



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et Concours

**ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON**

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Samedi 25 Avril 1998, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Toutes les variables aléatoires, considérées dans chaque partie de ce problème, sont des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

X étant une variable aléatoire admettant des moments d'ordre 1 et 2, $E(X)$ désigne l'espérance de X , $V(X)$ sa variance.

Tous les couples (X, Y) de variables aléatoires à densité considérés dans ce problème sont tels que X et Y admettent des moments d'ordre 1 et 2 et le produit XY est une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre 1. On définit alors la covariance de X et Y par:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

et on admet que cette covariance vérifie les propriétés suivantes :

1) $\text{cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \text{cov}(X, Z) + \beta \text{cov}(Y, Z)$

2) $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$

3) $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$

4) si X et Y sont indépendantes, alors $\text{cov}(X, Y) = 0$

où α et β sont des réels, X , Y et Z des variables aléatoires à densité.

Ces propriétés ne doivent pas être démontrées.

Un gestionnaire investit un capital parmi n actifs, notés $A_1, A_2, \dots, A_n$ (par exemple des actions), disponibles sur le Marché Boursier. Les rendements à un an de ces actifs, exprimés en pourcentage, sont des variables aléatoires $R_1, R_2, \dots, R_n$ admettant des moments d'ordre 1 et 2. Par exemple, si l'actif A_1 a rapporté 6%, R_1 prend la valeur 6.

Le gestionnaire constitue un portefeuille, c'est-à-dire un n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tel que, pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, x_i est un

réel positif ou nul et tel que : $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Chaque coefficient x_i représente la proportion du capital investie dans l'actif

A_i . Par exemple, si n vaut 3 et si le gestionnaire investit un quart du capital dans l'actif A_1 , la moitié du capital dans l'actif A_2 et le quart du capital dans l'actif A_3 , le portefeuille vaut $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un portefeuille donné, le rendement (en pourcentage) de ce portefeuille est la variable aléatoire :

$$R = \sum_{i=1}^n x_i R_i.$$

Notre gestionnaire prudent désire minimiser les risques et recherche pour cela les portefeuilles dont le rendement R est de variance minimale, sous certaines hypothèses.

Préliminaire

On considère le portefeuille : $Q = (x_1, \dots, x_n)$ et son rendement : $R = \sum_{i=1}^n x_i R_i$. On rappelle que la variance de R est :

$$V(R) = \sum_{i=1}^n x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j).$$

1) On suppose, dans un programme Pascal, avoir défini :

Const $n = 5$;

Type $Tab = \text{Array}[1..n] \text{ of } real$;

var $A: \text{Array}[1..n, 1..n] \text{ of } real$;

où $A[i, j]$ représente $\text{cov}(R_i, R_j)$.

Ecrire une fonction V de type *real* de paramètre le portefeuille Q de type Tab qui renvoie la valeur de $V(R)$.

2) On considère l'ensemble : $H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$. On admet que H est fermé.

On définit sur $\mathbb{R}^n$, la fonction $F: F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j)$.

Montrer que F admet un minimum sur H .

La suite du problème consiste à déterminer ce minimum et les points de H où ce minimum est atteint, pour répondre ainsi à la demande du gestionnaire prudent.

Partie 1

Dans cette partie, l'entier n vaut 2 et les rendements des actifs A_1 et A_2 sont notés respectivement X et Y . On suppose : $V(X) = 12$, $V(Y) = 3$, $cov(X, Y) = c$, où c est un réel donné.

Pour un réel a de $[0, 1]$, on considère le portefeuille $(a, 1 - a)$ dont le rendement est la variable aléatoire : $R = aX + (1 - a)Y$.

1) Montrer que l'on a : $|c| \leq 6$.

2) a) Montrer que l'on a : $V(R) = (15 - 2c)a^2 + 2(c - 3)a + 3$.

b) On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction h par : $h(x) = (15 - 2c)x^2 + 2(c - 3)x + 3$. Etudier les variations de h sur $[0, 1]$, en distinguant les deux cas : $c \in [-6, 3[$ et $c \in [3, 6]$. Montrer qu'il existe un unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale. On déterminera ce portefeuille en fonction de c .

3) a) On suppose : $c = -6$.

Déterminer le portefeuille dont le rendement R est de variance minimale et cette variance minimale. Que peut-on dire de la variable aléatoire R dans ce cas?

b) On suppose que les variables X et Y sont indépendantes. Montrer que $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est le portefeuille de rendement de variance minimale.

4) On suppose dans cette question que X et Y sont des variables gaussiennes indépendantes, X de moyenne égale à 6 et de variance égale à 12, Y de moyenne égale à 3 et de variance égale à 3.

Soit R le rendement du portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Quelle est la loi de R ? Calculer la probabilité que R soit supérieur ou égal

à 4. (On donne : $\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) = 0,60$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite).

5) On suppose dans cette question que les variables à densité X et Y sont indépendantes. On suppose de plus que X suit la loi uniforme sur $[0, 12]$ et que Y suit la loi uniforme sur $[0, 6]$.

a) Donner les valeurs des espérances de ces variables et vérifier : $V(X) = 12$, $V(Y) = 3$.

b) Déterminer la loi de la variable $4Y$, puis la densité de la variable $X + 4Y$. Tracer le graphe de cette densité.

c) Soit R le rendement du portefeuille $\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calculer la probabilité que R soit supérieur ou égal à 4.

Partie 2

Dans cette partie, n vaut 3 et les rendements des actifs A_1 , A_2 et A_3 sont notés respectivement X , Y et Z .

On suppose de plus : $V(X) = 2$, $V(Y) = V(Z) = 6$, $cov(X, Y) = -1$, $cov(X, Z) = 2$, $cov(Y, Z) = 1$.

On considère le portefeuille (x, y, z) dont le rendement est la variable : $R = xX + yY + zZ$.

La fonction f , l'ensemble K et l'ensemble K_0 sont définis comme suit :

pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6$, $K_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$

$K = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x + y \leq 1\}$, $K_0 = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x + y < 1\}$. On admet que K_0 est ouvert.

