Copie anonyme - n°anonymat : 125500

N3-00020
125500
Maths S

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 28 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I

1) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

$\forall \omega \in \Omega, 0 \leq X(\omega) \leq 1$

donc par croissance de $u \mapsto u^k$ sur $[0,1]$ ($k \geqslant 1$) :

$\forall \omega \in \Omega, \quad 0 \leq (X(\omega))^k \leq 1$

D'où : $|X^k| \leq 1$

Or : 1 admet une espérance.
Donc : par théorème d'existence de l'espérance par domination, X^k admet une espérance.

Et ce pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Donc : X admet des moments de tous ordres.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, et $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

X admet un moment d'ordre $k \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$ converge absolument,

f étant une densité de X définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$.

$x \mapsto x^k f(x)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$, a fortiori sur $\mathbb{R}_+$.

• $\mathbb{E}(X^k)$ existe $\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x^k (\lambda e^{-\lambda x}) dx$ converge absolument

$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx$ converge absolument.

On a de plus : $x^2 (x^k e^{-\lambda x})$

$= x^{k+2} e^{-\lambda x}$

$= (\lambda x)^{k+2} e^{-\lambda x} \frac{1}{\lambda^{k+2}}$ $(\lambda > 0)$

$\xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées.

Ainsi : $x^k e^{-\lambda x} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Or : $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge d'après Riemann (c'est une intégrale de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 0$)

Donc : par critère de négligeabilité pour les intégrales de fonctions C^0 positives, $\int_1^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} dx$ converge absolument.

D'où : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$ converge absolument donc converge (l'intégrande est nul sur $\mathbb{R}_-$)

Et ce, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

D'où : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda>0)$ admet des moments de tous ordres.

Partie II

2) $n=3$. Soit $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$.

$(H_3)_{i,j} = u_{i+j-2}$ $\qquad (G_3)_{i,j} = u_{i+j-1}$

D'où : $H_3 = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{pmatrix}$

$G_3 = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \\ u_3 & u_4 & u_5 \end{pmatrix}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. ~~Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$~~.

Le produit $H_n W$ est compatible et est dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad (H_n W)_k = \sum_{l=1}^{n} (H_n)_{k,l}\, \alpha_k$$
$$= \sum_{l=1}^{n} u_{k+l-2}\, \alpha_k .$$

De même, le produit ${}^tW H_n W$ est compatible et à valeurs dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$:

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2, \quad ({}^tW H_n W)_{k,l} = \sum_{i=1}^{n} ({}^tW)_{k,i}\, (H_n W)_{i,l}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} (H_n)_{i,j} (W)_j$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j\, u_{i+j-2} .$$

donc on a (1) : $^tW H_n W = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\left(P(x)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1}\right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^{j-1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j x^{i+j-2}$$

Or X est solution du problème et $J = \mathbb{R}+$ donc X admet un moment d'ordre $i+j-2$ $\left((i,j) \in [\![1,n]\!]^2\right)$ noté u_{i+j-2} ie :

$\int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x)\,dx$ converge absolument.

Par suite, on a une combinaison d'intégrales convergentes pour $\int_0^{+\infty} P(x)^2 f(x)\,dx$. Donc cette intégrale converge et par linéarité d'intégrales qui convergent :

$$\int_0^{+\infty} P(x)^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j x^{i+j-2}\right) f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \left(\int_0^{+\infty} x^{i+j-2} f(x)\,dx\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j u_{i+j-2} = {}^tW H_n W$$

D'où le résultat (2).

