Copie anonyme - n°anonymat : 125500

N3-00020
125500
Maths S

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 31

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Exercice 2

1) Soit $c > 2$.

f est C^0 et positive sur $\mathbb{R}$ ($c > 2$).

f est une densité $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1

$\Leftrightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}}\,dx$ converge et vaut 1.

Or : $c+1 > 3 > 1$

Et : l'intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = c+1 > 1$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{c+1}}$ converge.

D'où : $\int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c+1}}\,dx$ converge ie $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Et : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = c\int_1^{+\infty} x^{-c-1}\,dx$

$= \lim\limits_{A \to +\infty} c \left[\frac{x^{-c-\cancel{1}+\cancel{1}}}{-c} \right]_1^A$

$= 1 - 0$ (car $c > 0$)

$= 1$.

D'où : $\underline{f \text{ est une densité de probabilité}}$.

2) X admet un moment d'ordre 2

$\iff \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ converge absolument

$\iff \displaystyle\int_{1}^{+\infty} x^2 \frac{c}{x^{c+1}}\,dx$ converge (absolument).

Or : $\forall x \geq 1, \quad \dfrac{x^2}{x^{c+1}} = \dfrac{1}{x^{c-1}}$.

Et : l'intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = c-1 > 1$

$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{c-1}}$ converge.

Et donc : $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x^2 \frac{c}{x^{c+1}}\,dx$ converge ie X admet un moment d'ordre 2.

Puisque X admet un moment d'ordre 2,

$\boxed{X \text{ admet une variance et a fortiori une espérance.}}$

- $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

$= \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{c}{x^{c}}\,dx$

$= \displaystyle\lim_{A \to +\infty} c \left[\frac{x^{-c+1}}{-c+1} \right]_1^A$

$= \dfrac{c}{1-c}$. $\quad (c-1>0)$

Donc : $\underline{\mathbb{E}(X) = \dfrac{c}{1-c}}$.

- $\mathbb{E}(X^2) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c-1}}\,dx$

$= \lim\limits_{A \to +\infty} c\left[\dfrac{x^{-c+1+1}}{-c+2}\right]_1^A$

$= \dfrac{c}{2-c} - 0 \qquad (c-2>0)$

- Par formule de König-Huygens,

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$

$= \dfrac{c}{2-c} - \dfrac{c^2}{(1-c)^2}$

$= \dfrac{(1-c)^2 c - c^2(2-c)}{(1-c)^2(2-c)}$

$= \dfrac{(1-2c+c^2)c - 2c^2 + c^3}{(1-c)^2(2-c)}$

$= \dfrac{c-2c^2+c^3-2c^2+c^3}{(1-c)^2(2-c)}$

$= \dfrac{2c^3-4c^2+c}{(1-c)^2(2-c)}$.

D'où : $\underline{\mathbb{V}(X) = \dfrac{2c^3-4c^2+c}{(1-c)^2(2-c)}}$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Si $x < 1$, $F(x) = 0$.

Si $x \geqslant 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt$ (Chasles)

$$= 0 + c\int_{1}^{x} \frac{dt}{t^{c+1}}$$

$$= \cancel{c}\left[\frac{t^{-c}}{-\cancel{c}}\right]_{1}^{x}$$

$$= 1 - x^{-c}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^c} \text{ sinon} \end{cases}$

4) a) $X \in [1, +\infty[$ ps donc $Y = \ln X \in \mathbb{R}_+$ ps

donc $F_Y \equiv 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Soit $x \geqslant 0$. $F_Y(x) = P(Y \leq x)$

$$= P(\ln X \leq x)$$

$$= P(X \leq \underbrace{e^x}_{\geqslant 1}) \text{ car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}$$

$$= F_X(e^x)$$

$$= 1 - \frac{1}{(e^x)^c}$$

$$= 1 - \frac{1}{e^{cx}}.$$

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} F_X(e^x) \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ex 2 suite

4) b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = (1 - e^{-cx}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$.

