I} p(X=x_i) = \frac{1}{a}\sum_{i\in I} a\, p(X=x_i) \leq \frac{1}{a}\sum_{i\in I} x_i\, p(X=x_i) \underset{x_i p(X=x_i)\geq 0.}{\leq} \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{r} x_i\, p(X=x_i)$$

donc $p(X\geq a) \leq \frac{1}{a}E(X)$

$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad p(X\geq a) \leq \frac{1}{a}E(X).$

Remarque : C'est l'inégalité de Markov. On retrouve facilement B.T. en remplaçant X par $(X-E(X))^2$ et a par ε^2

b) f est dérivable sur $[1,N-1]$ et $\forall x \in [1,N-1]$, $f'(x) = N - 2x$.

x	1		$N/2$		$N-1$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$N-1$	$\nearrow$		$\searrow$	$N-1$

f est donc croissante sur $[1,\frac{N}{2}]$ ce qui donne : $\forall x \in [1,\frac{N}{2}]$, $f(x) \geq f(1) = N-1$

f est décroissante sur $[\frac{N}{2},N-1]$ ce qui donne : $\forall x \in [\frac{N}{2},N-1]$, $f(x) \geq f(N-1) = N-1$.

Finalement : $\forall x \in [1,N-1]$, $x(N-x) \geq N-1$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $E(X_n(N-X_n)) = \sum_{k=0}^{N} k(N-k)p(X_n=k) = \sum_{k=1}^{N-1} k(N-k)p(X_n=k) \geq (N-1)\sum_{k=1}^{N-1} p(X_n=k)$

donc $k_0(N-k_0)\left(\frac{N-1}{N}\right)^n \geq (N-1)\sum_{k=1}^{N-1} p(X_n=k) = (N-1)\left(1-p(X_n=0)-p(X_n=1)\right) = (N-1)V_n$.

Par conséquent : $0 \leq (N-1)V_n \leq k_0(N-k_0)\left(\frac{N-1}{N}\right)^n$; $0 \leq V_n \leq \frac{N^2}{N-1}\frac{k_0}{N}\left(1-\frac{k_0}{N}\right)\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq V_n \leq pq\,\frac{N^2}{N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$.

Q6 a) $\left|1-\frac{1}{N}\right| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n = 0$ et par encadrement : $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$.

b) Soit $k \in [\![1,N-1]\!]$. $0 \leq p(X_n=k) \leq \sum_{k=1}^{N-1} p(X_n=k) = 1-p(X_n=0)-p(X_n=N) = V_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par encadrement $\lim_{n\to+\infty} p(X_n=k) = 0$.

$\forall k \in [\![1,N-1]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} p(X_n=k) = 0$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_n) = k_0$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $k_0 = \sum_{k=0}^{N} k\,p(X_n=k) = \sum_{k=1}^{N} k\,p(X_n=k) = N p(X_n=N) + \sum_{k=1}^{N-1} k\,p(X_n=k)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $p(X_n=N) = \frac{k_0}{N} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} k\,p(X_n=k) = p - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} k\,p(X_n=k)$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} k\,p(X_n=k)\right) = 0$ car pour tout $k \in [\![1,N-1]\!]$, $\lim_{n\to+\infty} p(X_n=k) = 0$

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty} p(X_n=N) = p$. $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $p(X_n=0) = 1 - V_n - p(X_n=N)$

donc $\lim_{n\to+\infty} p(X_n=0) = 1 - 0 - p = q$ $\quad \lim_{n\to+\infty} p(X_n=0) = q$.

d) $F_n(\Omega)=\{0,\frac{1}{N},\frac{2}{N},\dots,\frac{N-1}{N},1\}$. Soit $k\in[\![0,N]\!]$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(F_n=\frac{k}{N}\right)=\lim_{n\to+\infty} P(X_n=k)=\begin{cases} q & \text{si } k=0\\ 0 & \text{si } k\in[\![1,N-1]\!]\\ p & \text{si } k=N\end{cases}$$

Par conséquent $(F_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

B Temps d'arrêt

Q1 $\{T=0\}=\bigcap_{n=0}^{+\infty}(\{X_n\neq 0\}\cap\{X_n\neq N\}) \subset \{X_\ell\neq 0\}\cap\{X_\ell\neq N\}$ pour tout $\ell\in\mathbb{N}$.

