Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Code épreuve : 297	Nombre de pages : 15	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC BS

Exercice 1 :

Q1) On a $rg(f) = rg(M) = 1$.
Donc d'après le théorème du rang, $\dim(Ker(f)) = n - rg(f)$
$\dim(Ker(f)) = n-1$
car $n \geq 2$
On a $\dim(Ker(f)) \neq 0$ donc f n'est pas injectif donc f n'est pas bijectif.
D'où $0 \in Sp(f)$.

Q2) a) $rg(M) = 1$ donc toute colonne de M est proportionnelle à C.

Ainsi $M = \begin{pmatrix} C & l_2 C & \dots & l_n C \end{pmatrix}$ où $(l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

$$M = C \begin{pmatrix} 1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$$

D'où l'existence de $L = \begin{pmatrix} 1 & l_2 & \dots & l_n \end{pmatrix}$ telle que $M = CL$.

b) En notant $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$,

$M = \begin{pmatrix} c_1 & & (*) \\ & l_2 c_2 & \\ (*) & & \ddots \\ & & & l_n c_n \end{pmatrix}$ D'où $Tr(M) = c_1 + \sum_{k=2}^{n} l_k c_k = LC$

c) On a $M^2 = (CL)^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = Tr(M)CL = Tr(M)M$.

Q3) On a $MC = CLC = C(LC) = Tr(M)C$
et $C \neq 0_{n,1}$ donc $Tr(M) \in Sp(M) = Sp(f)$

Q4) On suppose par l'absurde M diagonalisable.

$P(x) = x^2 - Tr(M)x$ est un polynôme annulateur de M d'après (Q2-c)
Donc les seules valeurs propres possibles pour M sont 0 et $Tr(M)$,
i.e. les racines de P.

Comme $Tr(M) = 0$, $Sp(M) = 0$.
Donc M est semblable à la matrice nulle.
Donc $M = 0$ ce qui est absurde.

Ainsi M n'est pas diagonalisable.

Q5) $Tr(M)$ et 0 sont valeurs propres de f et ce sont
les seules possibles donc $Sp(f) = \{0, Tr(M)\}$

On a $E_0(f) = Ker(f)$ donc $\dim(E_0(f)) = n-1$
Comme $Tr(M) \in Sp(f)$, $\dim(E_{Tr(M)}(f)) \geq 1$.

Donc $n \leq \dim(E_0(f)) + \dim(E_{Tr(M)}(f)) \leq n$
D'où $n = \dim(E_0(f)) + \dim(E_{Tr(M)}(f))$

Comme $E_0(f) \oplus E_{Tr(M)}(f)$ et $E_0(f) \oplus E_{Tr(M)}(f) \subseteq \mathbb{R}^n$,

$E_0(f) \oplus E_{Tr(M)}(f) = \mathbb{R}^n$ et f est donc diagonalisable.

Q6) a) On suppose par l'absurde $ac \neq b$.

$$AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ ax + y + \frac{1}{c}z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow cL_2 \\ (c \neq 0)}}{\iff} \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ acx + cy + z = 0 \\ bx + cy + z = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ acx + cy + z = 0 \\ (b - ac)x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ cy + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad (\text{puisque } b - ac \neq 0)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - acL_1 \\ (ac \neq 0)}}{\iff} \begin{cases} \frac{1}{a}y + \frac{1}{b}z = 0 \\ \left(1 - \frac{ac}{b}\right)z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \left(\text{puisque } 1 - \frac{ac}{b} \neq 0\right)$$

Donc $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{3,1}\}$, donc A est inversible, ce qui est absurde donc $ac = b$.

b) On a $A = \begin{pmatrix} 1 & c/b & 1/b \\ b/c & 1 & 1/c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ b/c \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1/b \\ 1/c \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c/b \\ 1 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1/b \\ 1/c \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Q7) a) On a $Tr(A) = 3 \neq 0$, $rg(A) = 1$ et A est de taille $3 \geq 2$ donc la partie 1 permet de conclure que g est diagonalisable et que $Sp(g) = \{0, 3\}$.

b) Montrons, par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$: " $A^n \in vect(A)$ ".