Puisque $c > 2 > 0$, on reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $c > 0$:

$$Y \hookrightarrow \mathcal{E}(c), \quad c > 0.$$

c) ~~def simul X(c)~~ ~~import~~

~~return~~

On a : $Y = \ln X$ donc $X = e^Y$.

D'où d'après Q4b le programme Python suivant :

```
def simul X(c)
return np.exp(rd.exponential(1/c))
```

5)
```
def simulZ(c)
return simulX(c) * simulX(c)
```
$\underbrace{\text{simulX(c)}}_{\text{simule } X_1}$ * $\underbrace{\text{simulX(c)}}_{\text{simule } X_2}$

6) X_1 et X_2 sont indépendantes et admettent une espérance.

Donc Z admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1 X_2)$$
$$= \mathbb{E}(X_1)\,\mathbb{E}(X_2) \text{ par indépendance}$$
$$= \left(\frac{c}{1-c}\right)^2 \text{ d'après Q2.}$$

Puisque X_1 et X_2 sont indépendantes, le lemme des coalitions assure que X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes.
Et ces variables admettent une espérance.
Donc : $Z^2 = (X_1 X_2)^2 = X_1^2 X_2^2$ admet une espérance ie
Z admet un moment d'ordre 2 et a fortiori une variance et :

$$\mathbb{E}(Z^2) = \mathbb{E}(X_1^2 X_2^2)$$
$$= \mathbb{E}(X_1^2)\,\mathbb{E}(X_2^2) \text{ par indépendance}$$
$$= \left(\frac{c}{2-c}\right)^2 \text{ par Q2.}$$

D'où : $\underline{\mathbb{E}(Z) = \left(\frac{c}{1-c}\right)^2 \text{ et } \mathbb{E}(Z^2) = \left(\frac{c}{2-c}\right)^2}$.

Et par formule de König-Huygens,

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \left(\mathbb{E}(Z)\right)^2$$

$$\mathbb{V}(Z) = \left(\frac{c}{2-c}\right)^2 - \left(\frac{c^2}{(1-c)^2}\right)^2$$

$$= \frac{c^2}{(2-c)^2} - \frac{c^4}{(1-c)^4}$$

$$= \frac{(1-c)^4 c^2 - c^4(2-c)^2}{(1-c)^4(2-c)^2}$$

$$= \frac{c^2}{(1-c)^4(2-c)^2}\left(\underbrace{(1-c)^4}_{=((1-c)^2)^2} - \underbrace{c^2(2-c)^2}_{=(2c-c^2)^2}\right)$$

$$= \frac{c^2}{(1-c)^4(2-c)^2}\left[\left[(1-c)^2-(2c-c^2)\right]\cdot\left[(1-c)^2+(2c-c^2)\right]\right]$$

Et : $(1-c^2)^2-(2c-c^2) = 1-2c^2+c^4-2c+c^2$
$= c^4-c^2-2c+1$

$(1-c)^2+(2c-c^2) = 1-2c^2+c^4+2c-c^2$
$= c^4-3c^2+2c+1$

On admet : $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$.

7) a) D'après Q4b, $Y = \ln X \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$.

D'où : $Y_1 = \ln X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$ et $Y_2 = \ln X_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$

Et donc : $cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

b) $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$.

Or : les variables X_1 et X_2 sont indépendantes donc par coalitions $c\ln(X_1)$ et $c\ln(X_2)$ sont indépendantes ie Y_1 et Y_2 sont indépendantes et :

par théorème de stabilité pour la loi petit gamma,

$$cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2).$$

8) a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $H(x) = P(Y_1 + Y_2 \leq x)$
$= P(cY_1 + cY_2 \leq cx)$ car $c > 0$
$= K(cx)$

H est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et une densité h de Y_1+Y_2 est obtenue par dérivation, là où c'est possible, de H.
On pose $h(0) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = K'(cx)$$
$$= c\,k(x \cdot c),\ \text{où } k \text{ est une densité de } cY_1 + cY_2$$
$$= c\,\frac{(cx)^{2-1} e^{-cx}}{\Gamma(2)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$
$$= c^2 \frac{x e^{-cx}}{1!}$$

Si bien que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} c^2 x e^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

b) Soit $x \in [1, +\infty[$. $F_Z(x) = P(X_1 X_2 \leq x)$
$= P(\ln X_1 + \ln X_2 \leq \ln x)$ car ln est strictement croissante sur $[1, +\infty[$
$= H(\ln x)$

Si $x < 1$, $F_Z \equiv 0$ car $Z \in [1, +\infty[$ ps.

