Copie anonyme - n°anonymat : 870139

W8-00065
870139
Maths S

Code épreuve : 282 | Nombre de pages : 18 | Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC / HEC Paris

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Partie I :

Q1) a) On a $E(X^0) = 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Par le théorème de transfert, ~~sous réserve de convergence~~,

$E(X^k) = \int_0^1 x^k \, dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$ puisque $f : \begin{cases} x \in [0,1] \longmapsto 1 \\ x \notin [0,1] \longmapsto 0 \end{cases}$ est une densité de X.

b) On a $E(X^0) = 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Par le théorème de transfert, sous réserve de convergence absolue,

$E(X^k) = \lambda \int_0^{+\infty} x^k e^{-\lambda x} \, dx$ puisque $\tilde{f} : \begin{cases} x \geq 0 \longmapsto \lambda e^{-\lambda x} \\ x < 0 \longmapsto 0 \end{cases}$ est une densité de X.

Soit $A \geq 0$, $x \in [0, A]$.

On pose $\begin{cases} u(x) = x^k \\ v(x) = -e^{-\lambda x} \end{cases}$ où $(u,v) \in \mathcal{C}^1([0,A])$

et on a $\begin{cases} u'(x) = k x^{k-1} \\ v'(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{cases}$

Donc $\int_0^A \lambda x^k e^{-\lambda x} \, dx = [-x^k e^{-\lambda x}]_0^A + k \int_0^A x^{k-1} e^{-\lambda x} \, dx$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

$$\int_0^A \lambda x^k e^{-\lambda x} dx = -A^k e^{-\lambda A} + k \int_0^A x^{k-1} e^{-\lambda x} dx.$$

On

Non abouti.

Q2) On a :

$$H_3 = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}$$

et $$G_3 = \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \\ \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 \end{pmatrix}$$

Q3)

On a ${}^tW \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Donc ${}^tW H_n W \in \mathbb{R}$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$({}^tW H_n)_{1,i} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu_{k+i-2}$$

Donc $${}^tW H_n W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \alpha_i \mu_{k+i-2}$$

$${}^tW H_n W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \mu_{i+j-2}$$

Q4) ~~Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.~~

~~$(H_n)_{ij} = u_{i+j-2} = u_{j+i-2} = (H_n)_{ji}$ donc H_n est bien symétrique.~~
~~Donc H_n est diagonalisable d'après le théorème spectral.~~
~~Donc $q_H : W \longmapsto {}^tW H_n W$ est la forme quadratique associée à H_n.~~

~~D'après (Q3) $q_H \geq 0$.~~

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$(H_n)_{ji} = u_{j+i-2} = u_{i+j-2} = (H_n)_{ij}$.

Donc H_n est symétrique donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

Soit $\lambda \in Sp(H_n)$, $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^*$ telle que $H_n W = \lambda W$.

D'après (Q3), ${}^tW H_n W = \displaystyle\int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)\,dx \geq 0$

puisque pour tout $x \geq 0$, $(P(x))^2 \geq 0$ et $f(x) \geq 0$ puisque c'est une densité,

puis par croissance de l'intégrale généralisée.

Donc ${}^tW H_n W = \lambda {}^tW W = \lambda \|W\|^2$ d'où $\lambda = \dfrac{{}^tW H_n W}{\|W\|^2} \geq 0$

puisque comme $W \neq 0_{n,1}$, $\|W\|^2 \neq 0$.

Ainsi $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}_+$.

Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Emplacement QR Code

Code épreuve : 282

Nombre de pages : 18

Session : 2025

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC / HEC Paris

Consignes

- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

II.2)

On a $t \mapsto t^n e^{-t}\sin(t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ et $t \mapsto t^n e^{-t}\cos(t) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.

Q9) Soit $t \geq 0$.

On a $|t^n e^{-t}\sin(t)| = t^n e^{-t}|\sin(t)| \leq t^n e^{-t}$

Or, d'après (Q1), la loi exponentielle de paramètre 1 admet un moment d'ordre n, donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ converge (absolument).

Donc par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin(t)\,dt$ converge absolument donc elle converge.

