



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
**DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT**  
Direction des Admissions et concours

---

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION GENERALE, ECONOMIQUE ET TECHNOLOGIQUE**

**MATHEMATIQUES II**

**Année 1986**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

L'objet du problème est de décrire et comparer deux méthodes de détection de pannes. On se place dans la situation suivante : on considère un ordinateur comprenant un ensemble  $C$  de  $n$  circuits intégrés, où  $n \geq 2$ , et on suppose qu'une panne a endommagé un circuit et un seul. On note  $c_1, c_2, \dots, c_n$  ces circuits, où  $c_n$  est le circuit défectueux.

Dans la partie **I.**, on étudie une méthode de tests par paquets quelconques de circuits. Dans la partie **II.**, on évalue l'espérance du nombre de tests nécessaires pour détecter la panne par cette méthode et on compare celle-ci avec une méthode de tests où les circuits sont pris un à un.

## **Partie I : Tests par tirages de paquets de circuits, avec remise**

On note  $\Omega$  l'ensemble des parties de  $C$ . On tire au hasard et de façon équiprobable, par un procédé adéquat, des parties de  $C$ , c'est à dire des éléments de  $\Omega$  (y compris la partie vide). Pour tout élément  $G$  de  $\Omega$ , on note  $\bar{G}$  le complémentaire de  $G$  dans  $C$ .

1. Soit  $A$  une partie de  $C$  de cardinal  $r$ , où  $0 \leq r \leq n$ .
  - (a) Déterminer le nombre de parties de  $C$  ne rencontrant pas  $A$ .
  - (b) Déterminer le nombre de parties de  $C$  contenant  $A$ .
2. On tire un élément  $G$  de  $\Omega$ .
  - (a) Calculer la probabilité d'obtenir une partie donnée  $B$  de  $C$ .

- (b) Soit  $A$  une partie de  $C$  de cardinal  $r$ , où  $0 \leq r \leq n$ . Calculer la probabilité pour que  $G$  contienne  $A$ .
- (c) Soit  $c_j$  un élément de  $C$  distinct de  $c_n$ . On suppose que  $c_n$  appartient à  $G$  ; calculer la probabilité conditionnelle pour que  $c_j$  appartienne à  $G$ .
3. Soit  $\Omega_n$  l'ensemble des parties de  $C$  contenant l'élément  $c_n$ . Soit  $h$  un nombre entier naturel non nul. On tire, successivement et avec remise,  $h$  éléments  $B_1, B_2, \dots, B_h$  de  $\Omega$ . Une technique permet de tester un ensemble de circuits et de savoir si le circuit défectueux se trouve parmi eux. Pour chaque entier  $i$  appartenant à l'intervalle  $[1, h]$ , on teste le paquet  $B_i$ . On pose  $G_i = B_i$  si  $B_i$  contient le circuit défectueux; dans le cas contraire, on pose  $G_i = \overline{B_i}$ . Ainsi,  $G_i$  est un élément de  $\Omega_n$ . On désigne enfin par  $D_h$  l'intersection des parties  $G_i$ .
- (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $j$  tel que  $1 \leq j \leq n-1$ , la probabilité pour que  $c_j$  appartienne à  $D_h$  est égale à  $\frac{1}{2^h}$ .
- (b) Plus généralement, soit  $E$  une partie de  $C$  de cardinal  $r$  ne contenant pas l'élément  $c_n$ . Calculer la probabilité pour que  $D_h$  contienne  $E$ .
- (c) En déduire que les événements  $c_j \in D_h$ , où  $1 \leq j \leq n-1$ , sont mutuellement indépendants et qu'il en est de même pour les événements  $c_j \notin D_h$ .
- (d) Prouver enfin que :

$$P(D_h = \{c_n\}) = \left(1 - \frac{1}{2^h}\right)^{n-1}$$

## Partie II : Étude du nombre de tests nécessaires pour détecter la panne

1. Pour tout nombre entier naturel  $k$ , on pose :

$$a_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$$

- (a) Montrer que l'application qui à tout nombre entier naturel non nul  $k$  associe  $a_{k-1} - a_k$  définit une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}^\times$ .
- (b) Déterminer la fonction de répartition associée à cette loi; construire sa courbe représentative lorsque  $n = 3$ .
2. On conserve la procédure de la question I.3, mais le nombre de tirages n'est pas fixé; pour tout nombre entier naturel non nul  $k$ , on note  $D_k$  l'intersection des parties  $G_1, G_2, \dots, G_k$ .

