Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 18

Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies emlyon bs.

Exercice 1 :

Q1) a) Soit $t \in [k, k+1]$.

Alors $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}$ par croissance de l'intégrale. ($k \leqslant k+1$).

D'où $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$.

b) On somme les inégalités obtenues pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Donc $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ par la relation de Chasles.

D'où $S_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant S_n - \frac{1}{n}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

c) Soit $n \geqslant 2$ un entier.

~~D'après (Q1-b),~~ $\cancel{\int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant S_n - \frac{1}{n} = (S_n - 1) + 1 - \frac{1}{n}}$.

$$\int_1^n \frac{dt}{t} + \frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t} + 1.$$

Or $\int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^n = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n).$

D'où $\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant \ln(n) + 1$

d) D'après (Q1-c), pour tout $n \geqslant 2$ entier,

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant S_n \leqslant \ln(n) + 1$$

Donc $1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$ puisque comme $n \geqslant 2$, $\ln(n) > 0$.

Or $\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n\ln(n)} = 1 = \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)}$

Donc par le théorème des gendarmes $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{\ln(n)} = 1.$

D'où $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$

Q2) a) rang(50) renvoie le premier entier k tel que $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \geqslant 50$, c'est-à-dire tel que $S_k \geqslant 50$.

b) Cela laisse penser que si l'on fait l'appel rang(50) on obtiendra en réponse une quantité proche de $21\ln(2)$.

Q3) a) On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^{k} = \frac{1-t^{n}}{1-t}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. De (Q3-a) on déduit ceci :

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}\,dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

(par linéarité de l'intégrale).

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt = [-\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

$\displaystyle = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.

D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a, pour tout $t \in [0,x]$ $-x \leqslant -t$
donc $0 < 1-x \leqslant 1-t$
Alors $0 < \dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ par décroissance de $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Alors $\displaystyle 0 \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqslant \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\,dt = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$

Or $|x| < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)} = 0$.

D'où, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

d) Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ dans l'égalité obtenue en (Q3-b) et puisque (d'après (Q3-c))

$$\lim_{n\to+\infty} -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = -\ln(1-x),$$

$\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

Exercice 2 :

Q1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$Z_n(\Omega) = [0,1]$ donc $F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$. On suppose $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \mathbb{P}(Z_n \leq x) \\ &= \mathbb{P}(\inf(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\inf(X_1, \dots, X_n) > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}([X_1 > x] \cap \dots \cap [X_n > x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x) \dots \mathbb{P}(X_n > x) \text{ par l'indépendance des } (X_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)^n \text{ par égalité en loi des } (X_k)_{k\in[\![1,n]\!]}. \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n \end{aligned}$$

$F_n(x) = 1-(1-x)^n$ puisque $x \in [0,1]$.

D'où, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x<0 \\ 1-(1-x)^n \text{ si } x\in[0,1] \\ 1 \text{ si } x \geq 1. \end{cases}$

Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Emplacement QR Code W8-00065 870139

Code épreuve : 295 | **Nombre de pages :** 18 | **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies ensbyon lsh.

b) On a $\lim_{x \to 0} F_n(x) = 0 = F(0)$

et $\lim_{x \to 1} F_n(x) = 1 = F(1)$

Donc F_n est continue en 0 et en 1.

On sait que F_n est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$ puisqu'elle y est constante, et qu'elle est continue sur $[0,1]$ par composition et différence de fonctions continues sur $[0,1]$.

Donc F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour les mêmes raisons (en remplaçant $\mathcal{C}^0$ par $\mathcal{C}^1$), F_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 ou en 1.

Donc Z_n est à densité.

c) Z_n est à densité donc elle admet pour densité F_n' et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_n'(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ n(1-x)^{n-1} \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ si } x > 1 \end{cases} = f_n(x)$.

Q2) def VarZ(n):

```
        from numpy import min
        from numpy.random import random
        return min(random(n)).
```

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q3) Soit $n \geq 2$ un entier, $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \leq 0$, $F_n(x) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 0$.

Si $x \geq 1$, $F_n(x) = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$.

Si $x \in]0,1[$, $F_n(x) = 1-(1-x)^n$ et $|1-x| < 1$
donc $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$ où $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Alors $(Z_n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi presque sûrement constante égale à 0.

Q4) a) On a $\mathbb{P}(Z_n = X_n) = \mathbb{P}(\inf(X_1, \dots, X_n) = X_n)$
$\mathbb{P}(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$ puisqu'il y a un cas favorable sur n possible.

b) Si T_n était à densité, on aurait $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$.
Or $\mathbb{P}(T_n = 0) = \mathbb{P}(Z_n = X_n) = \underset{\neq 0}{\frac{1}{n}}$ (d'après (Q4-a)).