* $n = 1$: $A \in vect(A)$ donc $P(1)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $P(1), \dots, P(n)$.

On a $A^{n+1} = A \times A^n = A \times \lambda A$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, par l'hypothèse de récurrence
$= \lambda A^2$
$A^{n+1} = \lambda \mu A$ par l'hypothèse de récurrence. (où $\mu \in \mathbb{R}$).
D'où $A^{n+1} \in vect(A)$, ce qui termine la récurrence.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n \in vect(A)$.

Exercice 2 :

Q1) f est bien positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1.

Soit $A > 0$.

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)\,dx = \int_{1}^{A} \frac{c}{x^{c+1}}\,dx \quad \text{puisque } f \text{ est nulle sur }]-\infty, 1[.$$

$$= \left[\frac{1}{x^c} \right]_1^A$$

$$\int_{-\infty}^{A} f(x)\,dx = 1 - \frac{1}{A^c}$$

Or $\lim\limits_{A \to +\infty} 1 - \frac{1}{A^c} = 1$ puisque $c > 0$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut 1.

Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297

Nombre de pages : 19

Session : 2025.

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHECBS

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Donc f est une densité.

Q2) La fonction $x \longmapsto x^2 f(x)$ est nulle sur $]-\infty, 1[$ et positive sur $[1, +\infty[$ donc positive sur $\mathbb{R}$, donc la convergence absolue de son intégrale sur $\mathbb{R}$ est équivalente à sa convergence. Elle est continue sur $[1, +\infty[$.

Soit $x \in [1, +\infty[$.

$x^2 f(x) = \dfrac{c}{x^{c-1}}$ et $c > 2$ donc $c-1 > 1$, d'où, par critère de Riemann, la convergence de

$\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ donc de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$.

Cette convergence est absolue donc X admet un moment d'ordre 2.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^{c-1}}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{c}{2-c} \cdot \frac{1}{x^{c-2}} \right]_1^A$$

$$= \frac{c}{c-2} \text{ puisque } c-2>0.$$

Donc X admet une espérance

et $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{c}{x^c}\,dx = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{c}{c-1} \cdot \frac{1}{x^{c-1}} \right]_1^A$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$E(X) = \frac{c}{c-1}$ puisque $c-1>0$.

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ d'après la formule de Koenig Huygens.

$V(X) = \frac{c}{c-2} - \frac{c^2}{(c-1)^2}$

Q3) On a $F=0$ sur $]-\infty, 1[$.

Soit $x \geq 1$.

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{c}{t^{c+1}}\,dt = \left[-t^{-c}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x^c}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^c} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

Q4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$G(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$
$= \mathbb{P}(\ln(X) \leq x)$
$= \mathbb{P}(X \leq e^x)$ par croissance de exp sur $\mathbb{R}$.
$G(x) = F(e^x)$

b) On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 - e^{-cx} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$

D'où $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$.

c) def simulX(c) :
    return np.exp(rd.exponential(1/c)).

Q5) def simulZ(c) :
    return (simulX(c))**2.

Q6) $E(Z) = E(X_1)E(X_2)$ par indépendance de X_1 et X_2

$= E(X_1)^2$ par l'égalité en loi

$E(Z) = \dfrac{c^2}{(c-1)^2}$ d'après (Q2).

$E(Z^2) = E(X_1^2 X_2^2)$

$= E(X_1^2)E(X_2^2)$ puisque par le lemme des coalitions X_1^2 et X_2^2 sont indépendantes,

$E(Z^2) = \dfrac{c^2}{(c-2)^2}$ d'après (Q2)

Donc par la formule de Koenig-Huygens

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$$

$$= \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2((c-1)^4 - c^2(c-2)^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$= \frac{c^2(c^4 - 4c^3 + 6c^2 - 4c + 1 - c^4 + 4c^3 - 4c^2)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

$$V(Z) = \frac{c^2(2c^2 - 4c + 1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$$

Q7) a) $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$ et $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(c)$

Donc $cY_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $cY_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

b) Par indépendance de cY_1 et de cY_2 (d'après le lemme des coalitions), $cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)$

Q8) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$H(x) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leq x)$
$= \mathbb{P}(cY_1 + cY_2 \leq cx)$
$H(x) = K(cx)$

$cY_1 + cY_2 \hookrightarrow \gamma(2)$ donc K est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.
Donc par composition H vérifie les mêmes propriétés et $Y_1 + Y_2$ est à densité.

