

PARTIE I

Q1 Rappelons que: $\forall r \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} f_r(t) dt = 1$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in]0, +\infty[$, $f_r(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2}) 2^{r/2}} e^{-t/2} t^{\frac{r}{2}-1} = \frac{\Gamma(\frac{r}{2}+1) 2^{\frac{r}{2}+1}}{\Gamma(\frac{r}{2}) 2^{r/2} \Gamma(\frac{r+2}{2}) 2^{\frac{r+2}{2}}} e^{-t/2} t^{\frac{r+2}{2}-1}$

$\forall t \in]0, +\infty[$, $t f_r(t) = \frac{\Gamma(\frac{r}{2}+1) 2}{\Gamma(\frac{r}{2})} f_{r+2}(t) = \frac{r}{2} \lambda^2 f_{r+2}(t) = r f_{r+2}(t)$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} t f_r(t) dt$ existe et vaut r car $\int_0^{+\infty} f_{r+2}(t) dt$ existe et vaut 1.

Comme $\int_0^{+\infty} t f_r(t) dt$ existe et vaut 0, $\int_0^{+\infty} t f_r(t) dt$ existe et vaut r .

Finalement X possède une espérance et $E(X) = r$.

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$

$t f_r(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2}) 2^{r/2}} e^{-t/2} t^{\frac{r}{2}-1} = \frac{\Gamma(\frac{r}{2}+1) 2^{\frac{r}{2}+1}}{\Gamma(\frac{r}{2}) 2^{r/2} \Gamma(\frac{r+2}{2}) 2^{\frac{r+2}{2}}} e^{-t/2} t^{\frac{r+2}{2}-1}$

$t f_r(t) = \frac{(\frac{r}{2}+1)(\frac{r}{2}) \Gamma(\frac{r}{2}) \lambda^2}{\Gamma(r+1)} f_{r+2}(t) = (r+2) f_{r+2}(t)$.

$\int_0^{+\infty} f_{r+2}(t) dt$ existe et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty} t f_r(t) dt$ existe et vaut $(r+2)r$.

$\int_0^{+\infty} t f_r(t) dt$ existe et vaut 0. Ainsi $\int_0^{+\infty} t f_r(t) dt$ existe et vaut $r^2 + 2r$.

Donc X^2 possède une espérance qui vaut $r^2 + 2r$.

Ainsi X possède une variance qui vaut $r^2 + 2r - r^2 = 2r$.

$V(X)$ existe et $V(X) = 2r$.

Q2 a) Pour: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $u(\lambda) = e^\lambda$. u est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)} = u$.

La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à u à l'ordre $n-1$

fournit: $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $u(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda-0)^k}{k!} u(0) + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^{n-1}}{(n-1)!} u^{(n)}(t) dt$.

Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $e^\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{(\lambda-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^t dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} + \int_\lambda^0 \frac{u^{(n-1)}}{(n-1)!} e^{\lambda-u} (-du)$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $e^\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \int_0^\lambda \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\lambda-t} dt$.

b) $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. $X_2 \in \mathcal{D}(\lambda)$ et X_2 suit la loi du χ^2 à 2n degrés de liberté.

$$P(X_2 > 2\lambda) = 1 - P(X_2 \leq 2\lambda) = 1 - \int_0^{2\lambda} f(t) dt = 1 - \int_0^{2\lambda} \frac{1}{\Gamma(n) 2^n} t^{n-1} e^{-\frac{t}{2}} dt.$$

$$P(X_2 > 2\lambda) = 1 - \int_0^{2\lambda} \frac{1}{\Gamma(n-1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} e^{-\frac{t}{2}} \frac{1}{2} dt \stackrel{u=t/2}{=} 1 - \int_0^\lambda \frac{1}{\Gamma(n-1)!} u^{n-1} e^{-u} du = 1 - \int_0^\lambda \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n-1)!} e^{-t} dt.$$

$$P(X_2 > 2\lambda) = e^{-\lambda} \left[e^\lambda - \int_0^\lambda \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n-1)!} e^{\lambda-t} dt \right] \stackrel{u=t/\lambda}{=} e^{-\lambda} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} \right] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} P(X=k).$$

$$P(X_2 > 2\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X=k) = P(X < n)$$

Ainsi $P(X_2 > 2\lambda) = P(X < n)$.

c) Noter que: $P(X_2 > x) = P\left(\frac{X_2}{2} < n\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x/2)^k}{k!} e^{-\frac{x}{2}}.$