D'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = \begin{cases} H(\ln x) & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 31

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Appro. EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ex 2 suite

8) b) $\ln$ est C^1 sur $[1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, intervalle sur lequel H est C^1.

Par composition, $x \mapsto H(\ln(x))$ est C^1 sur $[1,+\infty[$.

D'où : F_Z est C^1 sur $\mathbb{R}^*$. On obtient une densité f_Z de Z en dérivant F_Z là où c'est possible.

On pose $f_Z(0) = 0$ d'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \frac{1}{x} H'(\ln x) \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$
$$= \frac{1}{x} h(\ln x) \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$
$$= \frac{1}{x} c^2 \ln(x) e^{-c\cdot \ln(x)} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$
$$= \frac{1}{x} c^2 \ln x \, x^{-c} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

9) a) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^\alpha}$ est C^0 sur $[1,+\infty[$ $(\alpha > 1)$.

Soit $A > 1$. $\ln$ est C^1 sur $[1,A]$ et $v : x \mapsto \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$ est C^1 sur $[1,A]$.

$\ln' : x \mapsto \frac{1}{x}$ $\qquad v' : x \mapsto x^{-\alpha}$

L'intégration par parties est licite et :

$$\int_1^A \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{\ln(x)\,x^{-\alpha+1}}{1-\alpha}\right]_1^A - \int_1^A \frac{1}{x}\,\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\,dx$$

$$= \frac{\ln(A)\,A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \int_1^A \frac{1}{(1-\alpha)x^\alpha}\,dx.$$

Or, puisque $\alpha > 1$, on a par croissances comparées :

$$\frac{\ln(A)\,A^{1-\alpha}}{1-\alpha} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$$

Et : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge car $\alpha > 1$ (Riemann).

D'où : $\int_1^A \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ admet une limite lorsque A tend vers $+\infty$

i.e $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$ converge et, $\forall \alpha \in]1,+\infty[$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx = 0 - \frac{1}{(1-\alpha)}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\,dx$$

$$= \frac{-1}{-\alpha+1} \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^A$$

$$= \frac{1}{(-\alpha+1)(1-\alpha)}.$$

b) On a alors par définition de $\mathbb{E}(Z)$ qui existe :

$$\mathbb{E}(Z) = \int_1^{+\infty} x \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} dx$$

$$= c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^c} dx$$

$$= \frac{c^2}{(c-1)(1+c)} \quad \text{car } c > 2 > 1 \text{ d'après Q9a}$$

$$= \frac{c^2}{(1-c)^2} \quad \text{d'où Q6.}$$

- $$\mathbb{E}(Z^2) = \int_1^{+\infty} x^2 \frac{c^2 \ln x}{x^{c+1}} dx$$

$$= c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{c-1}} dx$$

$$= c^2 \frac{1}{(1-c+1)^2} \quad \text{car } c-1 > 1 \text{ et d'après Q9a}$$

$$= \frac{c^2}{(2-c)^2}$$

Et donc d'après Q6 et König-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2$$

$$= \frac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

Problème

1) Soit $n \geq 3$. $I_n = [\![0, n-1]\!]$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$k+n \in \mathbb{Z}$ et $h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right)$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\cancel{n}\pi}{\cancel{n}}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \text{ car } \cos \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$

$$= h(k)$$

Donc : $h \in F_n$.

2) • On note θ la fonction nulle de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

Alors, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall n \geq 3$, $\theta(k+n) = 0 = \theta(k)$.
Donc : θ est dans F_n.

• les applications n-périodiques de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ sont des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et $(f, g) \in F_n^2$.

