On rappelle que, pour tout nombre réel x :

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

1) On note ϕ l'application de $[-1,1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall t \in [-1,1] \quad : \qquad \phi(t) = 3t - 4t^3$$

a) Démontrer que : $\forall t \in [-1,1], \quad \phi(t) \in [-1,1]$.

b) Etablir que, pour tout couple (t,t') d'éléments de $[-1,1]$:

$$|\phi(t) - \phi(t')| \leqslant 9\,|t - t'|$$

2) On définit une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions numériques par : $f_1(x) = x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad f_n(x) = 3f_{n-1}(\frac{x}{3}) - 4\left(f_{n-1}(\frac{x}{3})\right)^3$$

Ecrire une fonction PASCAL, dont l'entête est :

```
function f(n :integer ;x :real) :real ;
```

et qui fournit la valeur de $f_n(x)$

3) Prouver que :

$$\forall x \in [-1,1] \quad \forall n \in \mathbf{N}^* : \quad |f_n(x) - \sin x| \leqslant \frac{|x|^3}{2.3^n}$$

Que peut-on en conclure ?

Q1. a) Soit $t \in [-1,1]$. $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $\sin\theta = t$

$\phi(t) = 3t - 4t^3 = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta \in [-1,1]$.

Donc $\underline{\underline{\forall t \in [-1,1],\ \phi(t) = 3t - 4t^3 \in [-1,1]}}$.

b) Utilisons l'inégalité des accroissements finis.

ϕ est deux fois dérivable sur $[-1,1]$ (ϕ est polynomiale)

$\forall t \in [-1,1]$, $\phi'(t) = 3 - 12t^2$ et $\phi''(t) = -24t$

ϕ' est croissante sur $[-1,0]$ et décroissante sur $[0,1]$.

$\forall t \in [-1,0]$, $\phi'(-1) \leq \phi'(t) \leq \phi'(0)$; soit $\forall t \in [-1,0]$, $-9 \leq \phi'(t) \leq 3$

$\forall t \in [0,1]$, $\phi'(1) \leq \phi'(t) \leq \phi'(0)$; soit $\forall t \in [0,1]$, $-9 \leq \phi'(t) \leq 3$

Par conséquent : $\forall t \in [-1,1]$, $|\phi'(t)| \leq 9$

Donc $\underline{\underline{\forall (t,t') \in [-1,1]^2,\ |\phi(t) - \phi(t')| \leq 9\,|t - t'|}}$

Q2. $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f_{n+1}(x) = \phi(f_n(x/3))$ permet une version récursive simple.

Par récurrence : $\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (\underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{n-1 \text{ fois}})(x/3^{n-1}) = \phi^{n-1}\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right)$ ... qui se prête à une bonne version itérative.

```
program edhec93;
uses crt;
var n:integer;x,s:real;
function g(a:real):real;
begin
g:=3*a-4*a*a*a
end;
function f1(m:integer;y:real):real;      VERSION ITERATIVE  (fonction f1)
var k:integer;b:real;
begin
m:=m-1;b:=y/exp(m*ln(3));
for k:=1 to m do
b:=g(b);
f1:=b;
end;
function f(m:integer;y:real):real;       VERSION RECURSIVE  (fonction f)
begin
if m=1 then f:=y
else f:=g(f(m-1,y/3))
end;
begin
clrscr;
write('Introduisez la valeur de N ');readln(n);
Write('Donnez la valeur de X ');readln(x);
writeln('Version 1 (méthode récursive) : SIN(X) vaut : ',f(n,x));
writeln('Version 2 (méthode itérative) : SIN(X) vaut : ',f1(n,x))
end.
```

```
Introduisez la valeur de N 50
Donnez la valeur de X 0.785398163
Version 1 (méthode récursive) : SIN(X) vaut :  7.0710678088E-01
Version 2 (méthode itérative) : SIN(X) vaut :  7.0710678096E-01
```

Q3 Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1,1], f_n(x) \in [-1,1]$ et $|f_n(x) - \sin x| \leq \dfrac{|x|^3}{2 \times 3^n}$.

(C'est mieux que : $\forall x \in [-1,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$)

- Montrons la propriété pour $n=1$.