Function `timgad(n:integer; x:real):real;`

`var k:integer; u,s:real;`

`begin`

`x:=x/2; u:=1; s:=1;`

`For k:=1 to n-1 do`

`begin`

`u:=u*x/k; s:=s+u;`

`end;`

`timgad:=s*exp(-x);`

`end;`

`function Timgad(n:integer;x:real):real;`

`var k:integer;u,s:real;`

`begin`

`x:=x/2;u:=1;s:=1;`

`for k:=1 to n-1 do`

`begin`

`u:=u*x/k;s:=s+u;`

`end;`

`Timgad:=s*exp(-x);`

`end;`

Quand: $F_6(1) \approx 0,083$; $F_6(4) \approx 0,3233$

$F_6(6) \approx 0,5768$; $F_6(8) \approx 0,7619$; $F_6(10) \approx 0,8753$

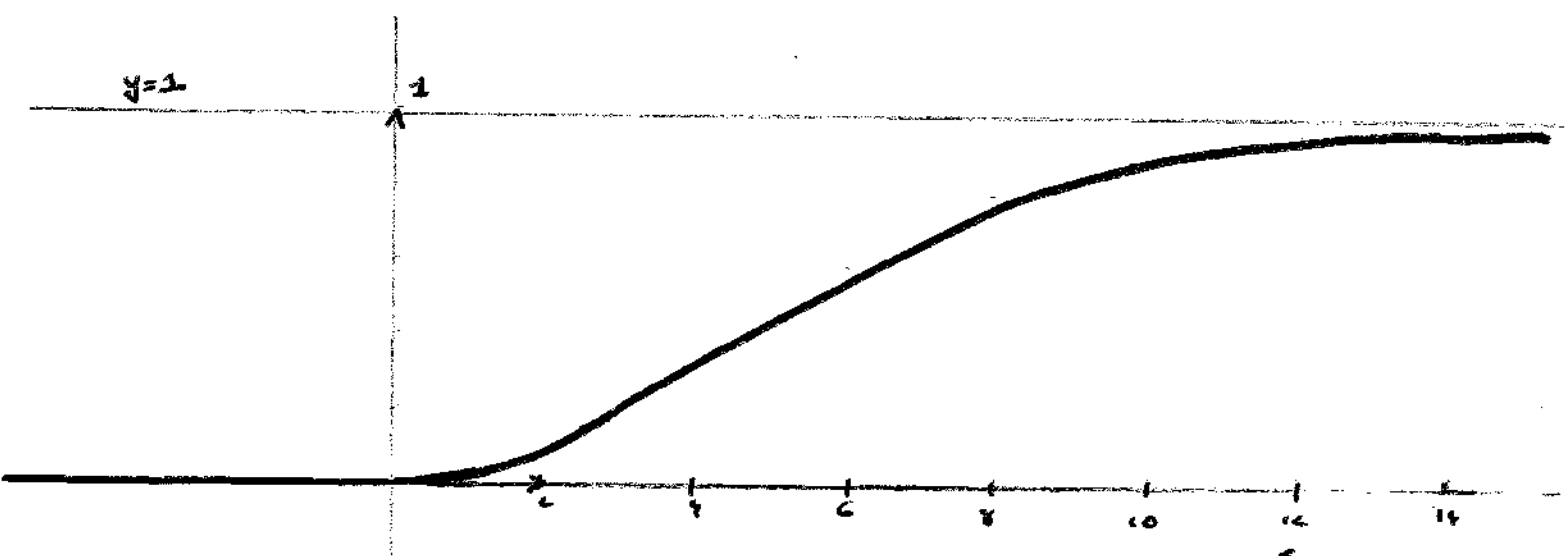
$F_6(12) \approx 0,9380$; $F_6(14) \approx 0,9704$; $F_6(16) \approx 0,9862$

$F_6(18) \approx 0,9938$; $F_6(20) \approx 0,9972 \dots$

d) $F_6(0) = P(X_{2,3} \leq 0) = 0$

$$F_6(4) = P(X_{2,3} \leq 2 \times 2) = 1 - P\left(\frac{X_2}{2} < 3\right) = 1 - P(X_2 \leq 2) = 1 - 0,6767 = 0,3233$$

$$F_6(8) = P(X_{2,3} \leq 2 \times 4) = 1 - P\left(\frac{X_2}{2} < 3\right) = 1 - P(X_2 \leq 2) \approx 1 - 0,2283 = 0,7717$$



Notons que: $\forall x \in]-\infty, 0[, f_6(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[, f_6(x) = \frac{1}{F(3)2^3} e^{-x/2} x^{\frac{6}{2}-1}$

On a: $\forall x \in]-\infty, 0[, f_6(x) = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[, f_6(x) = \frac{1}{8} e^{-x/2} x^2$

Alors f_6 est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $] 0, +\infty [$; f_6 est donc continue sur $\mathbb{R}$.

f_6 est donc $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$; en particulier $F_6'(0) = f_6(0) = 0$.

