Copie anonyme - n°anonymat : 542585

A7-00082 542585 Maths S

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 22

Session : 2023

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Exercice 1 :

1) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$

Soit $t \in [k, k+1]$, alors $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

alors $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt$ par croissance de l'intégrale

alors $\frac{1}{k+1} [t]_k^{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} [t]_k^{k+1}$

alors $\underline{\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

D'après la 1) a) : $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

alors $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$

alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq S_n - \frac{1}{n}$

Donc $\underline{S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt \leq S_n - \frac{1}{n}}$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

D'après la b) $-\int_1^n \frac{1}{t} dt - 1 \leq -S_n \leq -\int_1^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$

Donc $\int_1^n \frac{1}{t} dt + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt + 1$

Or $\int_1^n \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^n = \ln(n)$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

D'où $\ln(n) + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln(n) + 1$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

D'après la c), on a : $1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{S_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$ car $\begin{cases} \ln(n) \neq 0 \\ \ln(n) > 0 \end{cases}$ (car $n > 1$)

Or $\begin{cases} 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \\ 1 + \frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \end{cases}$

D'après le théorème des gendarmes : $\frac{S_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Donc $\boxed{S_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)}$

2) a) L'appel rang(50) donne le plus petit indice n tel que $S_n \geq 50$

b) Nous obtiendrons toujours le plus petit indice n tel que $S_n \geq 50$...

3) a) Soient $x \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0,x]$

On a : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}}$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in]0,1[$, $t \in [0,x]$

D'après la 3) a) : $\int_0^x \sum_{k=1}^{n} t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{t^k}{k}\right]_0^x = [-\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$

c) Soient $x \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$,

On a : $\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{1-t}\,dt$ $\left(\text{car} \begin{cases} \forall t \in [0,x], \frac{1}{1-t} > 0 \\ \forall t \in [0,x]\ t^n \leq x^n \end{cases}\right)$

$= x^n \left[-\ln(1-t)\right]_0^x$

$= -x^n \ln(1-x)$

De plus $\forall t \in [0,x]$ $\frac{t^n}{1-t} \geq 0$ donc $\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \geq 0$

Donc $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leq -x^n \ln(1-x)$

Or $|x| < 1$, donc $x^n \times \underbrace{(-\ln(1-x))}_{\in \mathbb{R}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

D'après la 3) b) on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x) = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

D'après la 3) c) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(1-x)$

Conclusion : $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Exercice 2 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$

On a : $\mathbb{P}(Z_n \leq x) = \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x)$
$$= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) > x)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \geq x)$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i \geq x]\right)$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \geq x)$$ car les $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variable mutuellement indépendante
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(X_i < x))$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(X_i \leq x))$$

On $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $X_i \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$

On note G la fonction de répartition de X_1

On a $G : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Donc $\mathbb{P}(Z_n \leq x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - G(x))$
$$= 1 - (1 - G(x))^n$$

Donc $\boxed{F_n(x) = \begin{cases} 1 - (1-0)^n = 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 - (1-1)^n = 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$

b) F_n est continue sur $]-\infty, 0[$ sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$

De plus $\begin{cases} F_n(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 = F_n(0) \\ F_n(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} 1 = F(1) \end{cases}$

Donc F_n est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$ et même $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0 et 1

Donc <u>Z_n est une variable aléatoire à densité</u>

Copie anonyme - n°anonymat : 542585

Soit $x \in \mathbb{R}$

c) F_n est dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc $\forall x \notin [0,1]$, $F_n'(x) = 0$

De plus $\forall x \in [0,1]$, $F_n'(x) = n(1-x)^{n-1}$

Donc $f_n : x \mapsto \begin{cases} n(1-x)^{n-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de Z_n

2) Voici la ligne manquante : return min(random(10))

3) Soit $x \in]0,1[$, soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

On a : $F_n(x) = 1-(1-x)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ car $|1-x| < 1$

De plus $F_n(1) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

$F_n(0) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\forall x < 0$, $F_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$\forall x > 1$, $F_n(x) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

On pose $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ (F_n est pas continue en 0 donc la limite de F_n en 0 n'importe pas)

Soit Y une variable aléatoire qui admet F comme fonction de répartition. alors

Alors $Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} Y$ où Y est la variable aléatoire certaine égale à 0

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

On a : $\mathbb{P}(Z_n = X_n) = \mathbb{P}(\inf(X_1, \dots, X_n) = X_n)$
$= \mathbb{P}(X_n \leq \inf(X_1, \dots, X_{n-1}))$
$= \mathbb{P}(X_n \leq Z_{n-1})$
$= \mathbb{P}(0 \leq Z_{n-1} - X_n)$