Donc $\forall \ell\in\mathbb{N},\ 0\leq P(T=0)\leq P(\{X_\ell\neq 0\}\cap\{X_\ell\neq N\})=1-P(X_\ell=0)-P(X_\ell=N)=v_\ell$

$\forall \ell\in\mathbb{N},\ 0\leq P(T=0)\leq v_\ell$. Comme $\lim_{\ell\to+\infty} v_\ell=0$: $\underline{\underline{P(T=0)=0.}}$

Remarque.. Il est donc quasi-certain qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\{X_n=0\}$ ou $\{X_n=N\}$. Il est donc quasi-certain qu'il existe une expérience dont la réalisation conduit à n'obtenir que des bactéries d'un même type.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$\{T=0\}\cup\{T>n\}=\{X_n\neq 0\}\cap\{X_n\neq N\}$ car si $\{X_\ell=0\}$ (resp. $\{X_\ell=N\}$) se réalise, pour tout $i\in[\![\ell,+\infty[\![$ $\{X_i=0\}$ (resp. $\{X_i=N\}$) se réalise. Donc

$$P(T>n)=P(T=0)+P(T>n)\overset{\{T=0\}\cap\{T>n\}=\emptyset}{=}P(\{X_n\neq 0\}\cap\{X_n\neq N\})=1-P(X_n=0)-P(X_n=N)=v_n.$$

Par conséquent : $\underline{\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(T=n)=P(T>n-1)-P(T>n)=v_{n-1}-v_n.}}$

Remarque.. $\sum_{\ell=1}^{n} P(T=\ell)=\sum_{\ell=1}^{n}(v_{\ell-1}-v_\ell)=v_0-v_n\overset{a_0=0}{=}1-v_n$; comme $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$:

$\sum_{\ell=1}^{+\infty} P(T=\ell)=1$ donc $P(T=0)=1-\sum_{\ell=1}^{+\infty}P(T=\ell)=0$.

Q2 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\sum_{\ell=1}^{n}\ell P(T=\ell)=\sum_{\ell=1}^{n}\ell(v_{\ell-1}-v_\ell)=\sum_{\ell=1}^{n}\ell v_{\ell-1}-\sum_{\ell=1}^{n}\ell v_\ell\overset{\ell\to\ell+1}{=}\sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell+1)v_\ell-\sum_{\ell=1}^{n}\ell v_\ell$

$$\sum_{\ell=1}^{n}\ell P(T=\ell)=\sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell+1)v_\ell-\sum_{\underline{\underline{\ell=0}}}^{n}\ell v_\ell=\sum_{\ell=0}^{n-1}(\ell+1-\ell)v_\ell-n v_n.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \ell\, p(T=\ell) = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - n v_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} p(T>\ell) - n\, p(T>n)$ ... classique !

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq n v_n \leq pq \dfrac{N^2}{N-1}\, n\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n$.

Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(n v_n) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq pq \dfrac{N^2}{N-1}\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n$. La série de terme général $\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$ est convergente car $\left|1-\frac{1}{N}\right| < 1$ donc la série de terme général $pq\frac{N^2}{N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$ aussi. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général v_n converge. Posons $V = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{\ell=1}^{n} \ell\, p(T=\ell)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k - n v_n\right) = V - 0 = V$

La série de terme général $\ell\, p(T=\ell)$ est donc convergente et même absolument convergente car à termes positifs.

Donc T possède une espérance. $E(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} p(T>n)$.

Remarque. La démarche a consisté à montrer que la série de terme général $p(T>n)$ converge et qu'alors l'espérance de $E(T)$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p(T>n)$ ce qui est on ne peut plus classique.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n \leq pq\dfrac{N^2}{N-1}\left(1-\dfrac{1}{N}\right)^n$; $E(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq pq\frac{N^2}{N-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n$

$E(T) \leq pq\dfrac{N^2}{N-1}\;\dfrac{1}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)} = pq\dfrac{N^3}{N-1}$; $E(T) \leq pq\dfrac{N^3}{N-1}$.