$\forall n \geq 3$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $(\lambda f + g)(k+n)$

$$= \lambda f(k+n) + g(k+n)$$

$$= \lambda f(k) + g(k) \text{ car } (f,g) \in F_n^2$$

$$= (\lambda f + g)(k)$$

Ainsi $\lambda f + g \in F_n$.

• F_n est non-vide, inclus dans E et stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de E.

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 31	Session : 2023
Épreuve de : Mathématiques Appro. EDHEC		

Emplacement QR Code

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème suite

3) Soit $k \in \mathbb{Z}$, et $f \in F_n$.

$\exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times I_n \,/\, k = nq + r$.

$$\begin{aligned} f(k) &= f(nq+r) \\ &= f(nq+r+n) \quad \text{car } f \in F_n \\ &= f((q+1)n+r) \\ &= f(n+r) \quad \text{car } f \in F_n \\ &= f(r) \quad \text{car } f \in F_n \end{aligned}$$

d'où : $\underline{f(k) = f(r)}$.

4) Soit $i \in I_n$.

a) $e_i \in F_n$ donc d'après Q3, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\exists! (q, r) \in \mathbb{Z} \times I_n \,/\, k = nq+r$

et donc $e_i(k) = e_i(r)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

et : $\forall n \geq 3$, $\sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k)$

$$= \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n-1} f(i) e_i(k) + f(k) e_k(k)$$

$$= 0 + f(k) \cdot 1$$
$$= f(k) \cdot e_k(r)$$
$$= f(r)$$
$$= f(k)$$

D'où : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k)$.

b) Soit $i \in I_n$. $\exists ! (q', r') \in \mathbb{Z} \times I_n \,/\, i = q'n + r'$.

$f(i) = f(r')$ d'après Q3.

Et ce, $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, on a chaque scalaire $f(0), f(1), \dots, f(n-1)$ qui est unique.

Ainsi d'après Q4a on déduit que, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\exists ! (f(0), \dots, f(n-1)) \in \mathbb{R}^n \,/\, , \; f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k)$$

C'est dire que f se décompose de manière unique selon la famille $B_n = (e_0, \dots, e_{n-1})$

ie <u>B_n est une base.</u>

c)

5) Soit $(f,g) \in F_n^2$.

- $\langle f,g \rangle$ est une forme car est un réel bien défini.

- $\langle g,f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)f(k)$
$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)g(k)$
$= \langle f,g \rangle$. $\langle .,. \rangle$ est symétrique.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f,g,h) \in F_n^3$.

$\langle \lambda f+g, h \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f+g)(k)h(k)$
$= \sum_{k=0}^{n-1} [\lambda f(k)+g(k)] h(k)$
$= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda f(k)h(k) + g(k)h(k))$
$= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f(k)h(k) + \sum_{k=0}^{n-1} g(k)h(k)$ par linéarité de la somme
$= \lambda \langle f,h \rangle + \langle g,h \rangle$.

Donc : $\langle .,. \rangle$ est linéaire à gauche donc bilinéaire par symétrie.

- Soit $f \in F_n$. $\langle f,f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{(f(k))^2}_{\geq 0} \geq 0$

Et : si $\langle f,f \rangle = 0$

alors $\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{f(k)^2}_{\geq 0} = 0$

alors : $\forall k \in I_n,\ f(k)^2 = 0$

alors : f est nulle.

Ainsi : $\langle .,. \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
$\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur F_n.

b) Soit $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k) e_j(k)$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{n-1} e_i(k) e_j(k) + e_i(i) e_j(i) + e_j(j) e_i(j).$$

$$= 0 + e_i(i) e_j(i) + e_j(j) e_i(j).$$

si $i \neq j$, $\underbrace{e_i(i)}_{=1} \underbrace{e_j(i)}_{=0} + \underbrace{e_j(j)}_{=1} \underbrace{e_i(j)}_{=0} = 0$

si $i = j$, $\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k \neq i}^{n-1} e_i(k)^2 + e_i(i)^2 = 0 + 1 = 1.$

Donc : $\forall (i,j) \in I_n^2,\ \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Donc : $(e_i)_{i \in I_n}$ est orthonormée.

D'après Q4b, $(e_i)_{i \in I_n}$ est une base orthonormée de F_n pour $\langle .,. \rangle$.