Or $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$ et Z_{n-1} est independante de X_n
D'après l'énoncé g_{n-1} est une densité de $Z_{n-1} - X_n$ car $Z_{n-1} - X_n$ suit la même loi que $Z_{n-1} - U$

Donc $\mathbb{P}(Z_n = X_n) = \int_0^{+\infty} g_{n-1}(x)\,dx$
$= \int_0^1 (1-x)^{n-1}\,dx$
$= \left[-\frac{(1-x)^n}{n}\right]_0^1$
$= -\frac{(1-1)^n}{n} + \frac{(1-0)^n}{n}$
$= \frac{1}{n}$

D'où $\mathbb{P}(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$

b) Supposons par l'absurde que T_n est à densité
Alors $\mathbb{P}(T_n = 0) = 0$
Alors $\mathbb{P}(Z_n - X_n = 0) = 0$
Alors $\mathbb{P}(Z_n = X_n) = 0$
Ce qui est absurde d'après la 4)a)

Donc T_n n'est pas à densité.

c) Voici une fonction qui convient :

```
def VarT(n):
    S = random(n)                          # S est un vecteur avec n simulation de U(]0;1[)
    t = min(random(n)) - S[n-1]            # t prend la valeur du minimum de S
    return t                               # moins la valeur de la dernière
                                           # simulation.
```

5) a) T_{500} ne semble pas discrète car son support ne semble pas fini d'après le graphique.

b) Oui $\boxed{\text{c'est cohérent}}$ voici pourquoi :

~~Z_n Converge en loi vers la variable certaine égale à 0~~

La probabilité que $T_{500} = Z_{500} - X_{500}$ soit égale à 0 est de $\frac{1}{500}$ (d'après la 4)a))

Donc en moyenne lors de 20 000 simulations T_{500} devrait prendre $\frac{20\,000}{500} = 50$ fois la valeur 0

Or l'histogramme nous montre que T_{500} a bien pris 50 fois la valeur 0.

Problème

Préliminaire :

1) On a : $\dim(E^*) = \dim(\mathcal{L}(E, \mathbb{R}))$
$= \dim(E) \times \dim(\mathbb{R})$
$= \dim(E)$ car $\dim(\mathbb{R}) = 1$

Donc $\boxed{\dim(E^*) = \dim(E)}$

2) Soit $\varphi \in E^*$

a) On a : $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

Donc $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathbb{R}$
Or $\dim(\mathbb{R}) = 1$
Donc $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) \leq 1$

Donc $\boxed{\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = 1 \text{ ou } \dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = 0}$

b) Si $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = 0$ alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \{0_{\mathbb{R}}\}$
donc $\forall u \in E$, $\varphi(u) = 0$
donc φ est nulle

Si $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = 1$ étant donné que $\dim(\mathbb{R}) = 1$
On a : $\begin{cases} \dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = \dim(\mathbb{R}) \\ \mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R} \end{cases}$

Donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}$
Donc φ est surjective.

$\boxed{\text{Conclusion : } \varphi \text{ est soit nulle soit surjective.}}$

Copie anonyme - n°anonymat : 542585

Emplacement QR Code	Code épreuve : 295	Nombre de pages : 22	Session : 2023
	Épreuve de : MATHEMATIQUES		

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

c) φ n'est pas l'application nulle
donc $0 < \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$
donc $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 1$

D'après le théorème du rang $\dim(E) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathbb{R})$
$= \dim(\ker(\varphi)) + 1$

Donc $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(E) - 1 = n-1$
De plus $\ker(\varphi)$ est un sous espace vectoriel de E
Donc $\boxed{\ker(\varphi) \text{ est un hyperplan de } E}$

Partie II

3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$
a) Soit $P \in \mathbb{R}_p[x]$, on a : $g(P) = \int_0^1 P(t)dt \in \mathbb{R}$
Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_p[x]^2$
On a : $g(\lambda P + Q) = \int_0^1 (\lambda P + Q)(t)dt = \int_0^1 \lambda P(t) + Q(t) dt$
$= \lambda \int_0^1 P(t)dt + \int_0^1 Q(t)dt$
$= \lambda g(P) + g(Q)$

Donc $\boxed{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_p[x], \mathbb{R}) = E^*}$

b) On a : $\dim(\mathbb{R}_p[x]) = p+1$
Or $g \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_p, \mathbb{R})}$ car $g(1) = 1$