Il nous faut montrer que : $\forall x \in [-1,1], |x - \sin x| \leq \dfrac{|x|^3}{6}$ (davantage $\forall x \in [-1,1], f_1(x) = x \in [-1,1]$)

Les fonctions $x \mapsto |x - \sin x|$ et $x \mapsto \dfrac{|x|^3}{6}$ étant impaires il suffit de prouver que :

$\forall x \in [0,1], |x - \sin x| \leq \dfrac{|x|^3}{6} = \dfrac{x^3}{6}$.

Montrons en fait que : $\forall x \in [0,1], 0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$

V1 deux études de fonctions ... sans problème.

V2. Par intégration.

$\forall u \in [0,1], 0 \leq \int_0^u \cos t \, dt \leq \int_0^u dt$

$\forall u \in [0,1], 0 \leq \sin u \leq u$

$\forall v \in [0,1], 0 \leq \int_0^v \sin u \, du \leq \int_0^v u \, du$

$\forall v \in [0,1], 0 \leq 1 - \cos v \leq \dfrac{v^2}{2}$

$\forall x \in [0,1], 0 \leq \int_0^x (1 - \cos v) \, dv \leq \int_0^x \dfrac{v^2}{2} \, dv$

$\forall x \in [0,1], 0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$; ce qui achève l'initialisation de la récurrence.

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons la pour $n+1$

$f_{n+1}(x) = \phi(f_n(\frac{x}{3}))$ pour tout $x \in [-1,1]$. On a encore $\forall x \in [-1,1]$, $\sin x = \phi(\sin \frac{x}{3})$.

$\forall x \in [-1,1]$, $\frac{x}{3} \in [-1,1]$ donc $\forall x \in [-1,1], f_n(\frac{x}{3}) \in [-1,1]$ (H.R)

Par conséquent : $\underline{\forall x \in [-1,1]}$, $\underline{f_{n+1}(x) = \phi(f_n(\frac{x}{3})) \in [-1,1]}$ car $[-1,1]$ est stable par ϕ d'après 1° a)

De plus : $\forall x \in [-1,1]$, $|\phi(f_n(\frac{x}{3})) - \phi(\sin\frac{x}{3})| \leq 9 |f_n(\frac{x}{3}) - \sin\frac{x}{3}|$ (car $\forall x \in [-1,1]$, $f_n(\frac{x}{3}) \in [-1,1]$ et $\sin\frac{x}{3} \in [-1,1]$)

donc : $|f_{n+1}(x) - \sin x| = |\phi(f_n(\frac{x}{3})) - \phi(\sin\frac{x}{3})| \leq 9 |f_n(\frac{x}{3}) - \sin\frac{x}{3}| \overset{H.R}{\leq} 9 \times \dfrac{|x/3|^3}{2 \times 3^n}$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Par conséquent : $\forall x \in [-1,1], |f_{n+1}(x) - \sin x| \leq 9 \times \dfrac{|x|^3}{27 \times 2 \times 3^n} = \dfrac{|x|^3}{2 \times 3^{n+1}}$ ce qui achève la récurrence.

$\forall x \in [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(x) - \sin x| \leq \dfrac{|x|^3}{2 \times 3^n}$

Ceci montre en particulier que : $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \sin x$ car : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{|x|^3}{2 \times 3^n} = 0$

Notons encore que $f_n(x)$ est une valeur approchée de $\sin x$ à $\dfrac{|x|^3}{2 \times 3^n}$ près.

Terminons par un programme en japonais.

```
"X" ? → X : "N" ? → N : N-1 → N : X ÷ 3 x^y N → X : Lbl 0 : 3X - 4 X x² → X :
Dsz N : Goto 0 : X ◢
```

A l'exécution	N = 5	0,707 115 484
pour X = $\frac{\pi}{4}$	N = 10	0,707 106 781
	N = 15	0,707 106 781
	N = 20	" " "
	N = 100	" " "
	N = 1000	BOUM ! (M ERROR...)

Encore une petite remarque ou un petit exercice.

$\underline{f_n(x) = \sin(3^{n-1} \operatorname{Arc\,sin} \frac{x}{3^{n-1}})}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-1,1]$ (récurrence simple)

Ce qui permet de prouver que : $f_n(x) - \sin x \sim \frac{3}{2} x^3 \cos x \dfrac{1}{9^n}$ ... convergence rapide.