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Appro. EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Problème suite

5)c) ~~On a:~~ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2 / b \in]0, 2\pi[$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\cos(a+kb)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sin\left(a+\frac{2k+1}{2}b\right)-\sin\left(a+\frac{(2k-1)}{2}b\right)\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\sin\left(a+\frac{2(k+1)-1}{2}b\right)-\sin\left(a+\frac{2k-1}{2}b\right)\right]$$
$$= \sin\left(a+\frac{2(n-1+1)-1}{2}b\right)-\sin\left(a+\frac{-1}{2}b\right) \text{ par télescopage}$$
$$= \sin\left(a+\frac{2n-1}{2}b\right)-\sin\left(a-\frac{b}{2}\right).$$

Puisque $b \in]0, 2\pi[$, $2\sin\left(\frac{b}{2}\right) \neq 0$.

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+kb) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}\left(\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}b\right)-\sin\left(a-\frac{b}{2}\right)\right).$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5) d) Pour $a=0$ et $b=\frac{4\pi}{n}$ ($b \notin \{0, 2\pi\}$ car $n \geq 3$) on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \cancel{\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)$$

$$\overset{Q5c}{=} \frac{1}{2\sin\left(\frac{4\pi}{2n}\right)} \left(\sin\left(\frac{(2n-1)\frac{4\pi}{n}}{2} \right) - \sin\left(-\frac{4\pi}{2n} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \left(\sin\left(\frac{2\cancel{n}}{2} \frac{4\pi}{\cancel{n}} - \frac{\frac{4\pi}{n}}{2} \right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \left(\sin\left(2\pi - \frac{2\pi}{n} \right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \left(\underbrace{\sin\left(-\frac{2\pi}{n} \right)}_{= -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \text{ par imparité}} + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \right)$$ car sin est 2π-périodique

$$= 0$$

D'où : $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right) = 0$

Par un raisonnement analogue pour $a=0$ et $b = \frac{(4k+2)\pi}{n} \notin \{0, 2\pi\}$,

il vient : $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right) = 0$

c) $\|h\|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} h(k)^2 \quad (h \in F_m)$

$= \sum_{k=0}^{m-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)^2$

Or : $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$

ie : $\cos^2(a) = \frac{\cos(2a)+1}{2}$.

Pour $a = \frac{2k\pi}{m}$, $k \in I_m$ on a donc :

$\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)^2 = \frac{\cos(4k\pi/m)+1}{2}$.

Soit : $\|h\|^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{m}\right)+1\right)$

$= \frac{1}{2}(0 + m)$ par linéarité et par Q5d

$= \frac{m}{2} \geqslant 0$

Ainsi : $\|h\| = \sqrt{\frac{m}{2}}$.

6) a) $f \in F_m$ donc $k \mapsto f(k+1) \in F_m$ ($\forall k \in \mathbb{Z}, k+1 \in \mathbb{Z}$)

Et F_m est stable par addition de deux éléments de F_m par Q2.

D'où : $Df \in F_m$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f,g) \in F_m^2$.

$D(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(k+1) - (\lambda f + g)(k)$

$= \lambda f(k+1) + g(k+1) - \lambda f(k) - g(k)$

$$D(\lambda f+g) = \lambda\big(f(k+1)-f(k)\big) + g(k+1)-g(k)$$
$$= \lambda D(f) + D(g).$$

Donc : D est une application linéaire de F_n dans F_n (d'après Q6a) ie D est un endomorphisme de F_n.

c) Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$Dh(k) = h(k+1) - h(k)$$
$$= \cos\left(\frac{2(k+1)\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Or : $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b) \end{cases}$

Pour $\begin{cases} u = a-b \\ v = a+b \end{cases}$, on a donc $\begin{cases} u = a-b \\ u+v = 2a \end{cases}$ ie $\begin{cases} u-v = -2b \\ a = \frac{u+v}{2} \end{cases}$

ie $(a,b) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$.

Et donc : $\cos(u) - \cos(v) = 2\sin\left(\frac{v-u}{2}\right)\sin\left(\frac{u+v}{2}\right)$.