1) Montrer que le problème du gestionnaire revient à déterminer le minimum de f sur K . Dessiner le domaine K .

2) a) Montrer que f admet un minimum local sur $\mathbb{R}^2$ atteint au point (x_0, y_0) que l'on déterminera.

b) En déduire que f n'admet pas de minimum sur K_0 .

3) a) On pose : $K_1 = \{(0, y), y \in [0, 1]\}$, $K_2 = \{(x, 0), x \in [0, 1]\}$, $K_3 = \{(x, 1 - x), x \in [0, 1]\}$.

Déterminer les minimums de f respectivement sur K_1 , K_2 et K_3 .

b) En déduire l'unique portefeuille dont le rendement est de variance minimale.

Partie 3

Dans cette partie, n vaut 3 et les rendements des actifs A_1 , A_2 et A_3 sont notés respectivement X , Y et Z .

1) On suppose : $V(X) = V(Y) = V(Z) = 1$, $cov(X, Y) = cov(X, Z) = cov(Y, Z) = c$, où c est un réel donné.

a) Calculer $V(X + Y + Z)$. Montrer que l'on a : $c \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

b) On suppose : $c \neq 1$. On considère un portefeuille (x, y, z) de rendement R .

Montrer que l'on a : $V(R) = (1 - c) \left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 \right] + \frac{1 + 2c}{3}$.

Déterminer le portefeuille dont le rendement est de variance minimale.

2) Soit A , B , C des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant toutes la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$; on a donc : pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P(A = k) = P(B = k) = P(C = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

On suppose que les variables X , Y et Z vérifient :

$$\begin{cases} X = B + C \\ Y = A + C + 1 \\ Z = A + B + 2 \end{cases}$$

a) Déterminer les espérances, variances et covariances des variables X , Y et Z .

b) Montrer que le portefeuille de rendement de variance minimale est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

c) Déterminer la loi de $A+B+C$. En déduire la probabilité que le rendement R du portefeuille ci-dessus soit supérieur ou égal à 5.

Partie 4

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

On note M la matrice de covariance de $R_1, \dots, R_n$, matrice carrée d'ordre n dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $cov(R_i, R_j)$.

On note $M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles ayant n lignes et 1 colonne.

1) On considère un élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$: $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et la variable aléatoire : $T = \sum_{i=1}^n x_i R_i$.

Vérifier que l'on a : $V(T) = {}^t U M U$, où ${}^t U$ désigne la transposée de U .

2) a) Montrer que M est diagonalisable.

b) A l'aide du 1), montrer que les valeurs propres de M sont positives ou nulles.

3) On suppose M inversible. Pour tout (U, W) de $(M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, on pose $\phi(U, W) = {}^t U M W$.

a) Montrer : si ${}^t U M U = 0$, alors $U = 0$.

b) Montrer que ϕ est un produit scalaire. On note N la norme associée à ce produit scalaire.

c) Montrer : pour tout (U, W) de $(M_{n,1}(\mathbb{R}))^2$, $\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right) \right]^2 = \frac{1}{2} \left[(N(U))^2 + (N(W))^2 \right] - \left[N\left(\frac{U-W}{2}\right) \right]^2$.

d) En déduire l'unicité du portefeuille dont le rendement est de variance minimale (l'existence ayant été montrée dans le préliminaire).

PRELIMINAIRE

Q1) Cela ne pose aucun problème en raisonnant que :

$$V(R) = \sum_{i=1}^n x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j) = \sum_{i=1}^n \left(x_i \left[x_i V(R_i) + 2 \sum_{j=i+1}^n x_j \text{cov}(R_i, R_j) \right] \right)$$

$$V_i \in [0, n], V(R_i) = \text{cov}(R_i, R_i) !$$

```
(*ESCP 98*)

program variance;

const n=5;
type Tab=array[1..n] of real;

var A:array[1..n,1..n] of real;

function v(Q:tab):real;
var i,j:integer;t,s:real;

begin
  s:=0;
  for i:=1 to n do
    begin
      t:=0;
      for j:=i+1 to n do t:=t+Q[j]*A[i,j];
      s:=s+Q[i]*(Q[i]*A[i,i]+t+t);
    end;
  V:=s;
end;

begin
end.
```

Q2) Montrer que F est une fonction polynômiale d'ac que F est continue sur $\mathbb{R}^n$ d'ac sur H .

Vous savez déjà que H est fermé ; il ne reste donc plus qu'à montrer qu'il est borné pour conclure.

Soit $Q = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ un élément de H .

$$\forall j \in [1, n], |x_j| = x_j \leq \sum_{i=1}^n x_i = 1. \text{ d'ac } \forall j \in [1, n], |x_j| \leq 1.$$

$$\uparrow x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

$$\text{Ainsi } \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq 1 \text{ ou } \|Q\|_{\infty} \leq 1.$$

soit $\forall \varphi \in H, \|\varphi\|_{\infty} \leq 1$. Hat donc contenu dans la boule fermée de centre 0 et de rayon 1 (relativement à $\|\cdot\|_{\infty}$) donc H est borné.

F est continue sur le fermé borné H donc F possède un minimum sur H.

Remarque... On peut montrer que H est fermé en montrant que :

$$H = \mathbb{R}_+^n \cap H' \text{ où } H' = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$$

$\mathbb{R}_+^n$ est un fermé car c'est le produit de n fermés de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}_+$ est un fermé de $\mathbb{R}$).

H' est un fermé de $\mathbb{R}^n$ comme image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $g: (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i - 1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
H est alors fermé comme intersection de deux fermés.

PARTIE 1

① Nous savons que : $|\cos(x, y)| \leq \sqrt{V(x)V(y)}$, ainsi : $|c| \leq \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = 6$.
 $|c| \leq 6$.