Q1.. Notons avant de commencer que $AX=0$ signifie que :

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(k+i-1)!} = 0$ (la $i^{\text{ème}}$ ligne de A est : $\left[\frac{1}{i!}, \frac{1}{(i+1)!}, \dots, \frac{1}{(i+n-1)!}\right]$)

a) Ne surtout pas utiliser Leibniz !

$\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(n+k-1)!}\, t^{k-1}$ donc $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(n+k-1)!}\, t^{n+k-1}$

Évidemment alors : $\forall p \in [\![0,n-1]\!], \forall t \in \mathbb{R},\ f^{(p)}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(n+k-1)!}(n+k-1)(n+k-2)\cdots\underbrace{(n+k-1-p+1)}_{n+k-p}\, t^{n+k-1-p}$

soit : $\forall p \in [\![0,n-1]\!], \forall t \in \mathbb{R},\ f^{(p)}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(n+k-1)!} \times \frac{(n+k-1)!}{(n+k-p-1)!}\, t^{n+k-1-p}$

Donc $\forall p \in [\![0,n-1]\!],\ f^{(p)}(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(n+k-p-1)!}$.

Voir plus haut !

En posant $i = n-p$, on obtient : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ f^{(n-i)}(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(k+i-1)!} = 0$

ce qui signifie que : $f^{(n-1)}(1) = 0,\ f^{(n-2)}(1) = 0, \dots, f'(1) = 0,\ f(1) = 0$

Donc $f(1) = f'(1) = \dots = f^{(n-1)}(1) = 0$.

b) f est un polynôme et 1 est un zéro d'ordre au moins n de f car $f(1) = f'(1) = \dots = f^{(n-1)}(1) = 0$ donc $(X-1)^n$ divise $f = X^n P$.

Par conséquent $(X-1)^n$ divise P (1 n'est pas racine de X^n !)

Donc 1 est un zéro d'ordre au moins n de P

Par conséquent : $P(1) = P'(1) = \dots = P^{(n-1)}(1) = 0$.

Remarque.. En toute rigueur deux cas sont à étudier pour obtenir ce résultat

1er cas.. $P \neq 0$ ... la démonstration vaut !

2e cas.. $P = 0$ ... le résultat est une évidence !

Q2.. $P(1) = P'(1) = \dots = P^{(n-1)}(1) = 0$ montre que $(X-1)^n$ divise P ; or le degré de P est au plus $n-1$, donc P est nul.

Ses coefficients $x_1, x_2, \dots,$ sont alors nuls.

Nous avons donc montré que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0 \Rightarrow X = 0$. A est inversible.

PARTIE I Q1 a) La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge donc la suite (H_n) diverge.

Remarquons que : $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ (sommes partielles associées à une série à termes positifs divergente).

La série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. $\forall t\in[0,x]$, $\frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{1}{1+t}(1-1-t+t+t^2) = \frac{t^2}{1+t} \geq 0$; $\forall t\in[0,x]$, $\frac{1}{1+t} \geq 1-t$

$\forall t\in[0,x]$, $\frac{1}{1+t} \leq 1$

Donc $\forall t\in[0,x]$, $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$. Intégrons : $\int_0^x (1-t)\,dt \leq \int_0^x \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^x dt$

Soit : $\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x \leq \left[\ln(1+t)\right]_0^x \leq \left[t\right]_0^x$; ou : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

Finalement : $\underline{\forall x\in\mathbb{R}_+,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$. (1)

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\frac{1}{k} - \frac{1/k^2}{2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\frac{k+1}{k} = \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

Par sommation : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(k+1) - \ln k\right] \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

Donc : $H_n - \frac{1}{2}S_n \leq \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \leq H_n$.

Soit : $1 \leq \frac{H_n}{\ln(n+1)} \leq 1 + \frac{1}{2\ln(n+1)} S_n$.

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2\ln(n+1)} S_n\right) = 0 \times \lim_{n\to+\infty} S_n = 0$ ($(S_n)_{n\geq1}$ converge)

Par encadrement : $\lim_{n\to+\infty}\frac{H_n}{\ln(n+1)} = 1$. $\underline{H_n \sim \ln(n+1)}$.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\ln n + \ln(1+1/n)}{\ln n}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right] = 1 \text{ ; } \underline{\ln(n+1) \sim \ln n}$$

Donc par transitivité : $\underline{H_n \sim \ln n}$ (quelle surprise).