Une densité de $Y_1 + Y_2$ est H', définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$H'(x) = cK'(cx) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{c}{\Gamma(2)}(cx^{2-1})\, e^{-cx} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ c^2 x e^{-cx} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$ puisque $\Gamma(2) = (2-1)! = 1$.

$= h(x)$

b) $(X_1X_2)(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $F_Z = 0$ sur $]-\infty, 1[$.
Soit $x \geq 1$.
$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$
$= \mathbb{P}(X_1X_2 \leq x)$
$= \mathbb{P}(\ln(X_1X_2) \leq \ln(x))$ par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
$= \mathbb{P}(\ln(X_1) + \ln(X_2) \leq \ln(x))$ ($X_1X_2 > 0$ puisque $(X_1X_2)(\Omega) = [1, +\infty[$

Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Code épreuve : 297	**Nombre de pages :** 19	**Session :** 2023.

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC 05

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

$F_Z(x) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 \leqslant \ln(x))$

$F_Z(x) = H(\ln(x))$

H est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0.

et on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} F_Z(x) = H(0) = K(0) = 0$ (par la continuité de H).

Donc par composition F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

Donc Z est à densité et une densité de Z est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F_Z'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} h(\ln(x)) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} c^2 \ln(x)\, e^{-c\ln(x)} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{c^2 \ln(x)}{x^{c+1}} & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$

$= f_Z$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q9) a) Soit $\alpha > 1$, $A \geq 1$, $t \in [1, A]$.

On pose $\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v(t) = \dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \end{cases}$ où $(u,v) \in \mathcal{C}^1([1,A])$

et on a $\begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v'(t) = t^{-\alpha} \end{cases}$

Donc $\displaystyle\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ln(t) \right]_1^A - \frac{1}{1-\alpha} \int_1^A \frac{dt}{t^\alpha}$.

$$\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt = \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ln(A) - \frac{1}{1-\alpha} \int_1^A \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Or $1-\alpha < 0$ donc par croissance comparée $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ln(A) = 0$.

et $\displaystyle\int_1^A \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^A = \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{\alpha-1} - \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$ puisque $1-\alpha < 0$,

donc par passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty$,

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^\alpha} dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{(\alpha-1)^2}$

b) $\displaystyle E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Z(x) dx = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^c} dx = \frac{c^2}{(c-1)^2}$

et $\displaystyle E(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_Z(x) dx = c^2 \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^{c-1}} dx = \frac{c^2}{(c-2)^2}$

Donc $\displaystyle V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c^4}{(c-1)^4} = \frac{c^2(2c^2-4c+1)}{(c-2)^2(c-1)^4}$ d'après (Q6)

Exercice 3 :

Q1) a) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(P_{k+1} \cap \bigcap_{i=1}^{k} F_k \right)$

$= \mathbb{P}(P_{k+1})\,\mathbb{P}(F_k) \ldots \mathbb{P}(F_1)$ par l'indépendance des lancers.

$\mathbb{P}(X = k) = p q^k$

b) On remarque que $X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ donc X admet une espérance et une variance et $E(X) = \frac{1}{p} - 1$ et $V(X) = \frac{q}{p^2}$

Q2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$[Q = k] = [X = 3k] \cup [X = 3k+1] \cup [X = 3k+2]$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Les événements sont disjoints donc :

$\mathbb{P}(Q = k) = \mathbb{P}(X = 3k) + \mathbb{P}(X = 3k+1) + \mathbb{P}(X = 3k+2)$

$= pq^{3k} + pq^{3k+1} + pq^{3k+2}$

$= (p + pq + pq^2)\, q^{3k}$

$= (1-q + (1-q)q + (1-q)q^2)\, q^{3k}$

$\mathbb{P}(Q = k) = (1-q^3)(q^3)^k$ et $Q(\Omega) = \mathbb{N}$.