De même, pour $t \geq 0$, $|t^n e^{-t}\cos(t)| \leq t^n e^{-t}$ donc par le même argument $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cos(t)\,dt$ converge.

Q10) Soit $A \geq 0$, $t \in [0, A]$.

On pose $\begin{cases} \tilde{u}(t) = \sin(t) \\ \tilde{v}(t) = -e^{-t} \end{cases}$, où $(u,v) \in (\mathcal{C}^1([0,A]))^2$

et on a $\begin{cases} \tilde{u}'(t) = \cos(t) \\ \tilde{v}'(t) = e^{-t} \end{cases}$

D'où $\int_0^A e^{-t}\sin(t)\,dt = [-e^{-t}\sin(t)]_0^A + \int_0^A e^{-t}\cos(t)\,dt$

$= -e^{-A}\sin(A) + \int_0^A e^{-t}\cos(t)$

Q10) Soit $A \geq 0$, $t \in [0, A]$.

On pose $\begin{cases} u(t) = \cos(t) \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ où $(u,v) \in (\mathcal{C}^1([0,A]))^2$

et on a $\begin{cases} u'(t) = -\sin(t) \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$

$$\text{D'où } \int_0^A e^{-t} \cos(t)\, dt = [-e^{-t}\cos(t)]_0^A - \int_0^A e^{-t} \sin(t)\, dt$$
$$= 1 - e^{-A}\cos(A) - \int_0^A e^{-t}\sin(t)\, dt$$

Or $|e^{-A}\cos(A)| \leq e^{-A}$ donc $\lim\limits_{A \to +\infty} e^{-A}\cos(A) = 0$

Donc par passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient

$T_0 = 1 - S_0$, d'où, comme $T_0 = S_0$, $S_0 = \frac{1}{2}$.

Q11) Soit $n \in \mathbb{N}$, $A \geq 0$, $t \in [0, A]$.

On pose $\begin{cases} u(t) = t^{n+1} e^{-t} \\ v(t) = \sin(t) - \cos(t) \end{cases}$ où $(u,v) \in (\mathcal{C}^1([0,A]))^2$

et on a $\begin{cases} u'(t) = (n+1) t^n e^{-t} - t^{n+1} e^{-t} \\ v'(t) = \cos(t) + \sin(t) \end{cases}$

$$\text{Donc } \int_0^A t^{n+1} e^{-t} (\cos(t) + \sin(t))\, dt$$

$$= [t^{n+1} e^{-t} (\sin(t) - \cos(t))]_0^A + \int_0^A (\sin(t) - \cos(t))(t^{n+1} e^{-t} - (n+1) t^n e^{-t})\, dt$$

$$= \int_0^A t^{n+1} e^{-t} \sin(t)\,dt - (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\sin(t)\,dt$$

$$- \int_0^A t^{n+1} e^{-t} \cos(t)\,dt + (n+1)\int_0^A t^n e^{-t}\cos(t)\,dt$$

$$+ \left[t^{n+1} e^{-t} (\sin(t) - \cos(t)) \right]_0^A$$

Or $\lim\limits_{A \to +\infty} A^{n+1} e^{-A}(\sin(A) - \cos(A)) = 0$ par croissance comparée.

Donc par passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty$, on obtient

$$S_{n+1} + T_{n+1} = S_{n+1} - (n+1) S_n - T_{n+1} + (n+1) T_n.$$

D

Non abouti.

Q12) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(n+1) M V_n = \frac{n+1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_n \\ T_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{n+1}{2} \begin{pmatrix} S_n + T_n \\ T_n - S_n \end{pmatrix}$$

Or d'après (Q11) $2 S_{n+1} = (n+1)(S_n + T_n)$ donc $S_{n+1} = \frac{n+1}{2}(S_n + T_n)$

et $2 T_{n+1} = (n+1)(T_n - S_n)$ (en sommant et en faisant la différence des égalités)
donc $T_{n+1} = \frac{n+1}{2}(T_n - S_n)$

D'où $(n+1) M V_n = V_{n+1}$

Q13) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: " $V_n = n! M^n V_0$ ".