Donc T_n n'est pas à densité.

Q5) b) Il est bien cohérent puisque la valeur 0 a été prise 50 fois sur 20000 et $\frac{50}{20000} = \frac{5}{2000} = \frac{1}{400}$ n'est pas loin de $\frac{1}{500}$ qui est la probabilité théorique.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751

Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Emplacement QR Code WB-00065 870139

Code épreuve : 295 **Nombre de pages :** 18 **Session :** 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies anglais lv.

Consignes
- *Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer*
- *Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir*
- *Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)*
- *Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)*
- *Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre*

Problème :

Q1) On a $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E,\mathbb{R})) = \dim(E)\dim(\mathbb{R}) = \dim(E)$.
puisque $\dim(\mathbb{R}) = 1$.

Q2) a) On a ~~par la théorème du rang et par (Q1),~~

~~$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$.~~

On a $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$ et $\dim(\mathbb{R}) = 1$ donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \in \{0,1\}$.

b) $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \in \{0,1\}$.

Si $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 0$, alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$, d'où $\varphi = 0_{E^*}$.

Si $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1$, comme $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathbb{R}$ et $\dim(\mathbb{R}) = 1$,
$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$ donc φ est bien surjective.

c) φ est surjective d'après (Q2-b) : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$.
Donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1$.
$\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E.
On a, par le théorème du rang, $\dim(E)^* = \dim(E)$ (Q1)
$= 1 + \dim(\mathrm{Ker}(\varphi))$.

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n-1$.
Donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q3) a) Soit $(P, Q) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$g(P+\lambda Q) = \int_0^1 (P+\lambda Q)(t)\,dt = \int_0^1 P(t)\,dt + \lambda \int_0^1 Q(t)\,dt$$

puisque l'intégrale est linéaire

$$g(P+\lambda Q) = g(P) + \lambda g(Q)$$

et $g(P) = \int_0^1 P(t)\,dt \in \mathbb{R}$

Donc $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$

b) $g \in E^*$ et g n'est pas nulle puisque $g(1) = \int_0^1 dt = 1$.

Donc d'après (Q2-c), $\mathrm{Ker}(g)$ est un hyperplan de E.

D'où $\dim(\mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathbb{R}_p[x]) - 1 = p$.

c) Soit $k \in [\![1, p]\!]$.

On a $g(Q_k) = \int_0^1 x^k - \frac{1}{k+1}\,dx = \int_0^1 x^k\,dx - \int_0^1 \frac{dx}{k+1}$

$$= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 - \frac{1}{k+1}$$

$$g(Q_k) = 0$$

D'où $Q_k \in \mathrm{Ker}(g)$.

Donc $(Q_1, \dots, Q_p) \in \mathrm{Ker}(g)$.

$(Q_1, \dots, Q_p)$ est libre puisqu'elle est échelonnée en degré

et $\mathrm{card}((Q_1, \dots, Q_p)) = p = \dim(\mathrm{Ker}(g))$ (d'après (3-b))

Donc $(Q_1, \dots, Q_p)$ est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.

Q4) a) Soit $(P, Q) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f(Q + \lambda P) = (Q + \lambda P)(0) = Q(0) + \lambda P(0) = f(P) + \lambda f(Q)$.

Donc f est linéaire

et $f(P) = P(0) \in \mathbb{R}$.

Donc $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$

b) Soit $P \in E$.

Écrivons $P(x) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x^k$, où $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$.

$P \in \mathrm{Ker}(f) \iff P(0) = 0$

$\iff \alpha_0 = 0$

$\iff P \in \mathrm{vect}(x, \dots, x^p)$.

D'où $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(x, \dots, x^p)$

Q5) a) $(f, g) \in E^{*2}$ et f et g ne sont pas nuls donc d'après (Q2-c) $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont des hyperplans de E.

Donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n - 1 = \dim(\mathrm{Ker}(g))$.

Or $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(g)$.

D'où $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

b) On suppose par l'absurde que pour tout $x \in E$, $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

Alors $E \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

Or $\mathrm{Ker}(f) \subseteq E$.

Donc $\mathrm{Ker}(f) = E$.

D'où $f = 0_{E^*}$ ce qui est absurde.

Donc il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \mathrm{Ker}(f)$.

c) $x_0 \notin \mathrm{Ker}(f)$ donc $x_0 \neq 0$, donc $\dim(\mathrm{vect}(x_0)) = 1$.

Alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{vect}(x_0)) = n - 1 + 1 = n = \dim(E)$ puisque $\mathrm{Ker}(f)$ est un hyperplan.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{vect}(x_0)$.

Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda x_0$ et $\lambda x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$

Donc $\lambda = 0$ puisque sinon, $\frac{\lambda}{\lambda} x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$ ce qui est absurde.

Donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{vect}(x_0) \subseteq \{0_E\}$.

Or $\{0\} \subseteq \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{vect}(x_0)$.
D'où $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{vect}(x_0) = \{0_E\}$.

Alors $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{vect}(x_0)$

d) Soit $x \in E$.
D'après (Q5-c) on peut écrire $x = \tilde{x} + \lambda x_0$, où $\tilde{x} \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc $h(x) = h(\tilde{x} + \lambda x_0)$
$= h(\tilde{x}) + \lambda h(x_0)$ (h est linéaire puisque c'est une combinaison linéaire de f et g qui le sont)
$= g(x_0) f(\tilde{x}) - f(x_0) g(\tilde{x}) + g(x_0) f(x_0) + f(x_0) g(x_0)$
$h(x) = 0$ puisque $\tilde{x} \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ (d'après (Q5-a)).

D'où $h = 0_{E^*}$

e) L'application h est nulle donc $g(x_0) f = f(x_0) g$,
donc $g = \dfrac{g(x_0)}{f(x_0)} f$ (en effet $f(x_0) \neq 0$ puisque $x_0 \notin \mathrm{Ker}(f)$ (d'après (Q5-b)))
Donc g ~~et~~ f sont deux éléments proportionnels de E^*.

6) a) On a la liberté de la famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ dans E. Donc par le théorème de la base incomplète il existe $e_n \in E$ tel que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E.

b On a défini φ par l'image d'une base ce qui assure l'unicité de l'application. Donc φ est bien définie.

On a à l'évidence $H \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, puisque φ est nulle sur une base de H donc φ est nulle sur H donc.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
Il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ (d'après (Q6-a)).

Copie anonyme - n°anonymat : 870139

Code épreuve : 295	Nombre de pages : 18	Session : 2023

Épreuve de : Mathématiques approfondies emlyon bs.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

On a $0 = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi(e_k) = \lambda_n$

Donc $x = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k \in H$.

D'où $\underline{\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq H}$,

Alors $\underline{H = \mathrm{Ker}(\varphi)}$.

Q7) Soit $x \in E$.

$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0_{\mathbb{R}^p}$

$\iff (f_1(x), \dots, f_p(x)) = 0_{\mathbb{R}^p}$

$\iff$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $f_k(x) = 0$.

$\iff$ pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $x \in \mathrm{Ker}(f_k)$

$\iff x \in \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_k)$.

D'où $\underline{\mathrm{Ker}(f) = \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f_k)}$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

Q8) a) Par la surjectivité de f on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ donc comme $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 \in \mathrm{Im}(f)$ c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $\varepsilon_1 = f(x)$. ε_1 admet donc un antécédent par f.

b) On a $(f_1, \dots, f_p) \in E^*$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = 0$.

Soit $x \in E$ tel que $f(x) = \varepsilon_1$, qui existe d'après (Q8-a).

On a $\cancel{\lambda_1 \varepsilon_1 + \sum_{k=2}^{p} \lambda_k f_k(x) = 0}$.

Donc $(f_1(x), \dots, f_p(x)) = (1, 0, \dots, 0)$.

C'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x) = \lambda_1 = 0$.

On montre comme en (Q8-a) que pour tout $k \in [\![2, p]\!]$, ε_k admet un antécédent par l'application f dès lors on montre, comme ci-dessus, que $\lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$.

Ainsi, $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans E^*.

Q9) a) On a $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^p$
et comme f n'est pas surjective $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^p$.
Donc $m \leqslant p-1$.

b) Soit $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{p-m})$ une famille de $p-m$ vecteurs de $\mathbb{R}^p$ tels que $(e_1, \dots, e_m, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{p-m})$ soit une base de $\mathbb{R}^p$.
Ainsi, $(e_1, \dots, e_m, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{p-m-1})$, qui contient $p-1$ vecteurs, est une base d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ de dimension $p-1$, c'est-à-dire un hyperplan, et
et $\mathrm{Im}(f)$ y est inclus

c) D'après (Q9-b) $(f_1, \dots, f_p)$ est incluse dans un hyperplan de $\mathbb{R}^p$, qui est donc de dimension $p-1$.
Or $\operatorname{card}(f_1, \dots, f_p) = p > p-1$.
Donc $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans cet hyperplan donc dans E^*.

Q10) a) On a montré en (Q9-c) que si f n'est pas surjective la famille $(f_1, \dots, f_p)$ était liée. Donc par contraposée si la famille est libre alors f est surjective.

Donc f est bien surjective.

b) On a $\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i)\right) = \dim(\operatorname{Ker}(f))$ (d'après (Q7))
$= n - \operatorname{rg}(p)$ par le théorème du rang

$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}(f_i)\right) = n - p$ par la surjectivité de f.