D'où $Q \hookrightarrow BN(1-q^3)$.

Q5) a) On a montré en (Q1-b) que $X+1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
Donc il suffit de retrancher 1 à une simulation d'une loi géométrique afin de simuler X.

b) def div(p):
```
def div(p):
    X = simulX(p):
    Q = simulX (1-(1-p)**3)
    R = X-3*Q.
    return (X, Q,R).
```


IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Emplacement QR Code	Code épreuve : 297	Nombre de pages : 19	Session : 2023.
	Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC BS		
	Consignes	• Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer • Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir • Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite) • Numéroter chaque page (cadre en bas à droite) • Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre	

Problème :

Q1) h est une application de l'ensemble $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$h(k+n) = \cos\left(\frac{2(k+n)\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + 2k\pi\right)$$

$h(k+n) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = h(k)$ puisque cos est 2π-périodique.

D'où $h \in F_n$.

Q2) * On a $F_n \subseteq E$ et 0_E est périodique donc $0_E \subseteq F_n$.

* Soit $(f, g) \in F_n^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$(f+\lambda g)(k+n) = f(k+n) + \lambda g(k+n)$$

$$= f(k) + \lambda g(k)$$

$$(f+\lambda g)(k+n) = (f+\lambda g)(k)$$

Donc $f+\lambda g \in F_n$, qui est donc un sous-espace vectoriel de E.

Q3) Soit $f \in F_n$.

$f(k) = f(nq+r)$

Si $q = 0$, $f(k) = r$.

Si $q > 0$,

$f(k) = f(r + \underbrace{n + \dots + n}_{q \text{ fois}})$

$= f(r + \underbrace{n + \dots + n}_{q-1 \text{ fois}})$ par n-périodicité de f.

$= \dots$

$f(k) = f(r)$

Si $q < 0$, $f(k) = (r - n - \dots - n) = \dots = f(r)$

D'où $f(k) = f(r)$.

Q4) a) Soit $k \in \mathbb{Z}$.
Soit $(q, r) \in \mathbb{Z} \times I_n$ tel que $k = nq + r$.

On a $f(k) = f(r) = 0 \times f(0) + \dots + e_r(r) f(r) + \dots + 0 \times f(n-1)$.

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\, e_i(r)$$

$$f(k) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\, e_i(k) \quad \text{(d'après (Q3))}$$

b) On a montré en (Q4-a) que B_n était génératrice de F_n.
Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On suppose $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i = 0$.

en appliquant cette fonction en chaque $k \in I_n$, on obtient $\lambda_k = 0$.
D'où $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1}$.
Alors B_n est libre dans F_n, c'en est donc une base.

c) Soit $f \in F_n$.
Comme B_n est une base, la combinaison linéaire obtenue à la question (Q4-a) est unique.
Donc les coordonnées de f dans B_n sont les $(f(i))_{i \in I_n}$.

Q5) a) Soit $(f,g,h) \in F_n^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $\langle f,g \rangle \in \mathbb{R}$.

* $\langle f,g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\, g(k) = \sum_{k=0}^{n-1} g(k)\, f(k) = \langle g,f \rangle$
donc $\langle , \rangle$ est symétrique.

* $\langle f+\lambda g, h \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (f+\lambda g)(k)\, h(k) = \langle f,h \rangle + \lambda \langle g,h \rangle$

donc $\langle , \rangle$ est linéaire à gauche, par symétrie, $\langle , \rangle$ est linéaire à droite.

* $\langle f,f \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} (f(k))^2 \geqslant 0$ donc $\langle , \rangle$ est positif.

* On suppose $\langle f,f \rangle = 0$.
Alors $f = 0$ sur I_n. Donc (d'après (Q3)), $f = 0$ sur $\mathbb{Z}$.
Donc $\langle , \rangle$ est défini.

