CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1984

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Soit a un élément de $\mathbb{R}_+$.

Partie 1

On désigne par E_a l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 4u_{n+3} = 4(1+a)u_{n+2} - (1+4a)u_{n+1} + u_n \tag{1}$$

1. (a) Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
   (b) En considérant l'application de E_a dans $\mathbb{R}^3$ qui à toute suite u associe (u_0, u_1, u_2), calculer la dimension de E_a.

2. (a) Vérifier que l'espace vectoriel K des suites constantes est inclus dans E_a.
   (b) Soit u un élément de E_a. On considère la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation:

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

   Etablir une relation de récurrence (2) satisfaite par v, reliant v_{n+2}, v_{n+1} et v_n.
   (c) On désigne par F_a l'ensemble des suites réelles satisfaisant à la relation (2).
   Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de E_a. Déterminer une base de F_a.
   On sera amené à distinguer trois cas: $0 \leqslant a < 1$, $a = 1$, $a > 1$. Dans le premier cas, on posera $a = \cos\theta$, avec $0 < \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$; dans le dernier cas, on posera $a = \dfrac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$, avec $\theta > 0$.

(d) Montrer qu'il existe une valeur a_0 de a et une seule, que l'on calculera, pour laquelle K est inclus dans F_a.

(e) On suppose que $a \neq a_0$. Montrer que E_a est somme directe de K et de F_a.
En déduire, dans chacun des trois cas envisagés au c), une base de E_a.

(f) Montrer que E_a contient la suite de terme général $u_n = n$.
En déduire une base de E_{a_0}.

3. Soit u l'élément de E_a déterminé par les conditions initiales:

$$u_0 = 1 - \sqrt{|a^2-1|} \qquad u_1 = 1 \qquad u_2 = 1 + \frac{1}{4}\sqrt{|a^2-1|}$$

Calculer u_n en fonction de n. (On discutera suivant la valeur de a.)
Etudier la convergence de u, et calculer la limite de cette suite, lorsqu'elle existe.

Partie 2

On désigne par $M_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes et par I_3 la matrice unité de $M_3(\mathbb{C})$. On donne la matrice carrée suivante, considérée comme élément de $M_3(\mathbb{C})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -a - \frac{1}{4} & a+1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres, réelles ou complexes, de la matrice M.
Lorsque $a \neq 1$, on exprimera ces valeurs propres à l'aide du nombre θ introduit dans la partie I.

2. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice M est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
Lorsque M est diagonalisable, trouver une matrice carrée inversible P telle que la matrice $D = P^{-1}MP$ soit diagonale.
Expliciter D.

3. Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose $Q(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k$ avec la convention $M^0 = I_3$.
On admettra que, pour tout couple (Q_1, Q_2) de polynômes, $(Q_l Q_2)(M) = Q_1(M)Q_2(M)$;
on admettra aussi que $\delta_M(X) = 4X^3 - 4(a+1)X^2 + (4a+1)X - 1$ est un polynôme annulateur de M.
Soit n un nombre entier naturel. Montrer qu'il existe un triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de nombres réels et un seul tel que:

$$M^n = \alpha_n M^2 + \beta_n M + \gamma_n I_3$$

Expliciter ce triplet dans chacun des cas $a = \frac{5}{4}$ et $a = 1$.
Dans ces deux cas, retrouver le résultat de la question I 3.