② a) $V(R) = V(aX + (1-a)Y) = V(aX) + V((1-a)Y) + 2\cos(aX, (1-a)Y)$
 $= a^2 V(X) + (1-a)^2 V(Y) + 2a(1-a)\cos(X, Y)$
 $= 12a^2 + 3(1-a)^2 + (2a-2a^2)c$
 $= (15-2c)a^2 + 2(c-3)a + 3$

soit $V(R) = (15-2c)a^2 + 2(c-3)a + 3$.

b) h est dérivable sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1], h'(x) = 2(15-2c)x + 2(c-3)$

$\forall x \in [0, 1], h'(x) = 2(15-2c) \left[x - \frac{3-c}{15-2c} \right] \quad (15-2c > 0 \text{ car } c \in [-6, 6]).$

1^{er} cas... $c \in [3, 6]$; $\frac{3-c}{15-2c} \leq 0$ donc $\forall x \in]0, 1[, h'(x) > 0$ et $h'(0) \geq 0$.

h est strictement croissante sur $[0, 1]$. On en déduit donc que :

h admet pour minimum $h(0) = 3$ et ce minimum est atteint au réel point 0.

2^{ème} cas... $c \in [-6, 3[$. $\frac{3-c}{15-2c} > 0$ et $1 - \frac{3-c}{15-2c} = \frac{12-c}{15-2c} > 0$.

Ainsi $\frac{3-c}{15-2c} \in]0, 1[$.

$\forall x \in [0, \alpha], h'(x) < 0, h'(\alpha) = 0, \forall x \in [\alpha, 1], h'(x) > 0 \dots$ en posant $\alpha = \frac{3-c}{15-2c}$!
 h est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, 1]$.

Ainsi h possède pour minimum $h(\alpha)$ et ce minimum n'est atteint qu'en α .

Rappelons que $\alpha = \frac{3-c}{15-2c}$; ainsi $h(\alpha) = (15-2c)\left(\frac{3-c}{15-2c}\right)^2 + 2(c-1)\left(\frac{3-c}{15-2c}\right) + 3 = \frac{36-c^2}{15-2c}$.

Dans les deux cas h admet un minimum atteint en un seul point de $[0, 1]$;
 ce point est $\frac{3-c}{15-2c}$ lorsque $c \in [-6, 3[$ et 0 lorsque $c \in [3, 6]$.

Remarquons alors que $V(R) = h(c)$. Ainsi il existe un unique portefeuille
dont le rendement et de variance minimale.

Lorsque c appartient à $[-6, 3[$ ce portefeuille est : $\left(\frac{3-c}{15-2c}, 1 - \frac{3-c}{15-2c}\right)$.

Lorsque c appartient à $[3, 6]$ ce portefeuille est : $(0, 1)$.

③ a) $c = -6$. $\frac{3-c}{15-2c} = \frac{1}{3}$ et $1 - \frac{3-c}{15-2c} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Le portefeuille dont le rendement est de variance minimale est : $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

sa variance est : $V(R) = \frac{36 - (-6)^2}{15 - 2(-6)} = 0$. Ce portefeuille a un rendement de variance nulle.

$V(R) = 0$ donc R est une variable aléatoire quasi-certaine.

b) X et Y sont indépendantes donc $c = \text{cov}(X, Y) = 0$. Ainsi $\frac{3-c}{15-2c} = \frac{1}{5}$ et

$$1 - \frac{3-c}{15-2c} = \frac{4}{5} \quad \frac{36-c^2}{15-2c} = \frac{12}{5} = 2,4$$

$\left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$ est le portefeuille de rendement de variance minimale lorsque X et Y sont indépendantes.

$V(R)$ vaut alors 2,4.

④ $R = \frac{1}{5}X + \frac{4}{5}Y$. $X \in \mathcal{D}(6, \sqrt{12})$ donc $\frac{1}{5}X \in \mathcal{D}\left(\frac{6}{5}, \sqrt{\frac{12}{25}}\right)$

$Y \in \mathcal{D}(3, \sqrt{5})$ donc $\frac{4}{5}Y \in \mathcal{D}\left(\frac{12}{5}, \sqrt{\frac{20}{25}}\right)$

X et Y étant indépendantes, $\frac{1}{5}X$ et $\frac{4}{5}Y$ le sont aussi. Le cas se donne alors :

$$R = \frac{1}{5}X + \frac{4}{5}Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{6}{5} + \frac{12}{5}, \sqrt{\left(\sqrt{\frac{12}{5}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{48}{25}}\right)^2}\right).$$

$$\text{Donc } R \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{18}{5}, \sqrt{\frac{12}{5}}\right).$$

R suit une loi normale de paramètres $\frac{18}{5}$ et $\sqrt{\frac{12}{5}}$.

$$p(R \geq 4) = 1 - p(R < 4) = 1 - p\left(\frac{R - \frac{18}{5}}{\sqrt{\frac{12}{5}}} < \frac{4 - \frac{18}{5}}{\sqrt{\frac{12}{5}}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2/5}{\sqrt{12/5}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) \approx 1 - 0,66$$

$$\text{Donc } \underline{p(R \geq 4) \approx 0,40.}$$

Q5) a) $E(X) = \frac{12+0}{2} = 6$ et $E(Y) = \frac{6+0}{2} = 3$.

$$\text{Pour } \forall t \in \mathbb{R}, u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 12] \\ \frac{1}{12} & \text{si } t \in [0, 12] \end{cases} \text{ et } v(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 6] \\ \frac{1}{6} & \text{si } t \in [0, 6] \end{cases}$$

u (resp. v) est une densité de X (resp. Y).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t u(t) dt \text{ (resp. } \int_{-\infty}^{+\infty} t v(t) dt) \text{ existe et vaut } 0$$

$$\int_0^{12} t u(t) dt = \frac{1}{12} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{12} = 48. \text{ Ainsi } \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u(t) dt \text{ existe et vaut } 48.$$

X possède donc un moment d'ordre 2 qui vaut : 48.

X possède alors une variance qui vaut $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 48 - 6^2 = 12$.