* $n = 0$: on a en effet $V_0 = 0! M^0 V_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

On a $V_{n+1} = (n+1) M V_n$ (d'après (Q12))
$V_{n+1} = (n+1)! M^{n+1} V_0$ (par l'hypothèse de récurrence),
ce qui termine la récurrence.

Q13) On vérifie que $M^3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $M^4 = -\frac{1}{4} I_2$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{4n+3} = (4n+3)! M^{4n+3} \begin{pmatrix} S_0 \\ T_0 \end{pmatrix}$$

$$= -(4n+3)! \cdot \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} S_0 - T_0 \\ -S_0 - T_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_{4n+3} \\ T_{4n+3} \end{pmatrix}$$

Donc $S_{4n+3} = -\frac{(4n+3)!}{4^n}(S_0 - T_0) = 0$

Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Code épreuve : 282	**Nombre de pages :** 18	**Session :** 2023.

Épreuve de : Mathématiques approfondies

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Emplacement QR Code

Q15) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx$ on effectue le changement de variable

$x = t^4$ puisque $t \longmapsto t^4$ est $\mathcal{C}^1$, bijectif de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} t^{4n} g(t^4) \times (4t^3\,dt)$

$\displaystyle = 4 \int_0^{+\infty} t^{4n+3} \exp(-t)\sin(t)\,dt.$

$= 4\, S_{4n+3}$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n g(x)\,dx = 0$ d'après (Q14).

Q17) On reprend g_1 et g_2 de la question (Q16).

On pose $\tilde{g_1} : \begin{array}{l} x \geqslant 0 \longmapsto \dfrac{g_1(x)}{\int_0^{+\infty} g_1(t)\,dt} \\ x < 0 \longmapsto 0 \end{array}$ et $\tilde{g_2} : \begin{array}{l} x \geqslant 0 \longmapsto \dfrac{g_2(x)}{\int_0^{+\infty} g_2(t)\,dt} \\ x < 0 \longmapsto 0 \end{array}$

$\tilde{g_1}$ et $\tilde{g_2}$ sont nulles sur $\mathbb{R}_-^*$, continues sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement au point 0 ; et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1.

Donc $\tilde{g_1}$ et $\tilde{g_2}$ sont deux densités pour lesquelles il existe, pour chacune, une variable aléatoire admettant un moment de tout ordre, donc le problème $\mathcal{M}^*(J)$ admet au moins deux solutions distinctes.

Q18) On a $X(\Omega) = [0,1]$
Soit alors $n \in \mathbb{N}$.
$X^n(\Omega) = [0,1]$.
Donc $u_n \geqslant 0$.

Or $u_n = E(X^n) = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

Si $u_n = 0$, alors comme $x \longmapsto x^n f(x)$ est positive et continue sur $[0,1]$, $x^n f(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $f = 0$, ce qui est absurde donc $u_n \neq 0$.

D'où $u_n > 0$.

Q19) Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.

On a $$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{k+i} f(x)\,dx$$

$$= (-1)^j \int_0^1 x^i f(x) \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} x^k (-1)^{j-k}\,dx$$

$$= (-1)^j \int_0^1 x^i (x-1)^j f(x)\,dx.$$

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} = \int_0^1 x^i (1-x)^j f(x)\,dx.$$

On a donc, comme en (Q18), $\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} > 0$.

Q21) Soit $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

f est continue sur le segment $[0,1]$ donc elle y est majorée et atteint son maximum. Soit $M = \max_{x \in [0,1]} (f(x))$.

On a $$0 \leq \frac{u_n}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^1 x^n f(x)\,dx$$

$$\leq \frac{M}{n^\alpha} \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\leq \frac{M}{n^\alpha (n+1)}$$

Or, $\frac{1}{n^\alpha (n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge par critère de Riemann ($\alpha + 1 > 1$). Donc par équivalence de séries à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha (n+1)}$ converge donc $\sum_{n \geq 1} \frac{M}{n^\alpha (n+1)}$ également.

Donc par comparaison de séries à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge.