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques appro. ESSEC/HEC

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Partie II suite

4) D'une part, on a pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$({}^tH_n)_{i,j} = (H_n)_{j,i} = u_{j+i-2} = (H_n)_{i,j}.$$

Donc : H_n est symétrique. (1.1)

D'autre part, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{(P(x))^2}_{\geq 0} \underbrace{f(x)}_{\geq 0 \text{ (densité)}} \geq 0$$

donc par croissance de l'intégrale convergente d'après Q3 :

$$\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x) \geq 0$$

ie ${}^tW H_n W \geq 0$ (1.2)

D'après (1.1) et (1.2), $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}_+$ car la forme quadratique associée à H_n est positive.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

5) On pose Q la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-\frac{1}{2}}.$$

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left(Q(x)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-\frac{1}{2}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x^{j-\frac{1}{2}}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j x^{i+j-1}$$

Puisque X est solution du problème, X admet un moment d'ordre $i+j-1$ donc $\int_0^{+\infty} x^{i+j-1} f(x)\,dx$ converge absolument

et par un raisonnement analogue à Q3 et Q4, on déduit que :

${}^tW G_n W \geq 0$ d'où $Sp(G_n) \subset \mathbb{R}_+$.

6) Supposons : $(u_0, u_1, u_2) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

7) Supposons : $\exists \theta \in \mathbb{R}_+^* \, / \int_0^{+\infty} f(t) \exp(t^\theta)\, dt$ converge

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

$g : t \mapsto t^n \exp(-t^\theta)$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonctions et :

$$\forall t > 0, \quad g'(t) = \left(n t^{n-1}\right) e^{-t^\theta} - \left(\theta t^{\theta-1}\right) t^n \exp(-t^\theta)$$
$$= \exp(-t^\theta)\left(n t^{n-1} - \theta t^{n+\theta-1}\right)$$
$$= t^{n-1} \exp(-t^\theta)\left[n - \theta t^\theta \right].$$

On a donc : $g'(t) = 0 \iff n - \theta t^\theta = 0 \quad (t > 0)$
$$\iff n = \theta t^\theta$$
$$\iff \frac{n}{\theta} = t^\theta \quad (\theta > 0)$$
$$\iff \left(\frac{n}{\theta}\right)^{1/\theta} = t \quad (\theta > 0)$$

donc :

t	0		$(n/\theta)^{1/\theta}$		$+\infty$
$g'(t)$	||	$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

avec $g\left(\left(\frac{n}{\theta}\right)^{1/\theta}\right) = \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right)$.

Ainsi : $\forall t > 0, \quad t^n \exp(-t^\theta) \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right)$.

Et : pour $t = 0$, on a $0^n \cdot 1 = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq 0 \\ \cancel{1 \text{ si } n = 0} \end{cases}$.

~~Si $n = 0$, $1 \leq 1$~~. Si $n \geq 1$, $0 \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right)$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+ : \quad t^n e^{-t^\theta} \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_n = \mathbb{E}(X^n) = \int_0^{+\infty} x^n f(x)\,dx$.

D'après Q7a puisque $\exp(-t^\theta) > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t^n e^{-t^\theta} e^{t^\theta} \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-\frac{n}{\theta}} e^{t^\theta}$$

ie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, \quad t^n e^{\cancel{t^\theta - t^\theta}} \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{t^\theta - \frac{n}{\theta}}$

Soit encore : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \geq 0, 0 < t^n f(t) \leq f(t)\left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{t^\theta - \frac{n}{\theta}}$

Et puisque $\int^{+\infty} f(t)\exp(t^\theta)\,dt$ converge, on a par croissance de l'intégration ($0 < +\infty$), on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,dt \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta} \underbrace{\int_0^{+\infty} f(t)\exp(t^\theta)\,dt}_{= I_\theta}$$

ie : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq \left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta} I_\theta$.

et par stricte décroissance de $x \mapsto x^{-\theta/n}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ($\frac{\theta}{n} > 0$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \left[\left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta} I_\theta\right]^{-\theta/n} < u_n^{-\theta/n}$$

Or : $\left[\left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta} I_\theta\right]^{-\theta/n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

$$= \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}\cdot\left(-\frac{\theta}{n}\right)} \left(e^{-n/\theta}\right)^{-\theta/n} I_\theta^{-\theta/n}$$

$$= \left(\frac{n}{\theta}\right)^{-1} e \, I_\theta^{-\theta/n}$$

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Partie II suite

7) b) On a donc, $\forall n \geq 1$:

$$\left(\left(\frac{n}{\theta}\right)^{n/\theta} e^{-n/\theta} I_\theta\right)^{-\theta/n} = \frac{\theta e}{n} \frac{1}{I_\theta^{\theta/n}}.$$

On admet : $\frac{\theta e}{n} \frac{1}{I_\theta^{\theta/n}} \geq \frac{\theta e}{n} > 0$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{\theta e}{n}\right| \leq (u_n)^{-\theta/n}$.