De même de la même manière que $V(Y)$ existe et vaut 3.

$$\underline{V(X) = 12 \text{ et } V(Y) = 3.}$$

Remarque : Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(a, b)$: $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$...

b) v est une densité de Y donc $\hat{v} : t \mapsto \frac{1}{144} v\left(\frac{t-0}{4}\right)$ est une densité de 4Y

$$\forall t \in \mathbb{R}, \hat{v}(t) = \frac{1}{4} v\left(\frac{t}{4}\right). \text{ Donc : } \forall t \in \mathbb{R}, \hat{v}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{t}{4} \notin [0, 6] \\ \frac{1}{4 \times 6} & \text{si } \frac{t}{4} \in [0, 6] \end{cases}$$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}, \hat{v}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0, 24] \\ \frac{1}{24} & \text{si } t \in [0, 24] \end{cases}$. Notons alors que $4Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 24])$.

u est une densité de X , $\hat{v}$ est une densité de Y et X et Y sont indépendantes (car X et Y le sont). $w : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \hat{v}(x-t) dt$ est alors une densité de $X+Y$.

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \hat{v}(x-t) dt = \int_0^{12} \frac{1}{12} \hat{v}(x-t) dt \stackrel{y=x-t}{=} \frac{1}{12} \int_x^{x+12} \hat{v}(y) (-dy) = \frac{1}{12} \int_{x+12}^x \hat{v}(y) dy$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[, w(x) = \frac{1}{12} \int_{x+12}^x 0 dy = 0.$$

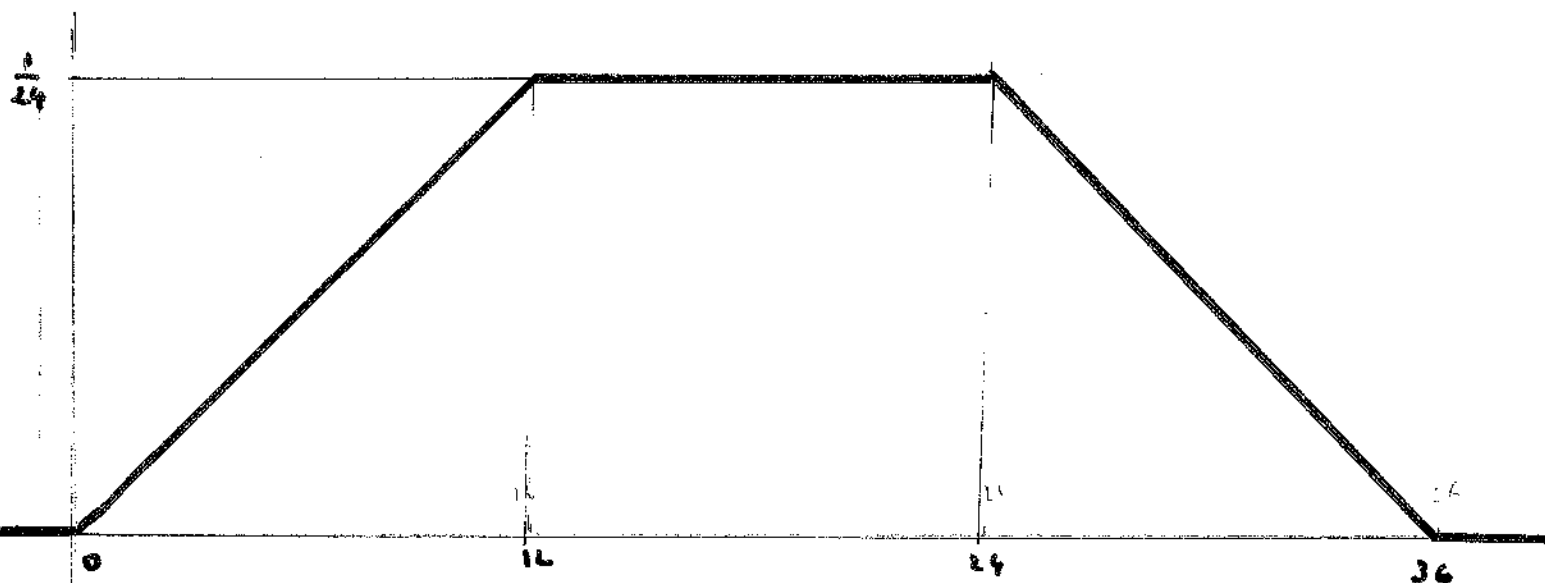
$$\forall x \in [0, 12], w(x) = \frac{1}{12} \int_0^x \frac{1}{24} dy = \frac{x}{288}$$

$$\forall x \in [12, 24], w(x) = \frac{1}{12} \int_{x-12}^x \frac{1}{24} dy = \frac{1}{24}$$

$$\forall x \in [24, 36], w(x) = \frac{1}{12} \int_{x-12}^{24} \frac{1}{24} dy = \frac{36-x}{288}$$

$$\forall x \in]36, +\infty[, w(x) = \frac{1}{12} \int_{x-12}^x 0 dy = 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, w(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]36, +\infty[\\ \frac{x}{288} & \text{si } x \in [0, 12] \\ \frac{1}{24} & \text{si } x \in [12, 24] \\ \frac{36-x}{288} & \text{si } x \in [24, 36] \end{cases}$$



$$c) P(R \geq 4) = P\left(\frac{1}{3}X + \frac{4}{3}Y \geq 4\right) = P(X + 4Y \geq 12) = \int_{20}^{+ \infty} \omega(t) dt = \frac{1}{24} \int_{20}^{24} dt + \frac{1}{288} \int_{24}^{36} (36-t) dt$$

$$P(R \geq 4) = \frac{1}{24} (24-20) + \frac{1}{288} \left[-\frac{(36-t)^2}{2} \right]_{24}^{36} = \frac{1}{6} + \frac{1}{288} \frac{12^2}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(R \geq 4) = \frac{5}{12} \approx 0,42$$

PARTIE 2

Q1 $V(R) = V(xX + yY + zZ) = V(xX + yY + (1-x-y)Z)$ car $x+y+z=1$.