Pour $u = \frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n}$ et $v = \frac{2k\pi}{n}$ on a :

$$Dh(k) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{2k\pi}{n}} - \cancel{\frac{2k\pi}{n}} - \frac{2\pi}{n}\right)\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$
$$= 2\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{n} + \frac{4k\pi}{n}\right)\right)$$

D'où par imparité de sin :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ Dh(k) = -2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Appro. EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème suite

6) d) ~~$\|Dh\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(k+1) - f(k)\right)^2$~~

~~$= \sum_{k=0}^{n-1}$~~

$$\|Dh\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 4\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)^2$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{n}\right)^2 .$$

Or : $-2\sin^2(a) = \cos(2a) - 1$

ie $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$.

D'où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \cos\left(\frac{(4k+2)\pi}{n}\right)\right)$

$= \dfrac{n}{2} - 0$ par QTd

Et donc : $\|Dh\|^2 = 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$

soit : $\|Dh\| = \sqrt{2n}\,\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

7) a) Soit $(f,g) \in F_n^2$, alors $\Delta g \in F_n$ et $\Delta f \in F_n$, et :

$$\langle f, \Delta g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\,\Delta g(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\Big(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1)\Big)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k+1) - 2\sum_{k=0}^{n-1} g(k) f(k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k-1)$$

Et $$-\langle Df, Dg \rangle = -\sum_{k=0}^{n-1} \Big(f(k+1) - f(k)\Big)\Big(g(k+1) - g(k)\Big)$$

$$= -\Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) g(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) g(k) - \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k+1) + \sum_{k=0}^{n-1} f(k) g(k)\Big)$$

On admet : $\forall (f,g) \in F_n^2,\ \langle f, \Delta g \rangle = -\langle D_f, D_g \rangle$

b) Soit $(f,g) \in F_n^2$.

$$\langle f, \Delta g \rangle = -\langle D_f, D_g \rangle$$

et $\langle \Delta_f, g \rangle = -\langle D_f, D_g \rangle$ par symétrie des rôles de f et g.

Ainsi : $\forall (f,g) \in F_n^2,\ \langle \Delta_f, g \rangle = \langle \Delta_g, f \rangle$

ie : Δ est un endomorphisme symétrique de F_n.

c) Soit $\lambda \in Sp\,\Delta$ et f un vecteur propre associé.

$\langle f, \Delta f \rangle = \lambda \|f\|^2$ par bilinéarité

$\neq 0$ (vecteur propre)

d'où : $\lambda = \dfrac{\langle f, \Delta f\rangle}{\|f\|^2}$

$= \dfrac{-\langle Df, Df\rangle}{\|f\|^2}$ d'après Q7a

$= - \dfrac{\|Df\|^2}{\|f\|^2}$

≤ 0 par positivité de la norme.

Ainsi : $\underline{Sp\,\Delta \subset \mathbb{R}_-}$

8) a) $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\Delta(\mathcal{E}_0)(k) = \mathcal{E}_0(k+1) - 2\mathcal{E}_0(k) + \mathcal{E}_0(k-1)$

$= 1 - 2 + 1$

$= 0$

Donc : $\underline{\mathcal{E}_0 \in \operatorname{Ker} \Delta}$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc $\lambda \mathcal{E}_0 \in \operatorname{Ker}\Delta$ ie $\operatorname{Vect} \mathcal{E}_0 \subset \operatorname{Ker}\Delta$

Soit $f \in \operatorname{Ker} \Delta$.

Alors, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\Delta(k) = 0$

ie $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k+1) + f(k-1) = \underset{= f(k) + f(k)}{2 f(k)}$

et par Q4a :

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k+1) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k+1)$

$f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k)$

$f(k-1) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i) e_i(k-1)$

d'où par unicité de la décomposition de $k \mapsto f(k+1)$, $k \mapsto f(k)$ et de $k \mapsto f(k-1)$ dans F_n :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k+1) = f(k) = f(k-1)$$

ie f est 1-périodique.

On a donc : $\operatorname{Ker} \Delta \subset \operatorname{Vect} \varepsilon_0$.