D'après la 2) c) $\boxed{\dim(\ker(g)) = p}$

c) Soit $k \in [\![1,p]\!]$

On a : $g(Q_k) = \int_0^1 x^k - \frac{1}{k+1} dx = \int_0^1 x^k dx - \int_0^1 \frac{1}{k+1} dx$

$= \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right] - \frac{1}{k+1}$

$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1}$

$= 0$

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $Q_k \in \ker(g)$

De plus les degrés des polynomes de la famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ sont 2 à 2 distincts (car $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\deg(Q_k) = k$) donc $(Q_1, \dots, Q_p)$ est libre.

Donc $\begin{cases} \forall k \in [\![1,p]\!], Q_k \in \ker(g) \\ (Q_1, \dots, Q_p) \text{ est libre} \\ \#(Q_1, \dots, Q_p) = p = \dim(\ker(g)) \end{cases}$

Donc $\boxed{(Q_1, \dots, Q_p) \text{ est une base de } \ker g}$

4) Soit $p \in \mathbb{N}^*$

a) Soit $P \in \mathbb{R}_p[x]$, on a : $f(P) = P(0) \in \mathbb{R}$

Soit $(\lambda, P, Q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_p[x]^2$, $f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(0)$

$= \lambda P(0) + Q(0)$

$= \lambda f(P) + f(Q)$

Donc $\boxed{f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_p[x], \mathbb{R}) = E^*}$

b) On a $f(1) = 1$ donc $f \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_p[x], \mathbb{R})}$, donc :

D'après la 2) c), $\dim(\ker(f)) = \dim(\mathbb{R}_p[x]) - 1 = p + 1 - 1 = p$

De plus $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $f(X^k) = 0^k = 0$

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $X^k \in \ker f$

De plus les degrés des polynomes de la famille $(X^1, \dots, X^p)$ sont 2 à 2 distincts (car $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\deg(X^k) = k$), donc $(X, \dots, X^p)$ est libre

Donc $\begin{cases} \forall k \in [\![1,p]\!], X^k \in \ker(f) \\ (X, \dots, X^p) \text{ est libre} \\ \#(X, \dots, X^p) = p = \dim(\ker(f)) \end{cases}$

Donc $(X^1, \dots, X^p)$ est une base de $\ker(f)$

Donc $\boxed{\ker(f) = \text{vect}(X, \dots, X^p)}$

5) a) f et g sont non nuls donc d'après la 2) c)

$\dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g)) = \dim(E^*) - 1 = n - 1$

Donc $\begin{cases} \dim(\ker(f)) = \dim(\ker(g)) \\ \ker(f) \subset \ker(g) \end{cases}$

Donc $\boxed{\ker(f) = \ker(g)}$

b) Supposons par l'absurde la négation du prédicat de l'énoncé "$\exists x_0 \in E \mid f(x_0) \neq 0$"

Ainsi $\forall x_0 \in E$, $f(x_0) = 0$

donc f est une forme linéaire nulle ce qui est absurde d'après l'énoncé.

Donc $\boxed{\exists x_0 \in E \text{ tel que } x_0 \notin \ker(f)}$

c) • On a vu dans la 5) a) que $\dim(\ker(f)) = n-1$

Nécessairement $x_0 \neq 0$ car sinon on aurait $x_0 = 0$ donc $x_0 \in \ker f$ ce qui est absurde.
Donc $\dim(\text{vect}(x_0)) = 1$ (car $x_0 \neq 0$)

Donc $\dim(\text{vect}(x_0)) + \dim(\ker(f)) = n-1+1 = n = \dim E$ (1)

• Soit $x \in \ker(f) \cap \text{vect}(x_0)$, supposons par l'absurde $x \neq 0$
Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*, x = \lambda x_0$ et $f(x) = 0$
Alors $f(\lambda x_0) = 0$
Alors $\lambda f(x_0) = 0$ or $\lambda \neq 0$ donc $f(x_0) = 0$
donc $x_0 \in \ker(f)$ ce qui est absurde
Donc $x = 0$
Donc $(\ker(f) \cap \text{vect}(x_0)) \subset \{0_E\}$ Or $0_E \in \ker(f) \cap \text{vect}(x_0)$
Donc $\ker(f) \cap \text{vect}(x_0) = \{0_E\}$ (2)