ⓐ) Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. ϕ est une densité de X_2 . ϕ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction de répartition Φ de X_2 est de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$P(X_2^2 \leq x) = 0$ si $x \in]-\infty, 0]$. Supposons $x > 0$.

$$P(X_2^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X_2 \leq \sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = \Phi(\sqrt{x}) - (1 - \Phi(\sqrt{x})) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1.$$

Notons $F_{X_1^2}$ la fonction de répartition de X_1^2 .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_{X_1^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0] \\ 2\Phi(\sqrt{x}) - 1 & \text{si } x \in]0, +\infty[\text{ ou }]0, +\infty[\quad (\Phi(0) = \frac{1}{2}) \end{cases}$$

$F_{X_1^2}$ est de classe $\mathcal{B}^1$ sur $] -\infty, 0]$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $] 0, +\infty [$ et de classe $\mathcal{B}^1$ sur $] 0, +\infty [$ et ϕ est de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$; par composition $F_{X_1^2}$ est continue sur $] 0, +\infty [$ et de classe $\mathcal{B}^1$ sur $] 0, +\infty [$.

$F_{X_1^2}$ est continue sur $] -\infty, 0]$ et sur $] 0, +\infty [$ donc $F_{X_1^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$F_{X_1^2}$ est de classe $\mathcal{B}^1$ sur $] -\infty, 0]$ et sur $] 0, +\infty [$ donc $F_{X_1^2}$ est au moins de classe $\mathcal{B}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi X_1^2 est une variable aléatoire à densité.

$$\forall x \in]-\infty, 0[, F_{X_1^2}'(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, F_{X_1^2}'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} 2\phi(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2}.$$

Pour $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{f_{X_1^c}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin]-1, 0] \\ \frac{1}{\sqrt{e\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2} = \frac{1}{\sqrt{e\pi}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x/2}, & \text{si } x \in]0, +\infty[. \end{cases}}}$

$f_{X_1^c}$ est une densité de X_1^c .

Notons que: $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f_{X_1^c}(x) = \frac{1}{\sqrt{e\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) x^{\frac{1}{2}-1} f_3(x)$; ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_{X_1^c}(x) = \frac{1}{\sqrt{e\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{e} f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) f_3(x).$$

de plus $1 = \int_0^{+\infty} \int_{X_1^c}(u) du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \int_0^{+\infty} f_3(u) du = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} \times 1$; $\frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{\pi}} = 1$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \underline{\underline{f_{X_1^c}(x) = f_3(x)}}.$

Finalement, si $X_1 \in \mathcal{D}(0,1)$, $X_1^c \in \mathcal{D}(2, \frac{1}{2})$ ou X_1^c suit la loi du χ^2 à 2 degrés de liberté.

Remarque: Ceci n'est pas un scoop. Notamment que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ce qui s'est par exemple vu au lycée.

b) $X_1, \dots, X_k$ sont indépendantes donc $X_1^c, \dots, X_k^c$ le sont également.

Ainsi $X_1^c, X_2^c, \dots, X_k^c$ sont indépendantes et suivent la même gamma de paramètres e et $\frac{1}{2}$.

Le cas (ou le cas + une petite récurrence) montre alors que $X_1^c + \dots + X_k^c$

suit une loi gamma de paramètres e et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$

$$X_1^c + \dots + X_k^c \in \mathcal{D}\left(2, \frac{k}{2}\right).$$

Finalement $X_1^c + \dots + X_k^c$ suit la loi du χ^2 à $2k$ degrés de liberté.

c) Notons F_r (resp. $F_{r'}$) la f.d.r. de répartition d'une variable aléatoire T_r

(resp. $T_{r'}$) qui suit la loi du χ^2 à r (resp. r') degrés de liberté.

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi

normale centrée réduite. T_r (resp. $T_{r'}$) et $X_1^c + \dots + X_r^c$ (resp. $X_1^c + \dots + X_{r'}^c$) ont même loi.

$r \leq r'$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \{X_1^L + \dots + X_{r'}^L \leq x\} \subset \{X_1^L + \dots + X_r^L \leq x\}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, P(X_1^L + \dots + X_{r'}^L \leq x) \leq P(X_1^L + \dots + X_r^L \leq x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, P(T_{r'} \leq x) = P(T_r \leq x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, F_{r'}(x) \leq F_r(x)$.

Il faut donc vérifier que la courbe représentative de $F_{r'}$ est au-dessous (au sens large !) de la courbe représentative de F_r .