Or : la série harmonique diverge donc par critère de comparaison, $\sum_{n \geq 1} (u_n)^{-\theta/n}$ diverge.

Ainsi $\sum_{n \geq 1} (u_n)^{-\theta/n}$ diverge.

8) Soit $N \in \mathbb{N}$. $N^* = 1 + \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def test_stieltjes(U) :
    N = len(U) - 1
    m = 1 + N/2
    H = np.zeros((m,m))
    for n in range(1, m+1):
        for i in range(1, n+1):

            H[i, n-1] = U[i+n-1]
            H[n-1, i] =
            valp = al.eigvalsh(H)

            for k in range(0,
                if (

                        return
    return
```

9) $t \mapsto t^n e^{-t} \sin(t)$ et $t \mapsto t^n e^{-t} \cos(t)$ sont C^0 sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de telles fonctions. Soit $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Et : $|t^n e^{-t}||\sin t| \leq |t^n e^{-t}| \cdot 1$

Or : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$ converge $\left(\text{et vaut} \begin{cases} \Gamma(n) \text{ si } n > 0 \\ 1 \text{ si } n = 0 \end{cases} \right)$

Donc : par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions C^0 positives, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) \, dt$ converge absolument

Donc converge.

De même on a : $|t^n e^{-t}||\cos t| \leq t^n e^{-t} \cdot 1$

Et par un raisonnement analogue, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t)\, dt$ converge.

Donc : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \sin(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \cos(t)\, dt$ existent.

10) $S_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t)\, dt$ existe d'après Q9 ($n=0$).

~~$t \mapsto e$~~ Soit $A > 0$.

$u : t \mapsto \sin t$ est C^1 sur $[0, A]$; $u' : t \mapsto \cos(t)$
$v : t \mapsto -e^{-t}$ est C^1 sur $[0, A]$.

L'intégration par parties est licite et :

$$\int_0^A e^{-t} \sin(t)\, dt = \left[-e^{-t} \sin(t)\right]_0^A + \int_0^A e^{-t} \cos(t) dt$$
$$= 1 \cdot 0 - e^{-A} \sin A + \int_0^A e^{-t} \cos(t)\, dt.$$

Et : $\cos$ est C^1 sur $[0, A]$ de dérivée $\cos' = -\sin$
$t \mapsto -e^{-t}$ est C^1 sur $[0, A]$.

L'intégrations par parties est licite et :

$$\int_0^A e^{-t} \cos(t)\, dt = \left[-e^{-t} \cos(t)\right]_0^A - \int_0^A (-e^{-t})(-\sin t)\, dt$$

Ainsi : $\int_0^A e^{-t} \sin(t)\, dt = -e^{-A} \sin A + 1 - e^{-A} \cos(A) - \int_0^A e^{-t} \sin t\, dt.$

Or : $\begin{cases} \cos \text{ et } \sin \text{ sont bornées} \\ \lim\limits_{A \to +\infty} e^{-A} = 0 \end{cases}$

donc : $\lim_{A \to +\infty} e^{-A} \sin A = \lim_{A \to +\infty} e^{-A} \cos A = 0$.

Et donc par passage à la limite en faisant tendre A vers $+\infty$ (les intégrales convergent), on a :

$$S_0 = 1 + S_0 \quad \text{ie} \quad 2S_0 = 1$$

$$\text{D'où : } S_0 = \frac{1}{2}.$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{n+1} + T_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} \sin(t)\,dt + \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} \cos(t)\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} (\sin t + \cos t)\,dt.$$

Et : $S_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-t} \sin(t)\,dt$

Soit $A \geq 0$. $u : t \mapsto t^{n+1} \sin t$ est C^1 sur $[0, A]$
$u' : t \mapsto (n+1) t^n \sin(t) + \cos(t) t^{n+1}$
$v : t \mapsto -e^{-t}$ est C^1 sur $[0, A]$.
$v' : t \mapsto e^{-t}$.

L'intégration par parties est licite et, avec $S_n(A) = \int_0^A t^{n+1} e^{-t} dt$:

$$S_{n+1}(A) = \left[-e^{-t} t^{n+1} \sin(t)\right]_0^A + \int_0^A \left((n+1) t^n \sin(t) + \cos(t) t^{n+1}\right) e^{-t} dt$$