$$V(R) = V(xX) + V(yY) + V((1-x-y)Z) + 2\text{cov}(xX, yY) + 2\text{cov}(xX, (1-x-y)Z) + 2\text{cov}(yY, (1-x-y)Z)$$

$$V(R) = x^2 V(X) + y^2 V(Y) + (1-x-y)^2 V(Z) + 2xy \text{cov}(X, Y) + 2x(1-x-y) \text{cov}(X, Z) + 2y(1-x-y) \text{cov}(Y, Z)$$

$$V(R) = 4x^2 + 6y^2 + 6(1-x-y)^2 + 2xy(-3) + 2x(1-x-y)(2) + 2y(1-x-y)(1)$$

$$V(R) = 4x^2 + 6y^2 + 6 + 6x^2 + 6y^2 - 12x - 12y + 12xy - 4xy + 4x - 4x^2 - 4xy + 4y - 4xy - 4y^2$$

$$V(R) = 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6$$

$$V(R) = 4x^2 + 10y^2 + 4xy - 8x - 10y + 6 = f(x, y).$$

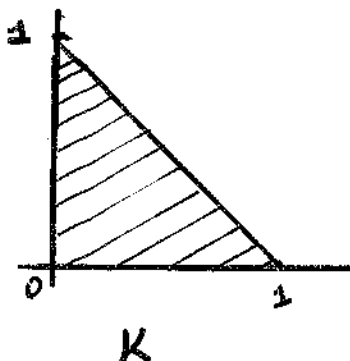
Trouver le minimum de $V(xX + yY + zZ)$ pour $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ et $x+y+z=1$ c'est trouver le minimum de $V(xX + yY + (1-x-y)Z) = f(x, y)$ pour $x \geq 0, y \geq 0, 1-x-y \geq 0$, c'est à dire pour $(x, y) \in K$.

Ainsi le problème du gérionnaire revient à déterminer le minimum de f sur K .

⚠ Rectifier le type du point $K_0 = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mid x+y < 1\}$

K_0 est alors l'intérieur de K .

Notons aussi que $K = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3$



Q2 a) f est une fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^2$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 8x + 4y - 8 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 20y + 4x - 10.$$

$$\text{Soit } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y - 8 = 0 \\ 20y + 4x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 2x + 10y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y = 3 \\ x = \frac{5-10y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = \frac{5-\frac{10}{3}}{2} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Ainsi $(\frac{5}{6}, \frac{1}{3})$ est l'unique point critique de f .

f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 20$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4$

Pour $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{5}{6}, \frac{1}{3})$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{5}{6}, \frac{1}{3})$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{5}{6}, \frac{1}{3})$.

$\Delta^2 - rt = 16 - 8 \times 20 < 0$; f admet un extremum local en $(\frac{5}{6}, \frac{1}{3})$ qui est un minimum car $r = 8 > 0$

Conclusion.. f admet un minimum local en le seul point $(\frac{5}{6}, \frac{1}{3})$.

Remarque.. f n'a en fait qu'un minimum global !

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(\frac{5}{6} + \alpha, \frac{1}{3} + \beta) - f(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}) = \dots = 4\alpha^2 + 10\beta^2 + 4\alpha\beta = 4(\alpha + \frac{\beta}{2})^2 + 9\beta^2 \geq 0$$

des initiales ayant aussi justifié cela en remarquant que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ ($\Delta^2 - rt \leq 0$... en tout point).

b) si f admet un minimum sur K_0 qui est ouvert alors f admet un point critique qui appartient à K_0 ; or le seul point critique de f est $(\frac{5}{6}, \frac{1}{3})$ qui n'est pas un point de K_0 car $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6} > 1$.

f n'admet pas de minimum sur K_0 .

$$\text{Q3 a) } * \forall y \in [0, 1], f(0, y) = 10y^2 - 10y + 6 = 10(y - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{2}$$

$$\forall y \in [0, 1] - \{\frac{1}{2}\}, f(0, y) > \frac{7}{2} = f(0, \frac{1}{2}).$$

f admet $\frac{7}{2}$ pour minimum sur K_1 ; ce minimum est atteint en $(0, \frac{1}{2})$.

$$* \forall x \in [0, 1], f(x, 0) = 4x^2 - 8x + 6 = 4(x - 1)^2 + 2$$

$$\forall x \in [0, 1] - \{1\}, f(x, 0) > 2 = f(1, 0).$$

f admet 2 pour minimum sur K_2 ; ce minimum est atteint en $(1, 0)$.

$$* \forall x \in [0, 1], f(x, 1-x) = 4x^2 + 10(1-x)^2 + 4x(1-x) - 10(1-x) + 6 = \dots = 10x^2 - 14x + 6$$

$$\forall x \in [0,1], f(x, 1-x) = 10x^2 - 14x + 6 = 10\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{11}{10}.$$

$$\forall x \in [0,1] - \{7/10\}, f(x, 1-x) = 10\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \frac{11}{10} > \frac{11}{10} = f\left(\frac{7}{10}, 1 - \frac{7}{10}\right) = f\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right).$$

f admet $\frac{11}{10}$ pour minimum sur K_3 ; ce minimum est atteint en $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$.

d) d'après le précédent $(x, y, z) \rightarrow V(x+y+z)$ admet un minimum sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$ donc $f: (x, y) \rightarrow V(x+y+z)$ admet un minimum sur $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1\}$ (ce qui prouve en outre que f est continue et que K est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$)
 Le minimum ne peut pas être atteint sur K_0 d'après c) donc il est atteint sur K_1 ou sur K_2 ou sur K_3 car $K = K_0 \cup K_1 \cup K_2 \cup K_3$

$$\text{Ainsi } \min_{(x,y) \in K} f(x,y) = \min_{(x,y) \in K_1 \cup K_2 \cup K_3} f(x,y). \text{ A nous reste à voir : } \min_{(x,y) \in K_1} f(x,y) = \frac{7}{2},$$

$$\min_{(x,y) \in K_2} f(x,y) = 2 \text{ et } \min_{(x,y) \in K_3} f(x,y) = \frac{11}{10}. \quad \frac{7}{2} > 2 > \frac{11}{10} \text{ ! donc } \min_{(x,y) \in K} f(x,y) = \frac{11}{10}.$$

Le minimum de f sur K est atteint au seul point $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$.