Une manière possible par ailleurs d'en faire davantage ici.

PARTIE II

A Etude des variables X_i

Q1) Les tirages étant indépendants X_i suit une loi binomiale de paramètres n et p_i (X_i compte le nombre de réalisations de l'événement obtenu une boule de couleur C_i lorsque l'on tire n fois l'expérience qui consiste à tirer une boule dans l'urne et observer le produit avec la probabilité p_i).

$X_i \subset B(n, p_i)$. $E(X_i) = np_i$ et $V(X_i) = np_i(1-p_i)$.

Q2) $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ et $i \neq j$.

Noter A_{ij} (resp. A_i ; resp. A_j) l'événement obtenu une boule de couleur C_i ou C_j (resp. de couleur C_i ; resp. de couleur C_j) lorsque l'on tire une boule de l'urne.

$A_{ij} = A_i \cup A_j$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$. $P(A_{ij}) = P(A_i) + P(A_j) = p_i + p_j$.

$X_i + X_j$ compte le nombre de réalisations de l'événement $A_{ij} = A_i \cup A_j$ lorsque l'on tire (de manière indépendante) n fois l'expérience qui consiste à tirer une boule de l'urne. Ainsi $X_i + X_j \subset B(n, p_i + p_j)$. $V(X_i + X_j) = n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j)$.

$n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j) = V(X_i + X_j) = V(X_i) + V(X_j) + 2\text{Cov}(X_i, X_j) = np_i(1-p_i) + np_j(1-p_j) + 2\text{Cov}(X_i, X_j)$.

$\text{Cov}(X_i, X_j) = \frac{n}{2} [(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j) - p_i(1-p_i) - p_j(1-p_j)] = \frac{n}{2} (p_i - p_i^2 - p_i p_j + p_j^2 - p_j + p_j^2 - p_j p_i + p_i^2 - p_j p_j^2)$.

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \frac{n}{2} (-1) \delta_{ij} = -n p_i \delta_{ij} \quad \text{cov}(X_i, X_j) = -n p_i p_j$$

$$B \quad S=2!$$

$$\textcircled{Q1} \quad U_n = \frac{(X_1 - n p_1)^2}{n p_1} + \frac{(X_2 - n p_2)^2}{n p_2} = p_1 Z_1^2 + \frac{(n - X_1 - n(1-p_1))^2}{n p_2} = p_1 Z_1^2 + p_2 Z_2^2 = Z_3^2$$

$X_1 + X_2 = n$
 $p_1 + p_2 = 1$

dac $U_n = Z_3^2$

$\textcircled{Q2}$ a) Notamment i dans $\mathbb{N}^n$, B_i la variable aléatoire égale à 1 si i est tiré dans une boule de couleur C_i et 0 sinon.

$$X_1 = B_1 + B_2 + \dots + B_n, \quad E(X_1) = n p_1 \quad \text{et} \quad V(X_1) = \sqrt{n p_1 (1-p_1)}$$

les variables aléatoires B_i sont indépendantes et suivent la même loi que celle de la limite centralisée n'est que $\left(\frac{B_1 + B_2 + \dots + B_n - E(B_1 + B_2 + \dots + B_n)}{\sqrt{V(B_1 + B_2 + \dots + B_n)}} \right)_{n \geq 1}$ converge à loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centralisée réduite.

$$a \quad \frac{B_1 + B_2 + \dots + B_n - E(B_1 + B_2 + \dots + B_n)}{\sqrt{V(B_1 + B_2 + \dots + B_n)}} = \frac{X_1 - E(X_1)}{\sqrt{V(X_1)}} = \frac{X_1 - n p_1}{\sqrt{n p_1 (1-p_1)}} = \frac{X_1 - n p_1}{\sqrt{n p_1 p_2}} = Z_1$$

Ainsi " (Z_1) " converge à loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centralisée réduite à nombre dénombrable dans que l'on peut approcher, lorsque n est grand,

Z_1 par une variable aléatoire qui suit une loi normale centralisée réduite.

b) soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(U_n \leq x) = F_3(x)$ où F_3 est la

fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi de χ^2 à un degré de liberté.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leq x) = P(Z_1^2 \leq x)$$

Rappelons que (Z_j) converge à loi vers une variable aléatoire T qui suit une loi normale centrée réduite. Rappelons que T^2 suit une loi du χ^2 à un degré de liberté d'après 9.1.93 a). Ainsi $F_{T^2} = F_1$.

doit $x \in \mathbb{R}$; $p(U_n \leq x) = p(Z_j^2 \leq x) = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(U_n \leq x) = 0 = F_1(x)$.