Par double inclusion, $\operatorname{Ker} \Delta = \operatorname{Vect} \varepsilon_0$.

9) a) ε_0 n'est pas la fonction nulle donc (ε_0) est une base de $\operatorname{Ker} \Delta$. Il suffit de normer ε_0 pour obtenir une base orthonormée de $\operatorname{Ker} \Delta$.

Et : $\|\varepsilon_0\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} 1^2} = \sqrt{n}$.

- D'après Q7b, Δ est un endomorphisme symétrique de F_n. Ainsi Δ est diagonalisable. donc Δ admet $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ pour valeurs propres, où les $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ sont éventuellement répétées et λ_0 est associée au vecteur propre $\varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{n}}$.

D'après le théorème spectral, il existe une base orthonormée de F_n formée de vecteurs propres de Δ de la forme

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}\right).$$

Et donc : $\forall f \in F_n, \exists! (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \,/\, f = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_i + \frac{\alpha_0}{\sqrt{n}} \varepsilon_0$.

Par décomposition en base orthonormée, on a par ce qui précède :

$$\forall f \in F_n, \; f = \sum_{i=0}^{n-1} \langle f, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i$$

Or : $\langle f, \varepsilon_0 \rangle = 0$.

En posant, $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\alpha_i = \langle f, \varepsilon_i \rangle$, il vient :

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 31

Session : 2023

Épreuve de : Maths Appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème suite

9) a) $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} / f = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \varepsilon_k$.

b) $\|Df\|^2 = \langle Df, Df \rangle$

$= -\langle f, \Delta f \rangle$ par Q7a

On note F la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de f dans la base orthonormée de Q9a
$\mathcal{S} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de Δ dans la base orthonormée de Q9a

Et puisque Δ est diagonalisable, $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \exists A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\mathcal{S} = PA\,{}^tP$ et $A = \mathrm{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ (Q9a)

On a donc : $\|Df\|^2 = -{}^tF \mathcal{S} F$

$= -{}^tF PA\,{}^tPF$

$= -{}^tY A Y$ en posant $Y = {}^tPF = (y_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$

$= -\sum_{k=0}^{n-1} y_k^2 \lambda_k$

$\underset{\geqslant c}{\sim}$

$= \cancel{+ \sum}$

$\geqslant -c \sum_{k=0}^{n-1} y_k^2$

$\geqslant -c\,{}^tYY$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

On admet : $\underline{\|D_f\|^2 \geq c\|f\|^2}$

10) a) $B_3 = (e_0, e_1, e_2)$ d'après Q4b. Soit $k \in I_n$.

$e_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall k \in \mathbb{Z}, \ \Delta f(k) = f(k+1) - 2f(k) + f(k-1)$.

Donc : $\forall k \in \mathbb{Z}, \ \Delta e_0(k) = e_0(k+1) - 2e_0(k) + e_0(k-1)$.

Et : $e_0(k+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } k+1=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ie $e_0(k+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$e_0(k-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ie $e_0(k-1) = e_1(k)$

on admet : $e_0(k+1) = e_2(k)$.

Ainsi : $\Delta e_0(k) = -2e_0(k) + e_1(k) + e_2(k)$.

D'où : <u>la première colonne de A est $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$</u>

b) $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$

$= -3A$

Donc : <u>$x \mapsto x^2 + 3x$ est un polynôme annulateur de A.</u>

On a donc : $Sp\,\Delta \subset \{0, -3\}$.

Supposons par l'absurde que $0 \notin Sp\,\Delta$.

Alors A est inversible et :

$$A(A+3I_3) = 0$$
$$\iff A+3I_3 = 0$$

Or : $A+3I_3 \neq 0$.

Donc : $0 \in Sp\,\Delta$.

Par un raisonnement analogue, si $-3 \notin Sp\,\Delta$ alors on aurait

$$A(A+3I_3) = 0$$
soit : $A = 0$.

Donc : $-3 \in Sp\,\Delta$.