Lorsque $\alpha = 0$, on minore f sur $[0,1]$ donc on minore u_n par le terme général (positif) d'une série divergente puisqu'il sera équivalent à $\frac{1}{n}$, donc par critère de Riemann, puis équivalence, puis comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

III.2)

Q22) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\Delta_{n,0} = \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0}{k} u_{n+k}$$

$$\Delta_{n,0} = u_n$$

Q23) Soit $n \in \mathbb{N}$, $j \in [\![0,n]\!]$.

$$\Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j} - \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+1+k-j}$$

$$= \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \left(u_{n+k-j} - u_{n+1+k-j} \right)$$

Non abouti.

Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Code épreuve : 282	Nombre de pages : 18	Session : 2023.

Emplacement QR Code

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC / HEC Paris

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Q24)

```
import numpy as np.
def test_haudorff(U):
    N = len(U) - 1
    Delta = np.zeros((N+1, N+1))
    info = -1
    for k in range(0, N+1):
        Delta[k,0] = U[k].
        if ((Delta[k,0]>=0) and (info ==-1)):
            info = k
        for j in range(1, N+1):
            Delta[k,j] = Delta[k-1,j-1] - Delta[k,j-1].
            if ((Delta[k,j]>=0) and (info > k)):
                info = k.
    return (info, Delta).
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q26) Soit $(x, y) \in [0,1]^2$. On suppose $x < y$.
Par différence de fonctions $\mathcal{C}^1$ $h \in \mathcal{C}^1([0,1])$ ~~donc $h \in \mathcal{C}^1([x,y])$~~.
Ainsi $h' \in \mathcal{C}^0([0,1])$ donc h' est bornée et elle atteint ses bornes sur $[0,1]$. Soit alors $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $|h'| \leq K$ sur $[0,1]$. $[x,y] \subseteq [0,1]$ donc $|h'| \leq K$ sur $[x,y]$.

Donc, par l'inégalité des accroissements finis,

$$|h(x) - h(y)| \leq K|x-y|.$$

Par symétrie des rôles de x et y, c'est également vrai lorsque $y \leq x$.

Q8)
```
import numpy as np.
import numpy.linalg as al.
def test_stieltjes(U):
    N = len(u)-1
    m = 1+N//2.
    H = np.zeros((m,m)).
    for n in range(1, m+1):
        for i in range(0,n):
            H[i,n-1] = U[i,n+n].
```

```
H [n-1, i] = U[ i+n-1].
valp = al. eigvalsh(H).

for k in range (0, len(valp)+1):
    if valp[k] <= 0:
        return 0.