Q2 a) $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}_+$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) = \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+x}{k}\right)\right] = \ln\left[\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+x)}{\prod_{k=1}^{n}k}\right] = \ln\frac{(x+1)(x+2)\cdots(n+x)}{n!} = \ln\frac{1}{g_n(x)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = -\ln g_n(x)$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, g_n(x) = e^{-f_n(x)}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$U_n = \int_0^{1/\sqrt{H_n}} e^{-f_n(x)} dx$ d'après l'égalité précédente.

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall k \in [\![1, n]\!], \ \frac{x}{k} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{k^2} \leq \ln(1+\frac{x}{k}) \leq \frac{x}{k}$ d'après (1)

Par sommation : $x H_n - \frac{1}{2}x^2 S_n \leq f_n(x) \leq x H_n$

(*) donc $e^{-xH_n} \leq e^{-f_n(x)} \leq e^{-xH_n + \frac{1}{2}x^2 S_n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

Récap : $\forall x \in [0, \frac{1}{\sqrt{H_n}}], \ e^{-xH_n} \leq e^{-f_n(x)} \leq e^{-xH_n + \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{H_n}})^2 S_n} = e^{\frac{S_n}{2H_n}} e^{-xH_n}$

En intégrant il vient alors : $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} e^{-xH_n} dx \leq U_n \leq e^{\frac{S_n}{2H_n}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} e^{-xH_n} dx$

c) Notons que : $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{H_n}}} e^{-xH_n} dx = \left[-\frac{1}{H_n} e^{-xH_n}\right]_0^{1/\sqrt{H_n}} = -\frac{1}{H_n} e^{-H_n/\sqrt{H_n}} + \frac{1}{H_n} = \frac{1}{H_n}(1 - e^{-\sqrt{H_n}})$

donc $\frac{1}{H_n}(1 - e^{-\sqrt{H_n}}) \leq U_n \leq e^{\frac{S_n}{2H_n}} \frac{1}{H_n}(1 - e^{-\sqrt{H_n}})$

ou $1 - e^{-\sqrt{H_n}} \leq H_n U_n \leq e^{\frac{S_n}{2H_n}}(1 - e^{-\sqrt{H_n}})$.

Rappelons que : $\lim_{n \to +\infty} H_n = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty}(1 - e^{-\sqrt{H_n}}) = 1$, $\lim_{n \to +\infty} e^{\frac{S_n}{2H_n}} = 1$ car $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

Par encadrement il vient : $\lim_{n \to +\infty}(U_n H_n) = 1$; soit : $U_n \sim \frac{1}{H_n}$ $\quad \left(\frac{U_n}{\frac{1}{H_n}} = U_n H_n \ldots\right)$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. (*) donne $\forall x \in \mathbb{R}_+, \ e^{-xH_n} \leq e^{-f_n(x)} \leq e^{\frac{1}{2}x^2 S_n} e^{-xH_n}$

donc $\forall x \in [\frac{1}{\sqrt{H_n}}, 1], \ 0 \leq e^{-f_n(x)} \underset{x^2 \leq 1}{\leq} e^{S_n/2} e^{-xH_n}$

donc $0 \leq V_n \leq \int_{1/\sqrt{H_n}}^1 e^{S_n/2} e^{-xH_n} dx = e^{S_n/2}\left[-\frac{1}{H_n} e^{-xH_n}\right]_{\frac{1}{\sqrt{H_n}}}^1 = \frac{e^{S_n/2}}{H_n}\left[-e^{-H_n} + e^{-\frac{1}{\sqrt{H_n}}H_n}\right]$

ou : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{H_n} e^{S_n/2}\left[e^{-\sqrt{H_n}} - e^{-H_n}\right] \leq e^{-\sqrt{H_n}} \frac{e^{S_n/2}}{H_n}$.