$$= -e^{-A} A^{n+1} \sin(A) + (n+1) \int_0^A e^{-t} t^n \sin(t)\,dt + \int_0^A \cos(t)\, t^{n+1} e^{-t} dt$$
(linéarité)

Or par croissances comparées, $\lim_{A \to +\infty} e^{-A} A^{n+1} = 0$

Et puisque sin est borné, il vient : $\lim_{A \to +\infty} e^{-A} A^{n+1} \sin A = 0$

D'où : $S_{n+1} = (n+1) S_n + T_{n+1}$.

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie II suite

11) On déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; S_{n+1} - T_{n+1} = (n+1) S_n . \quad (4)$$

• En faisant le même raisonnement appliqué à T_{n+1}, avec $A>0$ et $T_{n+1}(A) = \int_0^A e^{-t} t^{n+1} \cos(t)\, dt$ avec une intégration par parties appliquée à $t \mapsto -e^{-t}$ et $t \mapsto t^{n+1}\cos(t)$ rendue licite (parce que ces deux fonctions sont C^1 sur $[0, A]$), il vient :

$$T_{n+1}(A) = (n+1) T_n(A) - S_{n+1}(A) \underbrace{- e^{-A} A^{n+1} \cos(A)}_{\xrightarrow[A \to +\infty]{} 0 \text{ (cos bornée)}}$$

Et donc avec A qui tend vers $+\infty$ (les intégrales convergent) :

$$T_{n+1} = (n+1) T_n - S_{n+1}$$

i.e : $\forall n \in \mathbb{N}, \; T_{n+1} + S_{n+1} = (n+1) T_n \quad (3)$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

12) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$V_{n+1} = \begin{bmatrix} S_{n+1} \\ T_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (n+1)T_n - T_{n+1} \\ -(n+1)S_n + S_{n+1} \end{bmatrix}$$

Et : $$MV_n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_n \\ T_n \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} S_n + T_n \\ -S_n + T_n \end{bmatrix}.$$

• $\forall n \in \mathbb{N}$, montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: " $V_{n+1} = (n+1)MV_n$ ".

Pour $n = 0$:

$$1 \cdot M \cdot V_0 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S_0 \\ T_0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (Q10)$$
$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Et de plus : $\begin{cases} S_1 + T_1 = T_0 & (Q11) \\ S_1 - T_1 = S_0 \end{cases}$

soit $(L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$: $\begin{cases} S_1 + T_1 = T_0 \\ 2S_1 = S_0 + T_0 \\ \quad\;\; = 1 \end{cases}$

d'où : $S_1 = \frac{1}{2}$ et $T_0 = \frac{1}{2} - S_1 = 0$.

Donc : $\begin{bmatrix} S_1 \\ T_1 \end{bmatrix} = V_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = MV_0$.

On a donc : $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Montrons $\mathcal{H}(n+1)$.

On a : $V_{n+1} = (n+1) M V_n$

Et : $(n+2) M V_{n+1} = (n+2) M (n+1) M V_n$ par $\mathcal{H}(n)$

$$= (n+2)(n+1) M^2 V_n$$

Et : $V_{n+2} = \begin{bmatrix} S_{n+2} \\ T_{n+2} \end{bmatrix}$

avec d'après Q 11 : $\begin{cases} S_{n+2} + T_{n+2} = (n+2) T_{n+1} \\ S_{n+2} - T_{n+2} = (n+2) S_{n+1} \end{cases}$

soit $(L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$: $\begin{cases} S_{n+2} + T_{n+2} = (n+2) T_{n+1} \\ 2 S_{n+2} = (n+2)(S_{n+1} + T_{n+1}) \end{cases}$

et donc : $\begin{cases} S_{n+2} = \frac{n+2}{2} (S_{n+1} + T_{n+1}) \\ T_{n+2} = (n+2)\left(T_{n+1} - \frac{n+2}{2}(S_{n+1} + T_{n+1}\right) \\ \qquad = \frac{n+2}{2} (T_{n+1} - S_{n+1}) \end{cases}$

De même : $\begin{cases} T_{n+1} = \frac{n+1}{2} (T_n - S_n) \\ S_{n+1} = \frac{n+1}{2} (T_n + S_n) \end{cases}$

donc : $V_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{4} \begin{bmatrix} 2T_n \\ -2S_n \end{bmatrix}$

et : $M^2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

d'où finalement :

$$V_{n+2} = (n+2) M V_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{4}\begin{bmatrix} 2 I_n \\ -2 J_n \end{bmatrix}$$

Et donc : $\mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)$.