doit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$p(U_n \leq x) = p(Z_j^2 \leq x) = p(-\sqrt{x} \leq Z_j \leq \sqrt{x}).$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(U_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(-\sqrt{x} \leq Z_j \leq \sqrt{x}) = p(-\sqrt{x} \leq T \leq \sqrt{x})$ car d'après 9.1.93 a) (Z_j) converge en loi vers T et T est une variable aléatoire à densité.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(U_n \leq x) = p(-\sqrt{x} \leq T \leq \sqrt{x}) = p(T^2 \leq x) = F_{T^2}(x) = F_1(x).$$

ici on a de plus que (U_n) converge à loi vers une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à un degré de liberté.

$$C \quad 0 = 3 \quad \cdot \quad p_1 = p_2 = \frac{1}{4} \text{ et } p_3 = \frac{1}{2}.$$

91 Rappelons l'identité du parallélogramme. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $2a^2 + 2b^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2$!!
(dans un e.v.e. $2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = \|(u+v)\|^2 + \|(u-v)\|^2$).

$$U_n = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} + \frac{(X_3 - np_3)^2}{np_3} = \frac{1}{n} (X_1 - \frac{n}{4})^2 + \frac{1}{n} (X_2 - \frac{n}{4})^2 + \frac{1}{n} (X_3 - \frac{n}{2})^2$$

$$U_n = \frac{1}{n} [2(X_1 - \frac{n}{4})^2 + 2(X_2 - \frac{n}{4})^2 + (X_3 - \frac{n}{2})^2] = \frac{1}{n} [(X_1 - \frac{n}{4} + X_2 - \frac{n}{4})^2 + (X_1 - \frac{n}{4} - X_2 + \frac{n}{4})^2 + (X_3 - \frac{n}{2})^2]$$

$$\text{or } X_1 + X_2 = n - X_3 \text{ d'où } X_1 - \frac{n}{4} + X_2 - \frac{n}{4} = n - X_3 - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} - X_3 = -(X_3 - \frac{n}{2}).$$

$$\text{Ainsi } U_n = \frac{1}{n} [-(X_3 - \frac{n}{2})^2 + (X_1 - X_2)^2 + (X_3 - \frac{n}{2})^2] = \frac{1}{n} (X_3 - \frac{n}{2})^2 + \frac{1}{n} (X_1 - X_2)^2 = Z_1^2 + Z_2^2$$

$$\underline{U_n = Z_1^2 + Z_2^2} \quad \text{hope, na?}$$

$$X_1 \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$$

$$92 \quad E(Z_1) = E\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_3 - \frac{n}{2})\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} E(X_3) - \sqrt{n} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{n}{2} - \sqrt{n} = 0.$$

$$V(Z_1) = V\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_3 - \frac{n}{2})\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 V(X_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}. \quad Z_1 \text{ est centrée réduite.}$$

$$E(Z_1) = E\left(\frac{\sqrt{n}}{n}(X_1 - X_2)\right) = \sqrt{\frac{n}{n}} (E(X_1) - E(X_2)) = 0 \text{ car } X_1 \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{4}) \text{ et } X_2 \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{4}).$$

$$V(Z_1) = \frac{1}{n} (V(X_1 - X_2)) = \frac{1}{n} [V(X_1) + V(X_2) + 2\text{cov}(X_1, X_2)] = \frac{1}{n} \left[n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + 2\text{cov}(X_1, X_2) \right]$$

$$\text{A d'après A Q 2 : } \text{cov}(X_1, X_2) = -n p_1 p_2 = -\frac{n}{16}.$$

$$V(Z_1) = \frac{1}{n} \left[\frac{3n}{8} + 2\left(-\frac{n}{16}\right) \right] = \frac{1}{n} \times \frac{4n}{8} = 1. \text{ } Z_1 \text{ est également centrée réduite.}$$

$$\underline{E(Z_2) = E(Z_1) = 0 \text{ et } V(Z_2) = V(Z_1) = 1.}$$

$$\text{cov}(Z_1, Z_2) = \text{cov}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 - \frac{n}{2}), \frac{1}{\sqrt{n}}(X_2 - X_1)\right) = \frac{1}{n} \text{cov}(X_1 - \frac{n}{2}, X_2 - X_1)$$

$$\text{cov}(Z_1, Z_2) = \frac{1}{n} \text{cov}(X_1, X_2 - X_1) \quad (\text{car } \text{cov}(\tau + \alpha, u + \beta) = \text{cov}(\tau, u) \dots)$$

$$\text{cov}(Z_1, Z_2) = \frac{1}{n} [\text{cov}(X_1, X_2) - \text{cov}(X_1, X_1)] = \frac{1}{n} (-n p_1 p_2 + n p_1 p_1) \stackrel{p_1=p_2}{=} 0.$$

$$\underline{\text{cov}(Z_1, Z_2) = 0.}$$

Q3) Notons que $E(X_1) = \frac{n}{2}$ et $\sqrt{V(X_1)} = \sqrt{n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{2}.$

$$\text{Ainsi } Z_1 = \frac{X_1 - E(X_1)}{\sqrt{V(X_1)}} \text{ et } X_1 \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2}).$$

La situation est analogue à celle de B Q 2 a).