Donc : $\underline{Sp\,\Delta = \{0, -3\}}$

On a donc $c = |-3| = 3$ et l'inégalité de Q9b s'écrit :

$$\underline{\|D_f\|^2 \geq 3\|f\|^2}$$

c) On a donc : $\|D_h\|^2 \geq 3\|h\|^2$

soit d'après Q5e et Q7d :

$$n\,2n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \geq 3\frac{n}{2}$$

soit : $\underline{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \geq \frac{1}{4}}$.

Exercice 1

1) Puisque $rg\, M = 1$ on a par théorème du rang ($\dim E = n$):

$$\dim \ker(M) = n-1$$

i : $\dim \ker f = n-1$
d'où : $0 \in Sp(f)$

2)a) $C = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} = C_1(M)$, avec $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$

$$CL = \begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_2 & \cdots & l_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,1} l_2 & \cdots & m_{1,1} l_n \\ m_{2,1} & m_{2,1} l_2 & \cdots & m_{2,1} l_n \\ \vdots & \vdots & & \\ m_{n,1} & m_{n,1} l_2 & \cdots & m_{n,1} l_n \end{pmatrix}$$

On a : $rg(CL) \leq 1$.

Et puisque C est non nulle, $\exists\, i_0 \in [\![1,n]\!] \,/\, m_{i_0,1} \neq 0$

Et donc : $rg(CL) \geq 1$

soit : $rg(CL) = 1$.

D'où l'existence d'une matrice $L = (1, l_2 \cdots l_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.
telle que : $M = CL$.

b) $Tr(M) = Tr(CL)$, avec $l_1 = 1$

$$= \sum_{k=1}^{n} (CL)_{k,k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_{k,1} l_k$$

$= LC$ par définition du produit matriciel de LC

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 31	Session : 2023

Épreuve de : Maths Appro EDHEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Ex 1 suite

2) b) On a donc : $Tr(M) = LC$.

c) $M^2 = (CL)^2$

$= (CL)(CL)$

$= C(LC)L$

$= C \cdot (Tr M) \cdot L$ par Q2b

$= Tr(M) \cdot CL$

$= Tr(M) \cdot M$ par Q2a

Donc : $M^2 = Tr(M) \cdot M$.

3) $x \mapsto x^2 - Tr(M)x$ est un polynôme annulateur de M.

Donc : $Sp\, M \subset \{0, Tr M\}$.

On admet : $Tr M \in Sp M$

4) Si $\operatorname{Tr} M = 0$ alors $\operatorname{Sp} M = \{0\}$.

Si M était diagonalisable, alors M serait semblable à la matrice nulle, ce qui est une absurdité car $C \neq 0_{n,1}$ et donc M n'est pas nulle.

Donc : $\operatorname{Tr} M = 0 \Rightarrow M$ n'est pas diagonalisable.

5) D'après Q3 et Q4, $\operatorname{Sp} M = \{0, \operatorname{Tr} M\}$.

On a : $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} M} \dim E_\lambda(M) \leq n$

Et donc : $\dim E_{\operatorname{Tr}(M)}(M) \leq n - \dim E_0(M)$
$\leq n - (n-1)$ par Q1
≤ 1

Et puisque $\operatorname{Tr} M \neq 0$: $\dim E_{\operatorname{Tr}(M)}(M) \geq 1$.

d'où : $\dim E_{\operatorname{Tr}(M)}(M) = 1$.

Et donc : $\dim E_{\operatorname{Tr}(M)}(M) + \dim E_0(M) = n$

auquel cas : f est diagonalisable et $\operatorname{Sp} f = \{0, \operatorname{Tr} M\}$.

6)a) $AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 0 \\ ax + y + z/c = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$

exercice 3

1) a) On a obtenu k "face" avant le premier "pile" est l'événement :

$$F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1}$$
$$= F_1 \cap \dots \cap F_k \cap \overline{F_{k+1}}.$$

- On a une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès constante égale à $q = 1-p$.
  X est la variable aléatoire qui est le temps d'attente du premier échec.
  Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$.

b) $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{q}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{p}{q^2}$

2) a) $[Q = k] = [$

3)

4)

5) a)

b) $Q = X$