Finalement l'unique portefeuille dont le rendement et de variance minimale est $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}, 0\right)$.

Partie 3

① a) $V(X+Y+Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) + 2\text{cov}(X,Y) + 2\text{cov}(Y,Z) + 2\text{cov}(Z,X)$

$$V(X+Y+Z) = 3 + 2(c+c+c) = 3(1+2c). \quad \underline{\underline{V(X+Y+Z) = 3(1+2c)}}.$$

$$V(X+Y+Z) \text{ est positif donc } 3(1+2c) \geq 0; \quad c \geq -\frac{1}{2}.$$

de plus $|c| = |\text{cov}(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)} = 1$; ce qui donne : $-1 \leq c \leq 1$. Finalement : $\underline{\underline{c \in [-\frac{1}{2}, 1]}}$.

b) $V(R) = V(xX+yY+zZ) = x^2V(X) + y^2V(Y) + z^2V(Z) + 2xy\text{cov}(X,Y) + 2yz\text{cov}(Y,Z) + 2zx\text{cov}(Z,X)$

$$V(R) = V(xX+yY+zZ) = x^2+y^2+z^2 + 2xy c + 2yz c + 2zx c$$

$$= x^2+y^2+z^2 + c(2xy+2yz+2zx)$$

$$= x^2+y^2+z^2 + c[(x+y+z)^2 - x^2 - y^2 - z^2]$$

$$V(R) = V(xX+yY+zZ) = (1-c)(x^2+y^2+z^2) + c \quad \text{car } x+y+z=1$$

$$V(R) = (1-c)(x+y+z)^2 + c = (1-c) \left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{3} \underbrace{(x+y+z)}_{=1} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right] + c$$

$$V(R) = (1-c) \left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 \right] + (1-c) \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) + c$$

$$V(R) = (1-c) \left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 \right] + \frac{1-c}{3} + c, \text{ or } \frac{1-c}{3} + c = \frac{1+c}{3}.$$

$$\text{Finalement: } \underline{V(R) = (1-c) \left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 \right] + \frac{1+c}{3}}.$$

$$\text{Ainsi: } V(R) = V(x+y+z) = (1-c) \left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 \right] + \frac{1+c}{3} \geq \frac{1+c}{3}$$

$$(1-c) \left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 \right] \geq 0$$

$$\text{Notons que } V\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right) = (1-c) [0^2 + 0^2 + 0^2] + \frac{1+c}{3} = \frac{1+c}{3}$$

$$\text{Ainsi } V(x, y, z) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}, V(R) = V(x+y+z) \geq \frac{1+c}{3} = V\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right)$$

Remarquons que cette inégalité est stricte dès que $(x, y, z) \neq \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ car

$$(x, y, z) \neq \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ donc: } (1-c) \left[\left(x-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(z-\frac{1}{3}\right)^2 \right] > 0 \text{ puisque: } c < 1.$$

Ainsi $\underline{\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$ est le point faible d'at de variance minimale.

$$\text{a) Rappelons que: } E(A) = E(B) = E(C) = \frac{1}{2} = 2 \text{ et } V(A) = V(B) = V(C) = \frac{1-2L}{(2L)^2} = 2$$

$$E(X) = E(B) + E(C) = 4; E(Y) = E(A) + E(C) + 1 = 5; E(Z) = E(A) + E(B) + 2 = 6.$$

$$V(X) = V(B) + V(C) = 4 \text{ car B et C sont indépendantes}$$

$$V(Y) = V(A+C+1) = V(A+C) = V(A) + V(C) = 4 \text{ car A et C sont indépendantes.}$$

$$V(Z) = V(A+B+2) = V(A+B) = V(A) + V(B) = 4 \text{ — A et B —}$$

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(B+C, A+C+1) = \text{cov}(B+C, A+C) + \underbrace{\text{cov}(B+C, 1)}_{=0} = \text{cov}(B, A) + \text{cov}(B, C) + \underbrace{\text{cov}(C, A)}_{=0} + \underbrace{\text{cov}(C, C)}_{=V(C)=2}$$

$$\text{donc } \text{cov}(X, Y) = 2.$$

$$\text{De même } \text{cov}(Y, Z) = \text{cov}(A+C+1, A+B+2) = \dots = \text{cov}(A+C, A+B) = \dots = \text{cov}(A, A) = V(A) = 2$$

$$\text{et } \text{cov}(Z, X) = \text{cov}(A+B+2, B+C) = \dots = \text{cov}(A+B, B+C) = \dots = \text{cov}(B, B) = V(B) = 2.$$

$$\text{Ainsi: } \underline{E(X) = E(Y) = E(Z) = 4. V(X) = V(Y) = V(Z) = 4. \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, Z) = \text{cov}(Z, X) = 2.}$$

b) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x+y+z=1$.

$$V(R) = V\left(x \frac{1}{2}x + y \frac{1}{2}y + z \frac{1}{2}z\right) = \frac{1}{4} V\left(x \left(\frac{1}{2}x\right) + y \left(\frac{1}{2}y\right) + z \left(\frac{1}{2}z\right)\right)$$

$$\text{Poursuivons } x' = \frac{1}{2}x, y' = \frac{1}{2}y \text{ et } z' = \frac{1}{2}z. V(R) = 4 V(x'x' + y'y' + z'z').$$

Remarquons alors que: $V(X') = V(\frac{1}{2}X) = \frac{1}{4}V(X) = 1$. De même $V(Y') = 1$ et $V(Z') = 1$,
 $\text{cov}(X', Y') = \text{cov}(\frac{1}{2}X, \frac{1}{2}Y) = \frac{1}{4}\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$; de même $\text{cov}(Y', Z') = \frac{1}{2}$ et $\text{cov}(Z', X') = \frac{1}{2}$.
 Comme $\frac{1}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $\frac{1}{2} \neq \pm 1$, d'après Q1 $V(kX' + yY' + zZ')$ est minimale

sur $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$ pour $x=y=z=\frac{1}{3}$.