return 1.
```

Q27) b) La variable aléatoire
$|Z_n - x|$ est à support fini donc elle admet une variance.
On a $0 \leqslant V(|Z_n - x|) = E((Z_n-x)^2) - E(|Z_n - x|)^2$
d'après la formule de Koenig-Huygens.

D'où $E(|Z_n - x|) \leqslant \sqrt{E((Z_n-x)^2)}$ par croissance de $\sqrt{\cdot}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Donc par (Q27 - b),

$$|h(x) - E(h(Z_n))| \leqslant K E(|Z_n - x|)$$
$$\leqslant K\sqrt{E((Z_n-x)^2)}$$

Q28) En supposant $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(x, n)$,
On a $\hat{h}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = E\left(h\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right) = E(h(Z_n))$

par le théorème de transfert.

D'où $|h(x) - \hat{h}_n(x)| \leqslant K\sqrt{E((Z_n-x)^2)}$

Or $E(Z_n) = \frac{1}{n}E(Y_n) = x$ donc $E((Z_n-x)^2) = V(Z_n)$

D'où $|h(x) - \hat{h}_n(x)| \leqslant K\sqrt{\frac{1}{n^2}V(Y_n)} = K\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}}$.

Le trinôme $x(1-x) = -x^2+x$ atteint un maximum au point $-\frac{1}{2\times(-1)} = \frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{1}{4}$ donc :

$$|h(x) - \hat{h}_n(x)| \leq K \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{K}{2\sqrt{n}}$$

Q29) ~~Soit $n \in \mathbb{N}^*$.~~

$$\cancel{\int_0^1 \hat{h}_n(x)\, h(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}\left(\int_0^1 (f_1(x) - f_2(x))\, x^k (1-x)^{n-k}\, dx\right)}$$

Q31)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a $0 \leq \int_0^1 (h(x))^2\, dx \leq \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)|\, dx$

Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{K}{2\sqrt{n}} \int_0^1 |h(x)|\, dx = 0$.

Donc, passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient

$\int_0^1 (h(x))^2\, dx = 0$. Or $h^2 \geq 0$ et $h^2 \in \mathcal{C}^0([0,1])$

donc $h^2 = 0$ donc $h = 0$ sur $[0,1]$.

Donc $f_1 = f_2$ sur $[0,1]$ et comme elles sont nulles sur $\mathbb{R} \setminus [0,1]$, $f_1 = f_2$ sur $\mathbb{R}$.

Il existe donc une unique solution au problème $\mathcal{M}^*(J)$ avec $J = [0,1]$.

Code épreuve : 282 | **Nombre de pages :** 18 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies ESSEC / HEC Paris.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Q 32) Soit $x \in [-1,1]\setminus\{0\}$ On pose $\varphi(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

On a $\varphi(x) = \dfrac{x + \frac{x^2}{2} + o_0(x^2) - x}{x^2} = \dfrac{1}{2} + o_0(1)$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = \dfrac{1}{2}$.

On prolonge donc φ en une fonction continue sur $[-1,1]$ en posant $\varphi(0) = \dfrac{1}{2}$. Notons également φ ce prolongement.

Donc φ est bornée sur $[-1,1]$ et elle y atteint ses bornes. Il existe en particulier une constante $C>0$ telle que pour tout $x \in [-1,1]$, $\varphi(x) < 0$, i.e. $e^{-x} - 1 - x \leq Cx^2$.

Par ailleurs, l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ donc sur $[-1,1]$, donc ~~elle est~~ sa courbe représentative est au-dessus de ses tangentes en particulier au point 0, d'équation $y = x+1$.

D'où, pour tout $x \in [-1,1]$, $0 \leq e^{-x} - 1 - x \leq Cx^2$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q33) b) * On a $\partial_1 F_k(\alpha_1,\alpha_2) = \dfrac{\partial_1 R_k(\alpha_1,\alpha_2) R_0(\alpha_1,\alpha_2) - R_k(\alpha_1,\alpha_2)\partial_1 R_0(\alpha_1,\alpha_2)}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$

$= \dfrac{R_{k+1}(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} - \dfrac{R_k(\alpha_1,\alpha_2)R_1(\alpha_1,\alpha_2)}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$

$= (F_{k+1} - F_k F_1)(\alpha_1,\alpha_2).$

* Soit $(\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

Par ailleurs

$\partial_2 F_k(\alpha_1,\alpha_2) = \dfrac{\partial_2 R_k(\alpha_1,\alpha_2) R_0(\alpha_1,\alpha_2) - R_k(\alpha_1,\alpha_2)\partial_2 R_0(\alpha_1,\alpha_2)}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$

$= \dfrac{R_{k+2}(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} - \dfrac{R_k(\alpha_1,\alpha_2)\partial_2 R_0(\alpha_1,\alpha_2)}{(R_0(\alpha_1,\alpha_2))^2}$

$= (F_{k+2} - F_k F_2)(\alpha_1,\alpha_2).$

D'où, pour tout $i \in \{1,2\}$, $\partial_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i$

Q34) c) Soit $\lambda \in Sp(\nabla^2 G(\alpha_1,\alpha_2))$, $v \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})^*$ tel que $\nabla^2 G(\alpha_1,\alpha_2) v = \lambda v$.

Alors ${}^t v \nabla^2 G(\alpha_1,\alpha_2) v = \lambda\, {}^t v v = \lambda \|v\|^2$
et $\|v\|^2 \neq 0$ puisque $v \neq 0_{2,1}$.

Donc $\lambda = \dfrac{{}^t v \nabla^2 G(\alpha_1,\alpha_2) v}{\|v\|^2} > 0$ d'après (Q34-b)

D'où $Sp(\nabla^2 G(\alpha_1,\alpha_2)) \subset \mathbb{R}_+^*$.