Par principe de récurrence :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} = (n+1) M V_n,\ \text{où } M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}.$$

13) Montrons par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{H}(n)$: " $V_n = n! M^n V_0$ ".

Pour $n=0$, $V_0 = \underbrace{(0!)}_{=1} \underbrace{M^0}_{=I_n} V_0$ donc $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$ et montrons $\mathcal{H}(n+1)$.

On a : $V_{n+1} = (n+1) M V_n$ par Q13

$= (n+1) M (n! M^n V_0)$ par $\mathcal{H}(n)$

$= (n+1)! M^{n+1} V_0$

d'où : $\mathcal{H}(n) \Rightarrow \mathcal{H}(n+1)$.

Par principe de récurrence :

$$\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ V_n = n! M^n V_0}.$$

14) On a déjà : $M^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

donc $M^4 = M^2 M^2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{16}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

$= -\frac{4}{16} I_2 = -\frac{1}{4} I_2$.

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Partie II suite

14) On a donc ($n \in \mathbb{N}$) :

$$M^{4n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n I_2$$

$$M^{4n+3} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n M^3.$$

Et par Q13 : $V_{4n+3} = (4n+3)!\, M^{4n+3} V_0$

$$= (4n+3)! \begin{bmatrix} S_{4n+3} \\ T_{4n+3} \end{bmatrix} V_0$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)^n (4n+3)!\, M^3 V_0$$

avec $M^3 = M M^2$

$$= \frac{-1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & +2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Et $M^3 V_0 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ T_0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}}$$

$M^3 V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ * \end{pmatrix}$ où $* \in \mathbb{R}$.

Or : deux matrices sont égales si et seulement si elles ont mêmes tailles et mêmes coefficients.

Il vient alors : $S_{4n+3} = 0$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, S_{4n+3} = 0$.

15) Soit $n \in \mathbb{N}$. $I = \int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^{1/4}} \sin(x^{1/4})\,dx$.

$u : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ t \mapsto t^4 \end{pmatrix}$ est C^1 strictement croissante donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall t > 0,\ u'(t) = \frac{du}{dt} = 4t^3\,dt$ ie $du = 4t^3\,dt$.

Et : $\forall n \geq 3$, ~~en posant $k = n-3$~~ :

$\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} 4\, x^{\frac{n-3}{4}} x^{3/4} g(x) \frac{dx}{4}$

Le théorème de changement de variables assure que I a même nature et même valeur que

$J = 4 \int_0^{+\infty} t^{4n-3} g(t^4)\,dt$

$= 4 \int_0^{+\infty} t^{4n-3} \exp(-t) \sin(t)\,dt$

$= 4 S_{4n-3}$

$= 0$ par Q14.

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx = 0.$$

16)

17) D'après Q16, le problème $\mathcal{M}^*(J)$ admet plusieurs solutions quand $J = \mathbb{R}_+$.

Partie III

18) Soit $n \in \mathbb{N}$.

X admet un moment d'ordre n donc $u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

On a, $\forall \omega \in \Omega$: $X^n(\omega) \in [0, 1]$

donc par croissance de l'espérance (X^n admet une espérance) :

$$u_n \geqslant 0$$

Et si on avait $u_n = 0$, on aurait $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$.

L'intégrande est C^0 positif sur le segment $[0, 1]$ donc :

$$\forall x \in [0, 1], \; x^n f(x) = 0$$

a fortiori : $\forall x \in]0, 1]$, $\cancel{x^n} f(x) = 0$

ce qui est absurde car $f \neq 0$ sur J.

d'où : $\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$.