Donc d'après (1) et (2) on a : $\boxed{E = \ker(f) \oplus \text{vect}(x_0)}$

d) Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une base de $\ker(f)$
Soit $i \in [\![1, p]\!]$, $h(x_i) = g(x_0)f(x_i) - f(x_0)g(x_i)$
$= -f(x_0)g(x_i)$ car $x_i \in \ker(f)$
$= 0$ car $\ker f = \ker g$ donc $x_i \in \ker g$

Soit $x \in \text{vect}(x_0)$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $x = \lambda x_0$
Alors $h(x) = h(\lambda x_0) = \lambda h(x_0) = \lambda(g(x_0)f(x_0) - f(x_0)g(x_0))$
$= \lambda \times 0$
$= 0$

Or d'après la 5) c) $E = \ker(f) \oplus \text{vect}(x_0)$
Donc $(x_0, x_1, \dots, x_p)$ est une base de E

Soit $x \in E$ alors $\exists! (\lambda_0, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i x_i$
Alors $h(x) = h\left(\sum_{i=0}^{p} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h(x_i) = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i \times 0 = 0$ (d'après ci-dessus)

Copie anonyme - n°anonymat : 542585

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : | Session : 2023

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Emplacement QR Code

Donc $\forall x \in E$, $h(x)=0$

Donc $\boxed{h \text{ est nulle}}$

e) Soit $x \in E$,

On a : $h(x)=0$

Donc $g(x_0)f(x) - f(x_0)g(x)=0$

Donc $g(x)f(x_0) = g(x_0)f(x)$

Or $x_0 \notin \ker f$ donc $f(x_0) \neq 0$

Donc $g(x) = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} f(x)$

Conclusion : $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont colinéaires.}}$

Partie II]

6) a) $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H.

Donc $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre de vecteurs de E.

D'après le théorème de la base incomplète (rappelé dans l'énoncé), on peut compléter cette famille en une base de E

De plus $\begin{cases} \dim(e_1, \dots, e_{n-1}) = n-1 \\ \dim(E) = n \end{cases}$

Il existe donc un vecteur e_n de E tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

~~b) Vérifions que φ est une forme linéaire~~

~~Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E^2$~~

~~Alors $\exists ! (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$~~

~~• Premièrement : $\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = x_n \in \mathbb{R}$~~

~~Donc φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$~~

~~• Deuxièmement $\varphi(\lambda x$~~

~~• Premièrement : $\varphi(\lambda x + y) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \lambda$~~

b) Soit $x \in E$, $\exists ! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Donc $\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = x_n \in \mathbb{R}$

Donc φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$ de plus tous les e_i (avec i dans $[\![1, n]\!]$) ont été définies dans la 6) a)

Donc $\boxed{\text{cette définition est correcte}}$.

$$\begin{cases} (e_1, \dots, e_{n-1}) \text{ est une base de } H \text{ donc cette famille est libre} \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!], \ \varphi(e_i) = 0 \ \text{ i.e } e_i \in \ker \varphi \\ \#(e_1, \dots, e_{n-1}) = n-1 = \dim(\ker(\varphi)) \ \text{(d'après la 2) c))} \end{cases}$$

Donc $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de $\ker(\varphi)$ et de H

Donc $\begin{cases} \ker(\varphi) = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \\ H = \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) \end{cases}$

Donc $\boxed{H = \ker \varphi}$

7) Procédons par double inclusion :

• Soit $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0_{\mathbb{R}^p}$

alors $(f_1(x), \dots, f_p(x)) = 0_{\mathbb{R}^p}$

alors $\forall i \in [\![1,p]\!], f_i(x) = 0$

alors $\forall i \in [\![1,p]\!], x \in \ker(f_i)$

Donc $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)$

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)$ alors $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$

$= (0, \dots, 0)$ car $\forall i \in [\![1,p]\!], x \in \ker(f_i)$

$= 0_{\mathbb{R}^p}$

Donc $x \in \ker(f)$

Donc $\boxed{\ker(f) = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)}$

8) a)

On a que : $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^p)$ est surjective et $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^p$

Par définition de la surjectivité, il existe un $x \in E$ tel que $f(x) = \varepsilon_1$

$\boxed{\text{Donc } \varepsilon_1 \text{ admet un antécédent } x \text{ par } f.}$

b) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = 0$ (3)

~~dont on a prouvé l'existence en 8)a)~~

~~Alors $f(x)$~~

Soit $i \in [\![1,p]\!]$, f est surjective donc il existe $x_i \in E$ tel que $f(x_i) = \varepsilon_i$ i.e $\forall j \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}, f_j(x_i) = 0$ et $f_i(x_i) = 1$

