exercice 1

(Q1) Soit $x \in]0,1[$. $0 < x^2 < x < 1$ et $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est définie et continue sur $]0,1[$

Par conséquent l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ existe.

ceci suffit donc pour dire que F est "bien" définie sur $[0,1]$.

(Q2) a) Soit $x \in]0,1[$, $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} = \int_x^{x^2} \frac{1/t}{\ln t}\,dt = [\ln|\ln t|]_x^{x^2} = \ln|\ln x^2| - \ln|\ln x|$.

$\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} = \ln(2|\ln x|) - \ln|\ln x| = \ln\left(\frac{2|\ln x|}{|\ln x|}\right) = \ln 2$.

$\forall x \in]0,1[,\ \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} = \ln 2.$

b) Soit $x \in]0,1[$. Remarquons que : $x^2 < x$.

$\forall t \in [x^2, x]$, $t\ln t < 0$

$\forall t \in [x^2, x]$, $\frac{x}{t\ln t} \leq \frac{t}{t\ln t} = \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t\ln t}$ (OK ?!)

donc $\int_{x^2}^{x} \frac{x}{t\ln t}\,dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{dt}{\ln t} \leq \int_{x^2}^{x} \frac{x^2}{t\ln t}\,dt$. En multipliant par -1 il

vient : $x\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t}\,dt \geq F(x) \geq x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t}$; ceci s'écrit encore :

$x^2 \ln 2 \leq F(x) \leq x \ln 2$

c) Par encadrement $\lim_{x \to 0^+} F(x) = F(0) = F(0)$; F est continue à droite en 0.

et $\lim_{x \to 1^-} F(x) = \ln 2 = F(1)$; F est continue à gauche en 1.

Soit G une primitive de $g : t \mapsto \frac{1}{t\ln t}\,dt$ sur $]0,1[$ (g est continue sur $]0,1[$).

$\forall x \in]0,1[$, $F(x) = G(x^2) - G(x)$. Posons $\forall x \in]0,1[$, $u(x) = x^2$. u est continue sur $]0,1[$ et prend ses valeurs dans $]0,1[$. De plus G est continue sur $]0,1[$. Par conséquent $F = G\circ u - G$ est continue sur $]0,1[$.

Finalement F est continue sur $[0,1]$.

Q3 a) $\forall x \in]0,1[$, $F(x) = G(x^2) - G(x) = (G\circ u - G)(x)$ ($\forall x \in]0,1[$, $u(x) = x^2$)

- G est dérivable sur $]0,1[$
- u est dérivable sur $]0,1[$ et à valeurs dans $]0,1[$.

Par conséquent <u>$F = G\circ u - G$ est dérivable sur $]0,1[$.</u>

$\forall x \in]0,1[$, $F'(x) = u'(x)G'(u(x)) - G'(x) = 2x\,\dfrac{1}{\ln x^2} - \dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

<u>$\forall x \in]0,1[$, $F'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$.</u>

b) Que la question est mal posée. Pour parler de continuité de F' sur $[0,1]$ il faut que F' existe en 0 et en 1...

→ F est continue sur $[0,1]$

→ F est dérivable sur $]0,1[$.

→ $\forall x \in]0,1[$, $F'(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$; F' est continue sur $]0,1[$.

→ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{\ln x} = 0$

Le théorème de la limite de la dérivée (ou l'un de ses corollaires) permet de dire que <u>F est C^1 sur $[0,1]$.</u> Au passage : $F'(0) = 0$ et $F'(1) = 1$.

Q4 F' est continue sur $[0,1]$. F' est donc le prolongement par continuité de la fonction h définie sur $]0,1[$ par : $\forall x \in]0,1[$, $h(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$.

Par conséquent : $\int_0^1 h(t)\,dt$ existe et vaut $\int_0^1 F'(t)\,dt = F(1) - F(0) = \ln 2$.

<u>$I = \int_0^1 \dfrac{t-1}{\ln t}\,dt$ converge et vaut $\ln 2$.</u>

<u>**Exercice de contrôle**</u> .. 1.. Montrer que $\int_0^1 \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$

2.. Montrer que si $\alpha > -1$: $\int_0^1 \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,dt = \ln(\alpha+1)$.

Exercice 2..

Q1 a) $M^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+ad & c(a+d) \\ b(a+d) & d^2+ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a(a+d) & c(a+d) \\ b(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} = (a+d)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = -(ad-bc)I$

Donc $\underline{M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I}$

b) • Supposons $ad-bc \neq 0$

et c) Alors $I = \frac{1}{ad-bc}\left[(a+d)M - M^2\right] = \left(\frac{1}{ad-bc}\left[(a+d)I - M\right]\right)M$

ceci suffit pour dire que M est inversible et que $\underline{M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\left[(a+d)I - M\right] = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}}$

• Réciproquement supposons M inversible.