On peut donc approcher la loi de Z_1 lorsque n est grand par la loi normale centrée réduite.

Q4) a) $\underline{X_1 - X_2 = \sum_{i=1}^n T_i.}$

b) La variable T_i peut se décrire et suivre la même loi.

$$E(T_i) = 1 \times p_1 + (-1) \times p_2 + 0 \times p_3 = 0.$$

$$E(T_i^2) = 1^2 \times p_1 + (-1)^2 \times p_2 = p_1 + p_2 = 1/2. \quad V(T_i) = E(T_i^2) - (E(T_i))^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi la } E\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) = 0 \text{ et } V\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) = \sum_{i=1}^n V(T_i) = \frac{n}{2}.$$

$$\text{d'après le Thème général } \frac{\sum_{i=1}^n T_i - E\left(\sum_{i=1}^n T_i\right)}{\sqrt{V\left(\sum_{i=1}^n T_i\right)}} = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{\frac{n}{2}}} = Z_2 \text{ converge à la loi normale}$$

une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

Donc on peut approcher pour n grand la loi de Z_n pour une loi normale centrée réduite.

Q5) Dans ces conditions et d'après p. 3 b) la loi de V_n et la loi de X' à deux degrés de liberté.

Q6)

```
procedure Tirage(var C:tableau);
var i,t:integer;
begin
  for i:=1 to 100 do
    begin
      t:=random(4);
      if t=0 then C[i]:=3
        else C[i]:=t;
    end;
  end;
end;
```

```
function Difference(c:tableau):integer;
var i,d:integer;
begin
  d:=0;
  for i:=1 to 100 do
    If C[i]=1 then d:=d+1
      else if C[i]=2 then d:=d-1;
  Difference:=d;
end;
```

D

$n \geq 2$

① $\pi = (\cos(\gamma_i, \gamma_j))$. Soit $(i, j) \in \overline{1, n}^2$.

$$\cos(\gamma_i, \gamma_j) = \cos\left(\frac{x_i - n p_i}{\sqrt{n p_i}}, \frac{x_j - n p_j}{\sqrt{n p_j}}\right) = \frac{1}{n \sqrt{p_i p_j}} \cos(x_i - n p_i, x_j - n p_j)$$

$$\cos(\gamma_i, \gamma_j) = \frac{1}{n \sqrt{p_i p_j}} \cos(x_i, x_j) \quad (\text{car } \cos(\alpha U + \beta, \alpha' V + \beta') = \alpha \alpha' \cos(U, V) \dots)$$

$$\text{Si } i = j : \cos(\gamma_i, \gamma_j) = \frac{1}{n \sqrt{p_i^2}} \cos(x_i, x_i) = \frac{V(x_i)}{n p_i} = \frac{n p_i (1 - p_i)}{n p_i} = 1 - p_i = 1 - \sqrt{p_i^2} = 1 - \sqrt{p_i p_j} !$$

$$\text{Si } i \neq j : \cos(\gamma_i, \gamma_j) = \frac{1}{n \sqrt{p_i p_j}} \cos(x_i, x_j) = \frac{-n p_i p_j}{n \sqrt{p_i p_j}} = -\sqrt{p_i p_j}$$

$$\text{Ainsi } \forall (i, j) \in \overline{1, n}^2, \cos(\gamma_i, \gamma_j) = \begin{cases} 1 - p_i = 1 - \sqrt{p_i p_j} & \text{si } i = j \\ -\sqrt{p_i p_j} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{\pi = I_D - N = I - N}}$$

$$\text{② } \forall (i, j) \in \overline{1, n}^2, \sum_{k=1}^n \sqrt{p_i p_k} \sqrt{p_k p_j} = \sqrt{p_i p_j} \times \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n p_k = \sqrt{p_i p_j}.$$