On considère une variable aléatoire  $X_n$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ , qui prend la valeur 1 si l'événement  $D_1 = \{c_n\}$  est réalisé, la valeur  $k$ , où  $k \geq 2$ , si l'événement  $D_k = \{c_n\}$  est réalisé et si l'événement  $D_{k-1} = \{c_n\}$  ne l'est pas.

(Une telle variable aléatoire représente donc le nombre de tests nécessaires pour détecter le circuit défectueux).

- (a) Pour tout nombre entier naturel non nul  $k$ , calculer la probabilité de l'événement  $X_n \leq k$ .
- (b) En déduire que la loi de probabilité de  $X_n$  est celle qui a été définie dans la question II.1a.
3. (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul  $s$  fixé, la série de terme général  $\left(\frac{1}{2^{ks}}\right)$  est convergente.
- En déduire que la série de terme général  $(a_k)$  est convergente.

(b) Montrer que la variable aléatoire  $X_n$  admet une espérance et que :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

À cet effet, on pourra calculer :

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^q k(a_{k-1} - a_k) - \sum_{k=0}^{q-1} a_k \right)$$

4. On se propose d'évaluer  $E(X_n)$  en comparant la série de terme général  $(a_k)$  à une intégrale. À cet effet, pour tout nombre entier naturel non nul  $p$ , on pose :

$$I_p(x) = \int_0^x f_p(t) dt \quad \text{où} \quad f_p(t) = 1 - (1 - e^{-t})^p$$

(a) Montrer que l'intégrale  $I_p = \int_0^{+\infty} f_p(t) dt$  est convergente.

(On pourra développer  $1 - (1 - e^{-t})^p$ )

(b) Calculer une primitive de la fonction  $f_{p+1} - f_p$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ . En déduire la valeur de  $I_{p+1} - I_p$ . Montrer finalement que :

$$I_{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

(c) Montrer que pour tout nombre entier naturel  $m \geq 2$  :

$$\int_m^{m+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{m} \leq \int_{m-1}^m \frac{dt}{t}$$

En déduire que :

$$\ln(n) \leq I_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$$

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n-1}}{\ln(n)}$

(d) Soit  $g_n$  la fonction numérique définie sur  $[0; +\infty[$  par la relation :

$$g_n(u) = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^u}\right)^{n-1}$$

En étudiant la variation de  $g_n$ , montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul  $k$  :

$$a_k \leq \int_{k-1}^k g_n(u) du \leq a_{k-1}$$

(e) Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $q \geq 2$  :

$$\sum_{k=1}^q a_k \leq \int_0^q g_n(u) du \leq \sum_{k=0}^{q-1} a_k$$

En effectuant le changement de variable  $t = u \ln(2)$  dans cette intégrale et en passant à la limite dans l'encadrement précédent lorsque  $q$  tend vers  $+\infty$ , montrer que :

$$E(X_n) - 1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leq E(X_n)$$

- (f) Déduire des résultats des questions **II.4c** et **II.4e** un encadrement de  $E(X_n)$  et déterminer la limite de  $\frac{E(X_n)}{\ln(n)} \ln(2)$
5. On teste maintenant les circuits  $c_j$  un par un, en les tirant de manière équiprobable et sans remise. On désigne par  $Y_n$  le nombre de tests nécessaires pour détecter le circuit défectueux.
- (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Y_n$ .
- (b) Calculer l'espérance de  $Y_n$ .
6. (a) Calculer la limite de  $\frac{E(X_n)}{E(Y_n)}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- (b) Gr  ce à l'encadrement obtenu dans la question **II.4f**, comparer  $E(X_n)$  et  $E(Y_n)$  lorsque  $n = 100$ , puis lorsque  $n = 1000$ .