



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
**DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT**  
Direction des Admissions et concours

---

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON  
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION GENERALE**  
**MATHEMATIQUES II**

**Année 1993**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

**Partie I**

1. (a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$   
(b) En déduire que :  $e^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
2. (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel  $n$  :

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du$$

(b) Etablir l'encadrement :  $0 \leq \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} e^{-u} du \leq \frac{1}{n!}$

(c) En conclure que :  $e^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

Dans toute la suite du problème, on désigne par  $N$  un nombre entier naturel non nul.

## Partie II

On considère une urne contenant  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$  :  $B_1, B_2, \dots, B_N$ . On effectue  $N$  tirages *avec remise*, en supposant l'équiprobabilité des résultats. Pour tout entier naturel  $i$  compris entre 1 et  $N$ , on note  $X_i$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule  $B_i$  sort lors du  $i^{\text{ème}}$  tirage et la valeur 0 dans le cas contraire. On pose :

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

1. Déterminer l'espérance de  $X_i$ ; en déduire celle de  $S_N$ .
2. Pour tout nombre entier naturel  $k$ , on note  $p(N, k)$  la probabilité de l'événement  $S_N = k$ .
  - (a) Calculer  $p(N, k)$  lorsque  $k > N$ . Montrer que :

$$p(N, k) = C_N^k \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{N-k} \frac{1}{N^k} \quad \text{si } 0 \leq k \leq N$$

- (b) Le nombre entier naturel  $k$  étant fixé, déterminer la limite de  $p(N, k)$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ .

## Partie III

On considère un ensemble  $E_N$  à  $N$  éléments. Soit  $\sigma$  une permutation de  $E_N$ , c'est à dire une bijection de  $E_N$  sur lui même. On appelle point fixe de  $\sigma$  tout élément  $a$  de  $E_N$  tel que  $\sigma(a) = a$ . Pour tout nombre entier  $p$  tel que  $0 \leq p \leq N$ , on note  $F(N, p)$  le nombre de permutations de  $E_N$  qui ont exactement  $p$  points fixes. On convient que  $F(0, 0) = 1$ .

1.
  - (a) Montrer que  $F(N, N) = 1$  et  $F(N, N-1) = 0$ .
  - (b) Montrer que  $\sum_{k=0}^N F(N, k) = N!$
2. On pose  $\omega_N = F(N, 0)$ . Ainsi,  $\omega_N$  est le nombre de permutations de  $E_N$  qui n'ont aucun point fixe. On convient que  $\omega_0 = 1$ .

- (a) Montrer que, pour tout nombre entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq N$  :

$$F(N, k) = C_N^k \omega_{N-k}$$

- (b) En déduire que :  $\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{\omega_{N-k}}{(N-k)!} = 1$

- (c) En raisonnant par récurrence, établir la relation :

$$\frac{\omega_N}{N!} = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!}$$

- (d) Déterminer la limite de  $\frac{\omega_N}{N!}$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ .

On suppose désormais  $N \geq 2$

## Partie IV

On considère à nouveau une urne contenant  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$  :  $B_1, B_2, \dots, B_N$ . On effectue  $N$  tirages aléatoires, cette fois *sans remise*. Pour tout entier naturel  $i$  compris entre 1 et  $N$ , on note  $Y_i$  la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la boule  $B_i$  sort lors du  $i^{\text{ème}}$  tirage et la valeur 0 dans le cas contraire.

1. (a) Déterminer l'espérance de  $Y_i$  et celle de  $Y_i Y_j$ , où  $1 \leq i < j \leq N$ .  
(b) Déterminer la covariance de  $Y_i$  et  $Y_j$ , où  $1 \leq i < j \leq N$ .  
(c) Les variables  $Y_i$  et  $Y_j$  sont-elles indépendantes ?
2. On pose  $T_N = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$ . Déterminer l'espérance et la variance de  $T_N$ .
3. Pour tout nombre entier naturel  $k$ , on note  $q(N, k)$  la probabilité de l'événement  $T_N = k$ .  
(a) Calculer  $q(N, k)$  lorsque  $k > N$ . Montrer que :

$$q(N, k) = \frac{\omega_{N-k}}{k!(N-k)!} \quad \text{si } k \leq N.$$

- (b) Le nombre entier naturel  $k$  étant fixé, déterminer la limite de  $q(N, k)$  lorsque  $N$  tend vers  $+\infty$ . Comparer ce résultat à celui de la question **II.2 b**).

## Partie V

1. A l'aide de la relation établie dans la question **III.2 c**), montrer que pour tout entier naturel  $n \geq 2$  :

$$\omega_n = (n-1)(\omega_{n-1} + \omega_{n-2})$$

2. Pour tout nombre entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq N$ , on pose :  $\bar{q}(N, k) = q(N, N-k)$   
(a) Calculer  $\bar{q}(N, 0)$  et  $\bar{q}(N, 1)$   
(b) Pour  $2 \leq k \leq N$ , exprimer  $\bar{q}(N, k)$  en fonction de  $\bar{q}(N, k-1)$  et de  $\bar{q}(N, k-2)$ .
3. Ecrire un algorithme prenant  $N$  comme donnée et construisant la liste des valeurs de  $\bar{q}(N, k)$ ,  $k$  variant de 0 à  $N$ . On s'attachera à minimiser le nombre d'opérations.