Evaluons l'égalité (3) en x_i

Alors $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k(x_i) = 0$ alors $\lambda_i f_i(x_i) = 0$ alors $\lambda_i = 0$

Donc $\forall i \in [\![1,p]\!], \lambda_i = 0$
Donc $\boxed{(f_1, \dots, f_p) \text{ est libre dans } E^*}$

9) a)

Or a : $Im(f) \subset \mathbb{R}^p$
Donc $\dim(Im(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^p)$
Or f n'est pas surjective donc $Im(f) \neq \mathbb{R}^p$
donc $\dim(f) \neq \dim(\mathbb{R}^p)$

Donc $\dim(Im(f)) < \dim(\mathbb{R}^p) = p$

Donc $\boxed{\dim(Im(f)) = m \in [\![0, p]\!]}$

b) D'après le théorème de la base incomplète on peut compléter une base $(e_1, \dots, e_m)$ de $Im(f)$ avec les vecteurs $(e_{m+1}, \dots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$ pour que $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de $\mathbb{R}^p$.

On note $H = vect(e_1, \dots, e_{p-1})$
H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$ (car $(e_1, \dots, e_{p-1})$ est libre i.e $\dim H = p-1$)

Soit $x \in Im(f)$, $\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \mid x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i$

$= \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_m e_m + 0 \times e_{m+1} + \dots + 0 \times e_{p-1}$

Donc $x \in vect(e_1, \dots, e_{p-1}) = H$

Donc $\boxed{Im(f) \subset H \text{ où } H \text{ est un hyperplan de } \mathbb{R}^p}$

c)
Nous passons la question et nous admettons le résultat

Code épreuve : 295 | Nombre de pages : 22 | Session : 2023

Épreuve de : MATHEMATIQUES

Consignes
- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroter chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

10)a) Nous passons la question et admettons le résultat

b) D'après la 10)a), f est surjective, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^p$
Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = p$
D'après le théorème du rang : $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$
$= \dim(\ker(f)) + p$

Donc $\dim(\ker(f)) = \dim(E) - p = n - p$

Or d'après la 7), $\ker(f) = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)$

Donc $\dim(\ker(f)) = \dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)\right)$

Donc $\boxed{\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker(f_i)\right) = n - p}$

Partie III]

11) Soit $a \in E$

a) Soit $(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E^2$

- On a : $f_a(x) = \langle a, x \rangle \in \mathbb{R}$ car $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire
- De plus $f_a(\lambda x + y) = \langle a, \lambda x + y \rangle$

$$= \langle a, \lambda x \rangle + \langle a, y \rangle \quad \text{(linéarité à droite du produit scalaire)}$$
$$= \lambda \langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle$$
$$= \lambda f_a(x) + f_a(y)$$

Donc $\boxed{f_a \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E^*}$

b) On pose $A = \text{vect}(a)$, · supposons $a \neq 0$

On a : $\dim(A^\perp) = \dim(E) - \dim(A) = n - 1$ car $a \neq 0$ donc $\dim(\text{vect}(a)) = 1$

Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $A^\perp$

$\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $f_a(e_i) = \langle a, e_i \rangle = 0$ car $e_i \in \text{vect}(a)^\perp$

i.e. $e_i \in \ker(f_a)$

De plus $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre et $\#(e_1, \dots, e_{n-1}) = n - 1$ $= \dim(\ker f_a)$ d'après le 2)c)

Donc $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de $\ker(f_a)$

Donc $\ker(f_a) = \text{vect}(a)^\perp$

· supposons $a = 0$ alors $\forall x \in E$, $f_a(x) = \langle a, x \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$

Donc $\ker(f) = E = \text{vect}(0)^\perp = \text{vect}(a)^\perp$

Conclusion : $\boxed{\ker(f_a) = \text{vect}(a)^\perp}$

c) Supposons que l'application est nulle
Alors $f_a(a) = 0$
Alors $\langle a, a \rangle = 0$
Donc $\boxed{a = 0_E}$ car $\langle \cdot \rangle$ est défini

12)
a) Soit $(\lambda, a, b) \in \mathbb{R} \times E^2$, soit $x \in E$

Alors $\phi(\lambda a + b)(x) = f_{\lambda a + b}(x) = \langle \lambda a + b, x \rangle$
$= \lambda \langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle$ (linéarité à gauche du produit scalaire)
$= \lambda f_a(x) + f_b(x)$
$= \lambda \phi(a)(x) + \phi(b)(x)$