Supposons $ad-bc=0$. Alors $M^2 = (a+d)M$; $M^{-1}M^2 = (a+d)M^{-1}M$; $M = (a+d)I$

$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{bmatrix}$; $a = a+d$, $b=c=0$; $d = a+d$; $a=b=c=d=0$. $M=0$!!

Donc si M est inversible : $ad-bc \neq 0$.

Finalement M est inversible si et seulement si $ad-bc \neq 0$. (ie $\det M \neq 0$!)

Q2 a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $(\alpha I)^2 = I \iff \alpha^2 I = I \iff \alpha = 1$ ou $\alpha = -1$.

b) $M \neq I$ et $M \neq -I$

• Supposons M involutive.

$M^2 = I$; $(a+d)M - (ad-bc)I = I$; $(a+d)M = (ad-bc+1)I$

Supposons $a+d \neq 0$. $M = \alpha I$ avec $\alpha = \frac{ad-bc+1}{a+d}$.

$M^2 = I$ donc $(\alpha I)^2 = I$; $\alpha = 1$ ou -1 ; $M = I$ ou $-I$!

Finalement $a+d=0$ et donc $0 = (ad-bc+1)I = 0$

Donc $a+d=0$ et $ad-bc=-1$

• Supposons $a+d=0$ et $ad-bc=-1$

$M^2 = (a+d)M - (ad-bc)I = 0.M - (-1)I = I$; M est involutive.

Par conséquent M est involutive si et seulement si $a+d=0$ et $ad-bc=1$.

Q3 a) Posons $B = A - \alpha I = \begin{pmatrix} 5-\alpha & -4 \\ 2 & -1-\alpha \end{pmatrix}$

B est involutive si et seulement si : $5-\alpha-1-\alpha=0$ et $(5-\alpha)(-1-\alpha)+8=-1$

B est involutive si et seulement si : $\alpha=2$ et $\alpha^2-4\alpha+4=0$ i.e. $\alpha=2$

Par conséquent si $\alpha=2$: $A=\alpha I+B$ où B est une matrice involutive.

Notons que : $B=\begin{pmatrix}3&-4\\2&-3\end{pmatrix}$

b) $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=(\alpha I+B)^n=(2I+B)^n \underset{2IB=B2I}{=} \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} I^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} B^k.$

$B^2=I$; $\forall k\in\mathbb{N}$, $B^k=\begin{cases} I & \text{si } k \text{ est pair} \\ B & \text{si } k \text{ est impair.}\end{cases}$

$\forall n\in \llbracket 2,+\infty \llbracket$, $A^n=\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} 2^{n-2k} I + \sum_{0\le 2k+1\le n} C_n^{2k+1} 2^{n-2k-1} B$

Soit $n\in \llbracket 2,+\infty \llbracket$.

$3^n=(2+1)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} = \sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} 2^{n-2k} + \sum_{0\le 2k+1\le n} C_n^{2k+1} 2^{n-2k-1}$ (1)

$1=1^n=(2-1)^n=\sum C_n^k 2^{n-k}(-1)^k = \sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} 2^{n-2k} - \sum_{0\le 2k+1\le n} C_n^{2k+1} 2^{n-2k-1}$. (2)

$\frac{(1)+(2)}{2}$ donne : $\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} 2^{n-2k} = \frac{1}{2}(3^n+1)$. $\frac{(1)-(2)}{2}$ donne : $\sum_{0\le 2k+1\le n} C_n^{2k+1} 2^{n-2k-1} = \frac{1}{2}(3^n-1)$.

$\forall n\in \llbracket 2,+\infty \llbracket$, $A^n=\frac{3^n+1}{2} I + \frac{3^n-1}{2} B$

Mieux : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\frac{3^n+1}{2} I + \frac{3^n-1}{2} B$

Q4 c) D'une pierre deux coups ! Posons $A'=\frac{3^{-1}+1}{2} I + \frac{3^{-1}-1}{2} B = \frac{2}{3} I - \frac{1}{3} B$

$AA'=(2I+B)(\frac{2}{3}I-\frac{1}{3}B)=\frac{4}{3}I+\frac{2}{3}B-\frac{2}{3}B-\frac{1}{3}B^2=\frac{4}{3}I-\frac{1}{3}I=I.$

Donc A est inversible et $A^{-1}=A'=\frac{2}{3}I-\frac{1}{3}B=\frac{3^{-1}+1}{2}I+\frac{3^{-1}-1}{2}B$ ... cqfd

Exercice de contrôle.. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{Z},\ A^n=\frac{3^n+1}{2}I+\frac{3^n-1}{2}B$