19) Soient $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ et $k \in [\![0, j]\!]$.

Alors d'après Q18 : $u_{i+k} > 0$

soit encore : $\binom{j}{k} u_{i+k} > 0$

Et : $\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k}$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} (-1)^{2k} \binom{j}{2k} u_{i+2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} (-1)^{2k+1} \binom{j}{2k+1} u_{i+2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \binom{j}{2k} u_{i+2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (j-1)/2 \rfloor} - \binom{j}{2k+1} u_{i+2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \binom{j}{2k} u_{i+2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (j-1)/2 \rfloor} \binom{j}{2k+1} u_{i+2k+1}$$

On admet ce résultat.

20)

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 28	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC/HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 3 suite

21) Soit $\alpha > 0$. On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall \omega \in \Omega$:

$$X^n(\omega) \in]0, 1]$$

Et par croissance de l'espérance (X admet un m_n) :

$$0 < u_n < 1$$

donc : $0 < \frac{u_n}{n^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha}$.

Pour $\alpha > 1$, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha > 1$.

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs :

$\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge.

Pour $\alpha \in]0, 1]$: on admet ce résultat.

$$\forall \alpha > 0, \sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n^\alpha} \text{ converge}$$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Pour $\alpha = 0$, on a $u_n > 0$ et $u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$

Soit $N \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

On a : $\sum_{n=1}^{N} \int_0^1 x^n f(x)\,dx$

$= \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} x^n f(x)\,dx$ par linéarité

$= \int_0^1 f(x) \sum_{n=1}^{N} x^n \,dx.$

$= \int_0^1 f(x) \frac{1-x^N}{1-x}\,dx$

22) $\boxed{\begin{aligned} \Delta_{n,0} &= \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-0} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ &= u_n \end{aligned}}$

23) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, n]\!]$.

$\Delta_{n+1,j+1} = \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+1+k-(j+1)}$

$= \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+\cancel{1}+k-j-\cancel{1}}.$

Et $\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j}$

$- \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+1+k-j}.$

On admet ce résultat.

24)

25) $U = \left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \cdots \quad \frac{1}{10} \right)$

26) f_1 et f_2 sont C^1 sur $[0,1]$ donc h est C^1 sur $[0,1]$ en tant que différences de telles fonctions. Donc h' est C^0 sur $[0,1]$ donc est majorée par un certain $K \in \mathbb{R}+$ et atteinte par théorème des bornes atteintes. Donc :

- ~~h est C^0 et dérivable sur~~
- h est C^0 sur $[0,1]$
- h est dérivable sur $]0,1[$
- $\exists K \in \mathbb{R}+ \,/\, \max\limits_{[0,1]} |h'| = K$

Par théorème des inégalités des accroissements finis, on a :

~~$\forall (x,y) \in [0,1]^2,$~~

$$\exists K \geq 0 \,/\, \forall (x,y) \in [0,1]^2, \ |h(x) - h(y)| \leq K|x-y|.$$

27) a) $Y_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ donc $Z_n = \frac{Y_n}{n}$ admet bien une espérance.

$E(h(Z_n)) =$

Copie anonyme - n°anonymat : 125500

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 28 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques Approfondies ESSEC / HEC