Donc $\boxed{\phi \text{ est linéaire.}}$

b) Soit $a \in E$
$a \in \ker \phi \Leftrightarrow \phi(a) = 0_{E^*} \Leftrightarrow f_a$ est nulle

D'après la 11) c) si f_a est nulle alors $a = 0_E$. De plus si $a = 0_E$ alors $\forall x \in E$, $f_a(x) = \langle 0, x \rangle = 0$ i.e f_a est nulle

Donc $a \in \ker(\phi) \Leftrightarrow a = 0_E$
Donc $\ker(\phi) = \{0_E\}$
Donc $\underline{\phi \text{ est injective.}}$

D'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}(\phi)) = \dim(E) - \dim(\ker(\phi))$
$= n - 0$
$= n$
$= \dim(E^*)$ (d'après la 1))

Or $\mathrm{Im}(\phi) \subset E^*$
Donc $\mathrm{Im}(\phi) = E^*$
Donc $\underline{\phi \text{ est surjective}}$

Donc $\boxed{\phi \text{ est un isomorphisme de } E \text{ sur } E^*}$

c) D'après la 12) b) ϕ est bijective de E sur E^*

Soit $\varphi \in E^*$,
De par la bijectivité de ϕ, il existe un unique a dans E tel que $\phi(a) = \varphi$
De plus $\forall x \in E$, $\phi(a)(x) = f_a(x) = \langle a, x \rangle$
Donc $\forall x \in E$ $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$

En résumé : $\boxed{\exists ! a \in E \mid \forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle}$

13) Soit $p \in \mathbb{N}^*$
a) Soit $(\lambda, A, B, C) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^3$ où $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p,1} & \cdots & b_{p,p} \end{pmatrix}$

- On a : $\langle A, B \rangle = tr({}^tAB) \in \mathbb{R}$
- On a : $\langle \lambda A + C, B \rangle = tr[{}^t(\lambda A + C) \times B]$
$= tr(\lambda {}^tAB + {}^tCB)$

Démonstration linéarité de la trace $tr(\lambda A + B) = tr\left(\begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,p} + b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{p,1} + b_{p,1} & \cdots & \lambda a_{p,p} + b_{p,p} \end{pmatrix}\right)$

$$= \sum_{i=1}^{p} (\lambda a_{i,i} + b_{i,i})$$
$$= \lambda \sum_{i=1}^{p} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{p} b_{i,i}$$
$$= \lambda\, tr(A) + tr(B)$$

Donc $\langle \lambda A + C, B \rangle = \lambda\, tr({}^tAB) + tr({}^tC B)$
$= \lambda \langle A, B \rangle + \langle B, C \rangle$
Donc $\langle \cdot \rangle$ est linéaire à gauche

De plus $\langle A, B \rangle = tr({}^tAB) = tr({}^t({}^tAB))$ (car les coefficients diagonaux de ${}^tAB$ et ${}^t({}^tAB)$ sont égaux)
$= tr({}^tB\, {}^t({}^tA))$
$= tr({}^tBA)$
$= \langle B, A \rangle$
Donc $\langle \cdot \rangle$ est symétrique.

Donc aussi linéaire à droite, donc bilinéaire

De plus $\langle A, A\rangle = tr({}^tAA)$

$$= tr\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{p,1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,p} & \cdots & a_{p,p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,p}\end{pmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} a_{i,1}^2 & & (*) \\ & \ddots & \\ (*) & & \sum_{i=1}^{p} a_{i,p}^2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}^2 \geq 0$$

Donc $\langle \cdot \rangle$ est positif.

De plus $\langle A, A\rangle = 0 \iff \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} a_{i,j}^2 = 0$

$\iff \forall j \in [\![1,p]\!] \sum_{i=1}^{p} a_{i,j}^2 = 0$ car une somme de termes positifs est nulle ssi tous ses termes sont nuls

$\iff \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, a_{i,j}^2 = 0$ //

$\iff \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, a_{i,j} = 0$

$\iff A = 0_p$

Donc $\langle \cdot \rangle$ est défini

Donc $\boxed{\langle \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

13)b)

D'après la 12)c), $\exists ! A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \varphi(M) = \langle A, M \rangle$
$= tr({}^tAM)$

Cependant le résultat attendu est l'existence d'une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = tr({}^tAM)$

Ainsi il faudrait montrer que A est symétrique pour aboutir...

FIN

/