En rappelant que $V(R) = V(kX + yY + zZ) = 4V(kX' + yY' + zZ')$ on peut dire que
la portefeuille de rendement de variance minimale est $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$:

Remarque... Pour $(x, y, z) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$: $V(R) = 4 \times \frac{1+2+1}{3} = \frac{8}{3}$.

La dernière dit que $A+B+C$ suit une loi de Pascal de paramètres 3 et 1/2.
 Les autres font deux étapes.

→ loi de A+B. $(A+B)(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_2 + \infty \mathbb{N}$. $(B=1)$ est un système complet d'événements

$$\forall k \in \mathbb{N}_2 + \infty \mathbb{N}, P(A+B=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A+B=k \cap B=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A=k-i \cap B=i)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_2 + \infty \mathbb{N}, P(A+B=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A=k-i) P(B=i) = \sum_{i=1}^{k-1} P(A=k-i) P(B=i) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

A et B sont indépendantes

$$\forall k \in \mathbb{N}_2 + \infty \mathbb{N}, P(A+B=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = (k-1) \frac{1}{2^k} = C_{k-1}^1 \frac{1}{2^k}$$

$$(A+B)(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_2 + \infty \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}_2 + \infty \mathbb{N}, P(A+B=k) = \frac{k-1}{2^k} = C_{k-1}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

→ loi de A+B+C.

$(A+B+C)(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_3 + \infty \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}_3 + \infty \mathbb{N}$.

$$P(A+B+C=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A+B+C=k \cap C=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A+B=k-i \cap C=i) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A+B=k-i) P(C=i)$$

A+B et C sont indépendantes car A, B et C le sont

$$P(A+B+C=k) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A+B=k-i) \times \frac{1}{2^i}$$

$$P(A+B+C=k) = \sum_{i=1}^{k-2} \frac{k-i-1}{2^{k-i}} \times \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{k-2} (k-i-1) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k-2} j = \frac{1}{2^k} \frac{(k-2)(k-1)}{2}$$

$$(A+B+C)(\mathbb{N}) = \mathbb{N}_3 + \infty \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}_3 + \infty \mathbb{N}, P(A+B+C=k) = \frac{(k-2)(k-1)}{2^{k+1}} = C_{k-2}^2 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Remarque... Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires, sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, indépendantes et qui suivent une loi géométrique de paramètre p : $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit une loi de Pascal de paramètres n et p . c'est à dire :

$$S \in \mathbb{N}, \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, \text{ et } \forall, P(S=k) = \binom{n-1}{k-1} p^n (1-p)^{n-k}.$$

$$R = \frac{1}{3}(X+Y+Z) = \frac{1}{3}(0+C+A+C+1+A+B+C) = \frac{2}{3}(A+B+C) + 1.$$

$$P(R \geq 5) = P\left(\frac{2}{3}(A+B+C) + 1 \geq 5\right) = P(A+B+C \geq 6) = 1 - P(A+B+C \leq 5) = 1 - P(A+B+C=3) - P(A+B+C=4) - P(A+B+C=5)$$

$$P(R \geq 5) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \binom{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \binom{2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1 - \frac{1}{8} - \frac{2}{16} - \frac{6}{32} = \frac{1}{32}(32-4-2-3) = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{P(R \geq 5) = 0,5.}$$

PARTIE 4

⑦ Pour $TU = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall i \in [1, n]$, $y_i = \sum_{j=1}^n \text{cov}(R_i, R_j) x_j$

$$TU = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{cov}(R_i, R_j) x_i x_j.$$

$$V(T) = V(x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n) = \sum_{i=1}^n V(x_i R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(x_i R_i, x_j R_j)$$

$$V(T) = \sum_{i=1}^n x_i^2 V(R_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j)$$

$$V(T) = \sum_{i=1}^n x_i^2 V(R_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j)$$

$$\uparrow = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j) = \uparrow$$

Donc la dernière Σ échangeant les rôles de i et j , il vient alors :

$$V(T) = \sum_{i=1}^n \text{cov}(R_i, R_i) x_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n x_i x_j \text{cov}(R_i, R_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} x_j x_i \text{cov}(R_j, R_i)$$

Or $\text{cov}(R_i, R_j) = \text{cov}(R_j, R_i)$ donc :

$$V(T) = \sum_{i=1}^n x_i \left[x_i \text{cov}(R_i, R_i) + \sum_{j=i+1}^n x_j \text{cov}(R_i, R_j) + \sum_{j=1}^{i-1} x_j \text{cov}(R_i, R_j) \right] = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n x_j \text{cov}(R_i, R_j) \right)$$

$$V(T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \cos(R_i, R_j) = {}^t U \Pi U. \quad \underline{\underline{V(T) = {}^t U \Pi U.}}$$

② a) $\Pi = (\cos(R_i, R_j))$ et $\forall i, j \in \{1, n\}^2$, $\cos(R_j, R_i) = \cos(R_i, R_j)$.
 Π est donc une matrice symétrique réelle elle est donc diagonalisable.
 Π est diagonalisable.

b) Soit λ une valeur propre de Π . λ est un réel car Π est réelle et symétrique.

$$\exists U \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R}), U \neq 0 \text{ et } \Pi U = \lambda U. \quad U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad {}^t U U = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \text{ car } U \neq 0.$$

$$0 \leq V(x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n) = {}^t U \Pi U = {}^t U (\lambda U) = \lambda {}^t U U.$$

Ainsi $\lambda {}^t U U \geq 0$ et ${}^t U U > 0$; ceci donne alors $\lambda \geq 0$.

Les valeurs propres de Π sont positives ou nulles.

③ a) Rappelons que Π est réelle et symétrique; ainsi il existe une base orthogonale $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de Π .

Notons, pour i dans $\{1, n\}$, α_i la valeur propre associée à U_i . $\forall i \in \{1, n\}$, $\alpha_i \geq 0$ d'après

Q2 b) et $\forall i \in \{1, n\}$, $\alpha_i \neq 0$ car Π est inversible. Ainsi $\forall i \in \{1, n\}$, $\alpha_i > 0$.