Q11) a) Soit $(x,y) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
$f_a(x+\lambda y) = \langle a, x+\lambda y\rangle = \langle a, x\rangle + \lambda\langle a, y\rangle$ par linéarité à droite du produit scalaire

$f_a(x+\lambda y) = f_a(x) + \lambda f_a(y)$

et $f_a(x) = \langle x, a\rangle \in \mathbb{R}$.

Donc $f_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*$

b) Soit $x \in E$.

$x \in \operatorname{Ker}(f_a) \iff \langle x, a\rangle = 0$
$\iff x \in \operatorname{vect}(a)^\perp$

D'où $\operatorname{Ker}(f_a) = \operatorname{vect}(a)^\perp$

c) Si f_a est l'application nulle alors pour tout $x \in E$, $\langle x, a\rangle = 0$
c'est-à-dire que a est orthogonal à tout vecteur de E : $a = 0_E$

Q12) a) Soit $(a,b) \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$

$\phi(a+\lambda b)(x) = f_{a+\lambda b}(x)$

$= \langle a+\lambda b, x \rangle$

$= \langle a, x\rangle + \lambda \langle b, x\rangle$ par linéarité à gauche du

$= f_a(x) + \lambda f_b(x)$ produit scalaire.

$\phi(a+\lambda b)(x) = (f_a + \lambda f_b)(x)$.

Donc $\phi(a+\lambda b) = f_a + \lambda f_b = \phi(a) + \lambda \phi(b)$

b) D'après (Q11-c), si $f_a = \phi(a)$ (où $a \in E$) est l'application nulle alors $a = 0_E$.

Donc $\mathrm{Ker}(\phi) \subseteq \{0_E\}$.

Or $\{0_E\} \subseteq \mathrm{Ker}(\phi)$.

D'où $\mathrm{Ker}(\phi) = \{0_E\}$.

ϕ est dès lors injectif.

Comme $\begin{cases} \phi : E \longrightarrow E^* \\ E \text{ et } E^* \text{ sont de dimension finie} \\ \dim(E) = \dim(E^*) \text{ (d'après (Q1))} \end{cases}$, ϕ est bijectif

Donc ϕ est un isomorphisme de E sur E^*.

c) ~~La bijectivité de ϕ permet d'affirmer que pour tout $\varphi \in E^*$, il existe un unique $a \in E$ tel que~~

La bijectivité de ϕ assure l'existence de $\phi^{-1} : E^* \longrightarrow E$.

Donc, soit $\varphi \in E^*$. Il suffit de considérer l'unique a tel que $a = \phi^{-1}(\varphi)$ et on aura, pour tout $x \in E$,

$\varphi(x) = \phi(a)(x) = \langle a, x \rangle$.

Code épreuve : 285 | Nombre de pages : 18 | Session : 2023.

Épreuve de : Mathématiques approfondies emlyon bs.

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Q 13) a) Soit $(A,B,C) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $\langle A,B\rangle = Tr({}^tAB) \in \mathbb{R}$.

* $\langle A,B\rangle = Tr({}^tAB) = Tr({}^t({}^tAB)) = Tr({}^tB\,{}^t({}^tA)) = Tr({}^tBA) = \langle B,A\rangle$

Donc $\langle .,.\rangle$ est symétrique.

* $\langle A+\lambda B, C\rangle = Tr({}^t(A+\lambda B)C)$

$= Tr({}^tAC + \lambda\,{}^tBC)$

$= Tr({}^tAC) + \lambda Tr({}^tBC)$ par linéarité de la trace.

$\langle A+\lambda B, C\rangle = \langle A,C\rangle + \lambda\langle B,C\rangle$

Donc $\langle .,.\rangle$ est linéaire à gauche et par symétrie $\langle .,.\rangle$ est bilinéaire.

* On a $\langle A,A\rangle = Tr({}^tAA)$

Or si l'on note $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$,

Pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$,

$({}^tAA)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} ({}^tA)_{ik}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ki}a_{kj}$

Donc $Tr({}^tAA) = \sum_{j=1}^{p} ({}^tAA)_{jj} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p} a_{kj}^2 \geqslant 0$. Donc $\langle .,.\rangle$ est bien positif.

* On suppose $\langle A,A\rangle = 0$.

Alors, par somme nulle de réels positifs, pour tout $(k,j)\in[\![1,p]\!]^2$,

$a_{kj}^2 = 0$ donc $a_{kj} = 0$.

D'où $A = 0$.

Ainsi $\langle .,.\rangle$ est défini, donc c'est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

b) * On reprend la question (Q12 - c) avec $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = Tr({}^tAM)$

* Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

Il suffit donc de poser $\tilde{A} = {}^tA$ et le résultat souhaité est obtenu.

IMPRIMERIE NATIONALE – 2021-12-PF 018 751