CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1980

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Introduction

On étudie ci-dessous la fonction y d'une variable réelle, définie par :

$$y(x) = \frac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$$

Dans la première partie on en construit la courbe représentative. Dans la deuxième partie on résoud certains problèmes relatifs à son intégration.

1. (a) Etudier les variations de la fonction u d'une variable réelle définie par :

$$u(x) = x^3 - 2x^2 - 1$$

   (b) Démontrer que l'équation

$$u(x) = 0$$

   a une et une seule racine réelle x_0, et que

$$4/3 < x_0$$

   (c) Démontrer que l'on a plus précisément :

$$2 < x_0 < 3$$

2. On construit par récurrence les suites réelles (x_n) et (y_n) en posant :
pour $n = 1$, $\quad x_1 = 1,\ y_1 = 3$,

et pour $n > 1$,
$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1}), \quad y_n = y_{n-1} & \text{si} \quad u\left(\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+y_{n-1})\right) \leqslant 0 \\ x_n = x_{n-1}, \quad y_n = \dfrac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1}) & \text{si} \quad u\left(\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+y_{n-1})\right) > 0 \end{cases}.$$

   (a) Calculer x_2 et y_2, x_3 et y_3, x_4 et y_4.

   (b) Montrer que l'on a, pour tout n,
$$x_n \leqslant x_0 \leqslant y_n$$

   (c) Démontrer que les suites (x_n) et (y_n) sont adjacentes.

   (d) Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près.

3. (a) Quel est le domaine de définition de la fonction y citée dans l'introduction ?

   (b) Calculer la dérivée $y'(x)$, et l'exprimer en fonction de $u(x)$.

   (c) Dresser le tableau de variation de y.

4. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction y au voisinage de 0.

   (b) Quelle est la tangente au point $(0, 0)$ de la courbe représentative de y ? Quelle est la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de $(0, 0)$?

5. Etudier les quatre branches infinies de la courbe représentative de y : existence d'asymptotes et position de la courbe par rapport à celles-ci.

6. Tracer la courbe représentative de la fonction y.

PARTIE II

1. On considère les fonctions rationnelles A et B définies par :
$$A(t) = \frac{t^6 + t^4 - t^2 - 1}{t^3(t^2 - 2t - 1)} \qquad \text{et} \qquad B(t) = \frac{6t^4 + 2t^3 - t^2 - 1}{t^3(t^2 - 2t - 1)}$$

   (a) Déterminer la partie entière de A.

   (b) Quels sont les pôles de A ? Quels sont leurs ordres de multiplicité ? Donner la forme de la décomposition de A en éléments simples et la forme de la décomposition de B en éléments simples (sans calculer les numérateurs des éléments simples).

   (c) Sachant que la partie de la décomposition de B relative au pôle 0 est
$$\frac{1}{t^3} - \frac{2}{t^2} + \frac{6}{t}$$
   donner la décomposition complète de B en éléments simples. En déduire la décomposition de A en éléments simples.

   (d) Déduire des calculs précédents une primitive C de A.

2. On veut determiner pour $x > 1$ une primitive de la fonction y citée dans l'introduction.

(a) Soit I la primitive de y définie, pour $a > 1$ et $x > 1$, par

$$I(x) = \int_a^x \frac{z}{z-1}\sqrt{z^2+1}dz$$

Effectuer sur $I(x)$ le changement de variable :

$$2z = t - \frac{1}{t} \qquad \text{avec } t > 0$$

(b) Exprimer I en fonction de C définie en **1.d** de la deuxième partie.

3. L'intégrale $\int_1^2 y(x)dx$ est-elle convergente ? Pourquoi ?

4. On considère l'aire $J(m)$ de la région du plan définie par les inégalités suivantes :

$$x_0 \leqslant x \leqslant m \qquad \text{et} \qquad x+1 \leqslant y \leqslant y(x),$$

où m est un paramètre supérieur ou égal à la racine x_0 définie en **1.b** de la première partie.

(a) Représenter $J(m)$ par des hachures sur le graphique de la courbe représentative de y.

(b) L'aire $J(m)$ a-t-elle une limite finie lorsque m tend vers l'infini ?

(c) Calculer une valeur approchée de $J(4)$ en utilisant la valeur approchée de x_0 calculée en **2.d** de 1a première partie.