$$\text{Ainsi } \underline{\underline{N^2 = N.}}$$

$$\text{rg}(N) = \dim \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{p_1 p_1} \\ \sqrt{p_1 p_2} \\ \vdots \\ \sqrt{p_1 p_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p_2 p_1} \\ \sqrt{p_2 p_2} \\ \vdots \\ \sqrt{p_2 p_n} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \sqrt{p_n p_1} \\ \sqrt{p_n p_2} \\ \vdots \\ \sqrt{p_n p_n} \end{pmatrix} \right). \text{ Pour } C = \begin{pmatrix} \sqrt{p_1} \\ \sqrt{p_2} \\ \vdots \\ \sqrt{p_n} \end{pmatrix}.$$

$$\text{rg}(N) = \dim \text{Vect}(\sqrt{p_1} C, \sqrt{p_2} C, \dots, \sqrt{p_n} C) = \dim \text{Vect}(C) \text{ car } \exists i \in \overline{1, n}, \sqrt{p_i} \neq 0 !!$$

Pour la même raison ($\exists i \in \overline{1, n}, \sqrt{p_i} \neq 0$), C n'est pas nulle ; par conséquent $\text{rg}(N) = \dim \text{Vect}(C) = 1$.

$$\underline{\underline{\text{rg}(N) = 1.}}$$

(Q3) N est une matrice symétrique réelle de rang 1 et telle que $N^2 = N$.

Il en résulte que N est diagonalisable (N est symétrique et réelle)

$$\text{et } S_p(N) \subset \{0, 1\} \quad (N^2 = N)$$

$$\text{soit } \dim \text{SEP}(N, 0) = \Delta - 1 \quad (\dim(N) = 1).$$

Par conséquent $S_p(N) = \{0, 1\}$, d'où $\text{SEP}(N, 0) = \Delta - 1$, $\dim \text{SEP}(N, 1) = 1$,
 $\text{SEP}(N, 0)$ et $\text{SEP}(N, 1)$ sont orthogonaux.

Soit B_1 (resp. B_2) une base orthogonale de $\text{SEP}(N, 0)$ (resp. $\text{SEP}(N, 1)$).

$B_1 \cup B_2$ est alors une base orthogonale de $\Pi_{\Delta, 2}(\mathbb{R})$. Soit Φ la matrice de passage
 de la base canonique de $\Pi_{\Delta, 2}(\mathbb{R})$ à la base $B_1 \cup B_2$. Les deux bases étant

orthogonales : ${}^t\Phi\Phi = I_\Delta = I$. "En particulier" $\Phi^{-1} = {}^t\Phi$

$$\text{soit alors } {}^t\Phi N \Phi = \Phi^{-1} N \Phi = D \text{ où } D = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \end{pmatrix} = I - J_{\Delta-1}.$$

$$\text{Alors } {}^t\Phi \Pi \Phi = {}^t\Phi (I - N) \Phi = {}^t\Phi \Phi - {}^t\Phi N \Phi = I - (I - J_{\Delta-1}) = J_{\Delta-1}.$$

$$\text{Soit } \Phi J_{\Delta-1} {}^t\Phi = \Phi {}^t\Phi \Pi \Phi {}^t\Phi = \Phi \Phi^{-1} \Pi \Phi \Phi^{-1} = \Pi.$$

$$\text{Donc } \exists Q \in \Pi_{\Delta}(\mathbb{R}) \text{ telle que : } {}^t\Phi\Phi = I \text{ et } \Pi = \Phi J_{\Delta-1} {}^t\Phi.$$

(Q4) $\forall i \in \overline{1, \Delta} \quad Z_i = \sum_{j=1}^{\Delta} a_{ij} X_j.$

$$\forall i \in \overline{1, \Delta}, E(Z_i) = \sum_{j=1}^{\Delta} a_{ij} E(X_j) = \sum_{j=1}^{\Delta} a_{ij} E\left(\frac{X_i - \mu \delta_{ij}}{\sqrt{\mu \delta_{ij}}}\right) = \sum_{j=1}^{\Delta} a_{ij} \frac{1}{\sqrt{\mu \delta_{ij}}} \underbrace{(E(X_i) - \mu \delta_{ij})}_{=0} = 0$$

Pour tout $i \in \overline{1, \Delta}$, Z_i est centrée.

$$\text{Soit } (i, j) \in \overline{1, \Delta}^2. \text{ cov}(Z_i, Z_j) = \text{cov}\left(\sum_{k=1}^{\Delta} a_{ik} X_k, \sum_{\ell=1}^{\Delta} a_{j\ell} X_\ell\right)$$

$$\text{cov}(Z_i, Z_j) = \sum_{k=1}^{\Delta} \sum_{\ell=1}^{\Delta} a_{ik} a_{j\ell} \text{cov}(X_k, X_\ell).$$

$$\text{Puis } {}^t\Phi \Pi \Phi = (d_{ij}). \text{ Comme } {}^t\Phi = (a_{ij}), \Phi = (a_{ji}), \Pi = (\text{cov}(X_i, X_j)) \text{ on a :}$$