Finalement : $0 \leq V_n \leq e^{-\sqrt{H_n}} \dfrac{e^{S_n/2}}{H_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

e) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq H_n V_n \leq e^{-\sqrt{H_n}} e^{S_n/2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ converge donc $\lim\limits_{n\to+\infty} [e^{-\sqrt{H_n}} e^{S_n/2}] = 0$

Par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n V_n = 0$ ou : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{V_n}{1/H_n}\right) = 0$

Donc : $V_n = o\left(\dfrac{1}{H_n}\right)$.

Q3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = U_n + V_n$ $\dfrac{I_n}{1/H_n} = H_n U_n + H_n V_n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n U_n = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n V_n = 0$

Par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{I_n}{1/H_n}\right) = 1$. Donc : $I_n \sim \dfrac{1}{H_n} \sim \dfrac{1}{\ln n}$

Pour finir : $I_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$.

PARTIE 2 (Lire le texte original) LA DEMARCHE DE Q1 EST TRES IMPORTANTE

Q1. Analyse. Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x! = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, $n! = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(-j)$

Notons que les zéros de e_k sont $-1, -2, \dots, -(k-1), -(k+1), \dots, -n$

donc si $j \neq k$ (ou $k \neq j$) : $e_k(-j) = 0$

Finalement : $n! = \lambda_j e_j(-j) = \lambda_j \prod\limits_{\substack{i\neq j\\ 1\leq i\leq n}} (-j+i) = \lambda_j (-j+1)(-j+2)\dots(-j+(j-1))(-j+j+1)\dots(-j+n)$

$n! = \lambda_j (-j+1)(-j+2)\dots(-1) \cdot 1 \times 2 \times 3 \times \dots (n-j) = \lambda_j (-1)^{j-1} (j-1)(j-2)\dots 1 \times (n-j)! = (-1)^{j-1} (j-1)! (n-j)! \lambda_j$

donc $\lambda_j = \dfrac{n!}{(-1)^{j-1} (j-1)! (n-j)!} = (-1)^{j-1} n \dfrac{(n-1)!}{(j-1)! (n-j)!} = (-1)^{j-1} n \, C_{n-1}^{j-1}$

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_j = (-1)^{j-1} n \, C_{n-1}^{j-1} = \dfrac{n!}{e_j(-j)}$. Ceci montre l'unicité du n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

<u>Synthèse</u>.. Posons $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_j = (-1)^{j-1} n\, C_{n-1}^{j-1} = \dfrac{n!}{e_j(-j)}$. Montrons que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $n! = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$. Il s'agit de prouver l'égalité de deux fonctions polynômes de degré $\leq \underline{n-1}$; il suffit alors de montrer que ces deux polynômes coïncident en $\underline{n}$ points de $\mathbb{R}$, par exemple en $-1, -2, \dots, -n$.

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(-j) \underset{\substack{\uparrow \\ e_k(-j)=0 \text{ si } j \neq k}}{=} \lambda_j e_j(-j) = n!$$

Ceci achève de prouver l'existence de $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$!

Finalement : $\exists! (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $n! = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)$. $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_k = (-1)^{k-1} n\, C_{n-1}^{k-1}$

Q2.. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_n = \int_0^1 \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\,dx = \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_0^1 \frac{e_k(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\,dx$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_0^1 \frac{dx}{x+k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left[\ln(x+k)\right]_0^1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left[\ln(k+1) - \ln(k)\right] = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} n\, C_{n-1}^{k-1} (-1)^{k-1} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) \text{ ou :}$$

$$\underline{\underline{I_n = n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_{n-1}^{k-1} \left(\ln(k+1) - \ln k\right)}} \qquad \left((-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}\right)$$

Q3.. $I_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$ donc $\dfrac{1}{n \ln n} \sim \underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_{n-1}^{k-1} \left(\ln(k+1) - \ln k\right)}_{R_n}$; $R_n \sim \dfrac{1}{n \ln n}$

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_{n-1}^{k-1} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} C_{n-1}^{k-1} \ln k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_{n-1}^{k-1} \ln(k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+2} C_{n-1}^{k} \ln(k+1)$$

$k \leftarrow k+1$ dans le 2ème $\sum$; $(-1)^{k+1}$

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \left(C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}\right) \ln(k+1) + (-1)^{n+1} C_{n-1}^{n-1} \ln(n+1)$$

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1) + (-1)^{n+1} \ln(n+1) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1)$$

Finalement : $\underline{\underline{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1) \sim \frac{1}{n \ln n}}}$.