Exercice 3

Q1 a) $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = u_{n+1}\sin\frac{x}{2^{n+1}} = u_n\cos\frac{x}{2^{n+1}}\sin\frac{x}{2^{n+1}} \underset{\uparrow}{=} u_n\frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}u_n\sin\frac{x}{2^n}$

$\cos a\sin a = \frac{1}{2}\sin 2a$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$; $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) $v_0 = u_0\sin x = \cos x\sin x$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0 = \dfrac{\cos x\sin x}{2^n}$; $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \dfrac{v_n}{\sin\frac{x}{2^n}} = \dfrac{\cos x\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \dfrac{\cos x\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$.

c) $2^n\sin\frac{x}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n\times\frac{x}{2^n} = x$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\cos x\sin x}{x} = \dfrac{\sin 2x}{2x}$

Q2 a) Montrons par récurrence que pour tout $k\in⟦1,n⟧$, le $k^{\text{ième}}$ passage a permis de calculer deux valeurs strictement positives (respectivement str. négatives) à a et b.

Notons qu'au départ a contient $1 = a_0$ et b contient $b_0 = \frac{1}{\cos x}$. $a_0>0$ et $b_0>0$

→ $k=1$. Le premier passage calcule $\frac{a+b}{2}$ et l'affecte à a, notons que $\frac{a+b}{2} = \frac{a_0+b_0}{2} > 0$

La valeur affectée à a est strictement positive, notons la a_1.

Il calcule ensuite $\sqrt{a,b}$, c'est à dire $\sqrt{a_1 b_0}$; cette valeur est strictement positive et est affectée à b. La propriété est vraie pour $k=1$.

→ Supposons la propriété vraie pour $k\in⟦1,n-1⟧$ et montrons la pour $k+1$.

Avant le $k^{\text{ième}}$ passage a et b contiennent des valeurs strictement positives.

Le $k+1^{\text{ième}}$ passage calcule $\frac{a+b}{2}$, valeur strictement positive et l'affecte à a.

Il calcule ensuite $\sqrt{ab}$ (ce qui est possible car a et b contiennent des valeurs strictement positives), qui est une quantité strictement positive et l'affecte à b.

Ceci achève la récurrence.

L'algorithme calcule donc "n+1" premiers termes de deux suites (a_n) et (b_n) dont les premiers termes sont respectivement $a_0 = 1$ et $b_0 = \frac{1}{\cos x}$.

b) $a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1 + 1/\cos x}{2} = \frac{1+\cos x}{2\cos x}$

$x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$b_1 = \sqrt{a_1 b_0} = \left(\frac{1+\cos x}{2\cos x} \times \frac{1}{\cos x}\right)^{1/2} = \left(\frac{1+\cos x}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{1/2} = \left(\frac{\cos^2 x/2}{\cos^2 x}\right)^{1/2} = \left|\frac{\cos x/2}{\cos x}\right| = \frac{\cos x/2}{\cos x}$

$b_1 = \frac{\cos(x/2)}{\cos(x)}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ et $b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} = \sqrt{\frac{(a_{n-1}+b_{n-1})b_{n-1}}{2}}$

d) Il est temps de prouver par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_n \text{ est défini} \\ b_n \text{ ——} \\ a_n > 0 \\ b_n > 0 \end{cases}$

→ c'est vrai pour $n = 0$.

→ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et montrons la pour n.

$\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ a un sens et est strictement positif ; a_n est défini et $a_n > 0$.

$\frac{(a_{n-1}+b_{n-1})b_{n-1}}{2}$ est strictement positif donc $b_n = \sqrt{\frac{(a_{n-1}+b_{n-1})b_{n-1}}{2}}$ est défini et strictement positif. ceci achève la récurrence.

Q3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $b_n - a_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} - a_n$.

$b_n - a_n = \sqrt{a_n}\left(\sqrt{b_{n-1}} - \sqrt{a_n}\right) = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n}}(b_{n-1} - a_n) = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n}}\left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\right)$

$b_n - a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}} + \sqrt{a_n})}(b_{n-1} - a_{n-1})$.

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.

→ $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$. $0 < \cos x < 1$. $a_0 = 1 < \frac{1}{\cos x} = b_0$. $a_0 < b_0$.

→ Supposons $a_{n-1} < b_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$b_n - a_n = \underbrace{\frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}}+\sqrt{a_{n-1}})}}_{>0} \underbrace{(b_{n-1}-a_{n-1})}_{>0}$$; donc $b_n - a_n > 0$; $a_n < b_n$. Ceci achève la récurrence.