Remarque. Supposons $N=3$ et $k_0=1$. $v_n = 1 - p(X_n=0) - p(X_n=3) = p(X_n=1) + p(X_n=2)$.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)\right] = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$.

$E(T) = 3$.

C.. Retour aux bactéries

Après un grand nombre d'expériences l'éprouvette contient des bactéries du même type ; du type A avec une probabilité $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ et du type B avec une probabilité $\frac{3}{5}$.

Ne reste plus qu'à écrire quelques programmes de simulation.

__Exercice__ Q1.. Ecrire un programme donnant le nombre d'expériences nécessaires pour qu'il ne reste plus que des bactéries d'un seul type ... ou donnant le premier t qui réalise l'évènement $\{X_t = 0\} \cup \{X_t = N\}$. On indiquera le type restant.

Q2.. Ecrire un programme itérant n fois la problématique précédente et donnant → " La moyenne des temps d'attente "

→ " la fréquence de réalisation de l'évènement $\{X_t = N\}$ ", autrement dit la fréquence du cas où il ne reste plus que des bactéries du type A.

D Simulations

Q1

```
(* simulation du temps d'attente T *)

program hec97m2;

uses crt;
var N,k,i,s,t:integer;p:real;

begin
randomize;
write('Donnez N. N=');readln(N);
write('Donnez la valeur k. k=');readln(k);

t:=0;
while (k<>0) and (k<>N) do
       begin
       t:=t+1;p:=k/N;s:=0;
       for i:=1 to N do if random<p then s:=s+1;
       write('k(',t,')=',s,' ');
       k:=s;
       end;
writeln;
If k=0 then
writeln('Au bout de ',t,' expériences il ne reste que des bactéries du type B')
else
writeln('Au bout de ',t,' expériences il ne reste que des bactéries du type A');
end.
```

```
)onnez N. N=10
)onnez la valeur k. k=4
:(1)=7 k(2)=9 k(3)=9 k(4)=10
\u bout de 4 expériences il ne reste que des bactéries du type A

)onnez N. N=10
)onnez la valeur k. k=4
:(1)=3 k(2)=2 k(3)=2 k(4)=2 k(5)=0
\u bout de 5 expériences il ne reste que des bactéries du type B

)onnez N. N=10
)onnez la valeur k. k=4
:(1)=2 k(2)=4 k(3)=6 k(4)=5 k(5)=6 k(6)=4 k(7)=6 k(8)=8 k(9)=8 k(10)=7 k(11)=7 k
 12)=8 k(13)=6 k(14)=5 k(15)=7 k(16)=6 k(17)=3 k(18)=1 k(19)=1 k(20)=0
u bout de 20 expériences il ne reste que des bactéries du type B

)onnez N. N=10
)onnez la valeur k. k=4
:(1)=4 k(2)=2 k(3)=0
u bout de 3 expériences il ne reste que des bactéries du type B
```

92

```
(* Moyenne du temps d'attente T *)

program hec97MIIb;

uses crt;
var N,k,m,tj,r,kj,s,i,j:integer;p,moy_T:real;


begin
clrscr;randomize;
write('Donnez N. N=');readln(N);
write('Donnez la valeur k. k=');readln(k);
write('Donnez le nombre m d''itérations. m=');readln(m);

moy_T:=0.0;r:=0;

for j:=1 to m do
    begin
    tj:=0;kj:=k;
    while (kj<>0) and (kj<>N) do
      begin
      tj:=tj+1;p:=kj/N;s:=0;
      for i:=1 to N do
          if random <p then s:=s+1;
      kj:=s;
      end;
     moy_T:=moy_T+tj;r:=r+kj;
     end;

moy_T:=moy_T/m;


writeln('Le temps moyen observé est : ',moy_T:5:2);
writeln('La fréquence observée de k=N est sensiblement : ',r/m/N:4:2);
writeln('La fréquence théorique est sensiblement : ',k/N:4:2);

end.
```

```
Donnez N. N=10
Donnez la valeur k. k=4
Donnez le nombre m d'itérations. m=1000
Le temps moyen observé est : 12.68
La fréquence observée de k=N est sensiblement : 0.41
La fréquence théorique est sensiblement : 0.40
```