Donc $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire.

b) Soit $(i,j) \in I_n^2$, $i \neq j$.

$\| e_i \|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (e_i(k))^2 = (e_i(i))^2 = 1$.

$\langle e_i, e_j \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} e_i(k)\, e_j(k) = 0$ puisque $\begin{cases} e_i(k) \neq 0 \iff i = k \\ e_j(k) \neq 0 \iff j = k. \end{cases}$

15/20

$\mathcal{B}_n$ est donc orthonormale pour $\langle\, ,\rangle$.

c) On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \frac{1}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{(2(k+1)-1)b}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{(2k-1)b}{2}\right)$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) = \frac{\sin\left(a+\frac{(2n-1)b}{2}\right) - \sin\left(a-\frac{b}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

(par télescopage)

Q6) a) Soit $f \in F_n$.

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$\mathcal{D}_f(k+n) = f(k+n+1) - f(k+n)$

$= f(k+1) - f(k)$

$\mathcal{D}_f(k+n) = \mathcal{D}(k)$

D'où $\mathcal{D}_f \in F_n$.

b) Soit $(f,g) \in F_n^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\mathcal{D}(f+\lambda g)(k) = (f+\lambda g)(k+1) - (f+\lambda g)(k)$

$= f(k+1) - f(k) + \lambda(g(k+1) - g(k))$

$\mathcal{D}(f+\lambda g)(k) = \mathcal{D}(f) + \lambda\mathcal{D}(g)$

Donc $\mathcal{D}(f+\lambda g) = \mathcal{D}(f) + \lambda\mathcal{D}(g)$.

et $\mathcal{D}(f) \in F_n$.

Donc $\mathcal{D} \in \mathcal{L}(F_n)$.

Emplacement QR Code

Code épreuve : 297 | **Nombre de pages :** 19 | **Session :** 2023.

Épreuve de : Mathématiques approfondies EDHEC BS

Q7) a Soit $(f,g) \in F_n^2$.

$$\langle f, \Delta g \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\,\Delta g(k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\big(g(k+1) - 2g(k) + g(k-1)\big).$$

Non abouti.

b) Par symétrie des rôles $\overset{\text{de } f \text{ et de } g}{}$ dans l'égalité de (Q7-a), pour tout $(f,g) \in F_n^2$, $\langle f, \Delta g \rangle = -\langle Df, Dg \rangle = \langle \Delta f, g \rangle$.

Donc Δ est bien symétrique.

c) Δ est symétrique donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
Soit alors $\lambda \in Sp(\Delta)$, $f \in F_n^*$ tel que $\Delta(f) = \lambda f$.
On a $\lambda \|f\|^2 = \langle f, \lambda f \rangle = \langle f, \Delta f \rangle = -\langle Df, Df \rangle = -\|Df\|$
$f \neq 0_{F_n}$ donc $\|f\|^2 \neq 0$ donc $\lambda = -\dfrac{\|Df\|}{\|f\|^2} \leq 0$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q8) a) Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$\Delta_{\varepsilon_0}(k) = \varepsilon_0(k+1) - 2\varepsilon_0(k) + \varepsilon(k-1)$

$= 1 - 2 + 1$

$\Delta_{\varepsilon_0}(k) = 0$, donc $\Delta_{\varepsilon_0} = 0$.

D'où $\varepsilon_0 \in \mathrm{Ker}(\Delta)$.

Q10) a) ~~Soit $k \in \mathbb{Z}$.~~

~~$\Delta(e_0)(k) = -2e_0(k) + e_0(k+1) + e_0(k-1)$~~

~~$= -2e_0(k) + e_2(k) + e_1(k)$~~

$\Delta(e_0)$

b) On a $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = -3A$.

Donc $P(x) = x^2 + 3x$ est un polynôme annulateur de A.
Donc les valeurs propres possibles de Δ sont 0 et -3.

A est inversible donc $0 \notin Sp(A)$.
A est symétrique donc diagonalisable d'après le théorème spectral.
Donc $-3 \in Sp(A)$.

D'où $Sp(A) = \{-3\}$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751