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie 3 suite

32) Soit $x \in [-1, 1]$.

exp est C^2 sur $[-1,1]$ donc en appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1^* (puisque $|\exp''| \leq e$) :

* entre x et 0

$$0 \leq |e^x - 1 - x| \leq e \frac{|1-(-1)|}{2!} x^2 = e x^2$$

d'où le résultat pour $C = e > 0$.

33) $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (polynomiale) à valeurs dans $\mathbb{R}$. ($t \in [0,1]$).

Et exp est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Par théorème de composition, $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto \exp(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t^2)$ est C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

Et : $\forall k \in \mathbb{N}, t \mapsto t^k \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)$ est C^0 sur $[0,1]$

- On a donc : $(\alpha_1, \alpha_2) \mapsto t^k \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- On admet le résultat.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) Soit $i \in \{1, 2\}$.

F_k est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que quotient de telles fonctions dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall i \in [\![1,2]\!]$, $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_i F_k (x_1, x_2)$$

$$= \frac{\partial_i R_k(x_1,x_2) \cdot R_0(x_1,x_2) - \partial_i R_0(x_1,x_2) \cdot R_k(x_1,x_2)}{(R_0(x_1,x_2))^2}$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{1}{R_0(x_1,x_2)^2} \left(R_{k+1}(x_1,x_2) \cdot R_0(x_1,x_2) - R_1(x_1,x_2) \cdot R_k(x_1,x_2) \right) \text{ si } i=1 \\ \frac{1}{R_0(x_1,x_2)^2} \left(R_{k+2}(x_1,x_2) \cdot R_0(x_1,x_2) - R_2(x_1,x_2) \cdot R_k(x_1,x_2) \right) \text{ si } i=2 \end{array} \right.$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{R_{k+1}(x_1,x_2)}{R_0(x_1,x_2)} - \frac{R_1(x_1,x_2) \cdot R_k(x_1,x_2)}{R_0(x_1,x_2)^2} \quad \text{si } i=1 \\ \frac{R_{k+2}(x_1,x_2)}{R_0(x_1,x_2)} - \frac{R_2(x_1,x_2) \cdot R_k(x_1,x_2)}{R_0(x_1,x_2)^2} \quad \text{si } i=2 \end{array} \right.$$

D'où le résultat : $\underline{\partial_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i}$

c) D'après Q33b, on a : $\forall i \in [\![1,2]\!]$, pour tous $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\partial_i F_k(\alpha_1,\alpha_2) = F_{k+i} - F_k F_i$$
$$= \frac{R_{k+i}(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} - \frac{R_k(\alpha_1,\alpha_2)R_i(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)^2}.$$

Et : $\left(t^i - F_i(\alpha_1,\alpha_2)\right)\left(t^k - F_k(\alpha_1,\alpha_2)\right)$

$$= t^{i+k} - t^i F_k(\alpha_1,\alpha_2) - F_i(\alpha_1,\alpha_2)t^k + F_i(\alpha_1,\alpha_2)F_k(\alpha_1,\alpha_2)$$

donc par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \left(t^i - F_i(\alpha_1,\alpha_2)\right)\left(t^k - F_k(\alpha_1,\alpha_2)\right)\exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)\,dt$$
$$= \int_0^1 t^{i+k} e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2}\,dt - F_k(\alpha_1,\alpha_2)\int_0^1 t^i e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2}\,dt$$
$$- F_i(\alpha_1,\alpha_2)\int_0^1 t^k e^{\alpha_1 t + \alpha_2 t^2}\,dt$$
$$+ F_i(\alpha_1,\alpha_2)F_k(\alpha_1,\alpha_2)\int_0^1 \exp(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2)\,dt$$

$$= R_{i+k}(\alpha_1,\alpha_2) - F_k(\alpha_1,\alpha_2)R_i(\alpha_1,\alpha_2)$$
$$- F_i(\alpha_1,\alpha_2)\cdot R_k(\alpha_1,\alpha_2) + F_i(\alpha_1,\alpha_2)F_k(\alpha_1,\alpha_2)\cdot R_0(\alpha_1,\alpha_2)$$

3(4)