Soit U un élément de $\Pi_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ses coordonnées dans la base $(U_1, U_2, \dots, U_n)$. $\Pi U = \Pi(\sum_{i=1}^n t_i U_i) = \sum_{i=1}^n t_i \Pi U_i = \sum_{i=1}^n t_i \alpha_i U_i$

$$\text{Ainsi } {}^t U \Pi U = \langle U, \Pi U \rangle = \sum_{i=1}^n (t_i (t_i \alpha_i)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i t_i^2.$$

Supposons que: ${}^t U \Pi U = 0$. Alors $\sum_{i=1}^n \alpha_i t_i^2 = 0$. Or $\forall i \in \{1, n\}$, $\alpha_i t_i^2 \geq 0$ donc

$\forall i \in \{1, n\}$, $\alpha_i t_i^2 = 0$; sachant que: $\forall i \in \{1, n\}$, $\alpha_i \neq 0$ il vient:

$\forall i \in \{1, n\}$, $t_i^2 = 0$ ou $\forall i \in \{1, n\}$, $t_i = 0$ c'est à dire $U = 0$.

Donc $\forall U \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t U \Pi U = 0 \Rightarrow U = 0$.

b) * Soient $(U, W, W') \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R})^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\underline{\underline{\varphi(U, \lambda W + W') = {}^t U \Pi (\lambda W + W') = \lambda {}^t U \Pi W + {}^t U \Pi W' = \lambda \varphi(U, W) + \varphi(U, W').}} \quad \underline{\underline{\varphi \text{ est linéaire à droite.}}}$$

* Soit $(U, W) \in \Pi_{n,1}(\mathbb{R})^2$.

${}^t U \Pi W \in \Pi_{1,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^t ({}^t U \Pi W) = {}^t U \Pi W$; donc ${}^t W {}^t \Pi {}^t ({}^t U) = {}^t U \Pi W$

Or ${}^t \Pi = \Pi$ et ${}^t ({}^t U) = U$; ainsi $\varphi(W, U) = {}^t W \Pi U = {}^t W {}^t \Pi {}^t ({}^t U) = {}^t U \Pi W = \varphi(U, W)$.

$$\underline{\varphi(v, u) = \varphi(u, v)}. \quad \underline{\varphi \text{ est symétrique.}}$$

* Soit $u \in \pi_{n,2}(\mathbb{R})$. $\varphi(u, u) = t \cap u$

$$\text{Si } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \varphi(u, u) = t \cap u = v(x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n) \geq 0$$

de plus $\varphi(u, u) = 0$ alors $t \cap u = 0$ et ainsi $u = 0$ d'après Q3 ci

$$\underline{\varphi(u, u) \geq 0 \text{ et } (\varphi(u, u) = 0 \Rightarrow u = 0)}; \quad \underline{\varphi \text{ est définie positive.}}$$

φ est une application de $\pi_{n,2}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, bilinéaire à droite, symétrique et définie positive donc $\underline{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \pi_{n,2}(\mathbb{R})}$.

ci Soient u et w deux éléments de $\pi_{n,2}(\mathbb{R})$.

$$\left[N\left(\frac{u+w}{2}\right) \right]^2 = \left[\frac{1}{2} N(u+w) \right]^2 = \frac{1}{4} N^2(u+w) = \frac{1}{4} [N^2(u) + N^2(w) + 2\varphi(u, w)]; \text{ de même}$$

$$\left[N\left(\frac{u-w}{2}\right) \right]^2 = \frac{1}{4} [N^2(u) + N^2(w) - 2\varphi(u, w)].$$

Par addition il vient: $\left[N\left(\frac{u+w}{2}\right) \right]^2 + \left[N\left(\frac{u-w}{2}\right) \right]^2 = \frac{1}{2} [N^2(u) + N^2(w)];$ ainsi:

$$\underline{\underline{\forall (u, w) \in \pi_{n,2}(\mathbb{R})^2, \left[N\left(\frac{u+w}{2}\right) \right]^2 = \frac{1}{2} [(N(u))^2 + (N(w))^2] - \left[N\left(\frac{u-w}{2}\right) \right]^2.}}$$

d) Supposons que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ sont deux paires de feuilles d'at le random et de variance minimale.

$$\text{Prenons: } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad \forall i \in \{1, n\}, \quad t_i = \frac{x_i + x'_i}{2} \text{ et } \hat{T} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = \frac{u+w}{2}$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ sont deux éléments de H , ainsi:

- $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in H$ (vérification immédiate);

$$- \left[N\left(\frac{u+w}{2}\right) \right]^2 = v(t_1 R_1 + t_2 R_2 + \dots + t_n R_n) \geq v(x_1 R_1 + x_2 R_2 + \dots + x_n R_n) = [N(u)]^2;$$

$$- \left[N\left(\frac{u+w}{2}\right) \right]^2 = \dots \geq v(x'_1 R_1 + x'_2 R_2 + \dots + x'_n R_n) = [N(w)]^2;$$

$$\text{On a donc } \left[N\left(\frac{u+w}{2}\right) \right]^2 - \frac{1}{2} [(N(u))^2 + (N(w))^2] \geq \left[N\left(\frac{u+w}{2}\right) \right]^2 - \frac{1}{2} \left(\left[N\left(\frac{u+w}{2}\right) \right]^2 + \left[N\left(\frac{u+w}{2}\right) \right]^2 \right) = 0$$

Ainsi $\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 \geq \frac{1}{2} [(N(U))^2 + (N(W))^2]$; ceci donne encore :

$$\frac{1}{2} [(N(U))^2 + (N(W))^2] - \left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 \geq \frac{1}{2} [(N(U))^2 + (N(W))^2]$$

donc $-\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 \geq 0$; nécessairement : $\left[N\left(\frac{U+W}{2}\right)\right]^2 = 0$.

Nécessairement alors $N\left(\frac{U+W}{2}\right) = 0$ et donc $\frac{U+W}{2} = 0$; finalement $U = W$.

d'où l'unicité du portefeuille d'actif et de variance minimale.