$t\phi\pi = (\sum_{k=1}^n a_{ik} \cos(\gamma_k, \gamma_j))$ et par conséquent :

$$V(i, j) \in \mathbb{U}_{1, p} \mathbb{D}^1, \quad \alpha_{ij} = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \cos(\gamma_k, \gamma_\ell) \right) \times a_{j\ell}$$

$$V(i, j) \in \mathbb{U}_{1, p} \mathbb{D}^1, \quad \alpha_{ij} = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{j\ell} \cos(\gamma_k, \gamma_\ell) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{ik} a_{j\ell} \cos(\gamma_k, \gamma_\ell).$$

Finalement $V(i, j) \in \mathbb{U}_{1, p} \mathbb{D}^1, \quad \alpha_{ij} = \cos(Z_i, Z_j)$.

La matrice de covariance de $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$ est donc $t\phi\pi\phi$ c'est à dire $\mathbb{I}_{p-1}$.

$$\text{Alors } V(i, j) \in \mathbb{U}_{1, p} \mathbb{D}^1, \quad \cos(Z_i, Z_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \neq p \\ 0 & \text{si } i = j = p. \end{cases}$$

En particulier $Z_1, Z_2, \dots, Z_{p-1}$ sont orthogonales.

Noter que $V(p, p) = \cos(Z_p, Z_p) = 0$ et $E(Z_p) = 0$.

Alors Z_p est une variable quasi-constante égale à 0.

Q5 $U_n = \sum_{i=1}^p Y_i^2$. Noter que $\begin{pmatrix} Z_1 \\ 1 \\ Z_p \end{pmatrix} = t\phi \begin{pmatrix} Y_1 \\ 1 \\ Y_p \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} Y_1 \\ 1 \\ Y_p \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} Z_1 \\ 1 \\ Z_p \end{pmatrix}$

$$U_n = \sum_{i=1}^p Y_i^2 = (Y_1, \dots, Y_p) \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_p \end{pmatrix} = t(\phi \begin{pmatrix} Z_1 \\ 1 \\ Z_p \end{pmatrix}) \phi \begin{pmatrix} Z_1 \\ 1 \\ Z_p \end{pmatrix} = (Z_1, \dots, Z_p) \underbrace{t\phi\phi}_{\mathbb{I}} \begin{pmatrix} Z_1 \\ 1 \\ Z_p \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^p Z_i^2$$

$$U_n = \sum_{i=1}^p Y_i^2 = \sum_{i=1}^p Z_i^2 = \sum_{i=1}^{p-1} Z_i^2$$

↑
voir plus haut.

Pour n assez grand : $\forall i \in \mathbb{U}_{1, p-1} \mathbb{D}^1, Z_i \in \mathcal{U}(0, 1)$ et $Z_1, Z_2, \dots, Z_{p-1}$ sont indépendantes.
Donc pour n assez grand et d'après $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}_3$, U_n suit la loi de χ^2 à $p-1$ degrés de liberté.

Noter X_i le nombre de personnes nées pendant la période T_i parmi les 8000 personnes.

D'après l'hypothèse faite: $X_1 \sim B(8000; 0,150)$; $X_2 \sim B(8000; 0,169)$;
 $X_3 \sim B(8000; 0,167)$; $X_4 \sim B(8000; 0,414)$.

Si donc $n=8000$, $p_1=0,150$, $p_2=0,169$, $p_3=0,167$, $p_4=0,414$.

L'étude précédente conduit à dire que $V_n = \sum_{i=1}^4 \left(\frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}} \right)^2$ suit la loi du χ^2 à 3 degrés de liberté.

$F_3(99,3) = 0,99$ à dire que V_n n'a une valeur inférieure ou égale à 33,3 avec une probabilité de 0,99 (99 chances sur 100).

La table statistique indique que la valeur observée de V_n est 32,03!
 On peut donc rejeter l'hypothèse de répartition uniforme des naissances au cours de l'année.

Bon pas une vague idée nous envahit. Fallait-il s'envoyer si pages d'études théoriques pour savoir que la répartition des naissances au cours de l'année n'est pas uniforme? Seuls les technocrates de la ziguette pourraient le penser. Nous n'avait bien compris qu'un plein hiver au bûd d'un fjord avec rouffler et pane-matagne ça se faisait pas beaucoup, hein?

Bon, la prochaine fois on commencera par la fin.