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n < b_n$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n - a_{n-1} = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} - a_{n-1} = \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n-1} < a_n$. $(a_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - b_{n-1} = \sqrt{a_n b_{n-1}} - b_{n-1} = \sqrt{b_{n-1}}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_{n-1}}\right) = \frac{\sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_{n-1}}}(a_n - b_{n-1})$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - b_{n-1} = \frac{\sqrt{b_{n-1}}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_{n-1}}}\left(\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} - b_{n-1}\right) = \underbrace{\frac{\sqrt{b_{n-1}}}{2(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_{n-1}})}}_{>0}\underbrace{(a_{n-1}-b_{n-1})}_{<0}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - b_{n-1} < 0$

$(b_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n - a_n = \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}}+\sqrt{a_n})}(b_{n-1}-a_{n-1})$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_{n-1}}+\sqrt{a_n})} \underset{b_{n-1}>b_n}{\leq} \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n})} \underset{\sqrt{b_n}>\sqrt{a_n}}{\leq} \frac{\sqrt{a_n}}{2(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_n})} = \frac{1}{4}$$ et $b_{n-1}-a_{n-1} > 0$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{4}(b_{n-1}-a_{n-1})$

a fortiori : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})$

Une récurrence simple donne alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)$.

e) Ce qui précède donne par encadrement $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Comme $(a_n)_{n\geq 0}$ est croissante et $(b_n)_{n\geq 0}$ décroissante : $((a_n),(b_n))$ est un couple de suites adjacentes.

Par conséquent les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ convergent et ont même limite ℓ

Q4) a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{u_n \cos x/2^n}{\cos^2 x}$ et $b_n = \dfrac{u_n}{\cos^2 x}$.

$\rightarrow \dfrac{u_0 \cos(x)}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x \times \cos x}{\cos^2 x} = 1 = a_0$. $\dfrac{u_0}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x} = b_0$

La propriété est vraie pour $n=0$.

$\rightarrow$ Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et montrons la pour n $(n \in \mathbb{N}^*)$.

$$a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{n-1}\cos x/2^{n-1}}{\cos^2 x} + \frac{u_{n-1}}{\cos^2 x}\right] = \frac{u_{n-1}}{\cos^2 x}\,\frac{1+\cos(x/2^{n-1})}{2} = \frac{u_{n-1}}{\cos^2 x}\cos^2\frac{x}{2^n}$$

$$a_n = \frac{u_{n-1}\cos\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}}{\cos^2 x} = \frac{u_n \cos\frac{x}{2^n}}{\cos^2 x}.$$

$$b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}} = \sqrt{\frac{u_n \cos x/2^n}{\cos^2 x} \times \frac{u_{n-1}}{\cos^2 x}} = \sqrt{\frac{u_n\, u_{n-1}\cos x/2^n}{\cos^4 x}} = \sqrt{\frac{u_n^2}{\cos^4 x}} = \left|\frac{u_n}{\cos^2 x}\right| = \frac{u_n}{\cos^2 x}$$

Ceci achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{u_n \cos x/2^n}{\cos^2 x} \text{ et } b_n = \frac{u_n}{\cos^2 x}.$$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\sin 2x}{2x} = \dfrac{2\cos x \sin x}{2x} = \dfrac{\cos x \sin x}{x}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos(x/2^n) = 1$.

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\cos x \sin x}{x \cos^2 x} = \dfrac{\tan x}{x}$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{\tan x}{x}$.

PROBLÈME PARTIE I

(Q1) a) 1ère colonne de Π.

$p(X_{n+1}=0 | X_n=0) = 0$
$p(X_{n+1}=1 / X_n=0) = 1$ } le point 0 est réfléchissant
$p(X_{n+1}=2 / X_n=0) = 0$
$p(X_{n+1}=3 / X_n=0) = 0$

2ème colonne de Π — 3ème colonne de Π

$p(X_{n+1}=0 / X_n=1) = 1/2$ — $p(X_{n+1}=0 / X_n=2) = 0$ — $p(X_{n+1}=0 / X_n=3) = 0$

$p(X_{n+1}=1 / X_n=1) = 0$ — $p(X_{n+1}=1 / X_n=2) = 1/2$ — $p(X_{n+1}=1 / X_n=3) = 0$

$p(X_{n+1}=2 / X_n=1) = 1/2$ — $p(X_{n+1}=2 / X_n=2) = 0$ — $p(X_{n+1}=2 / X_n=3) = 0$

$p(X_{n+1}=3 / X_n=1) = 0$ — $p(X_{n+1}=3 / X_n=2) = 1/2$ — $p(X_{n+1}=3 / X_n=3) = 1$

Par conséquent $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(\{X_n=0\}, \{X_n=1\}, \{X_n=2\}, \{X_n=3\})$ est un système complet d'événements par conséquent :

$\forall i \in [\![0,3]\!]$, $p(X_{n+1}=i) = \sum_{j=0}^{3} p(X_{n+1}=i / X_n=j)\, p(X_n=j)$ ce qui signifie exactement que : $U_{n+1} = \Pi U_n$.

(Q2) a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

• $\Pi X = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{2} y = 0 \\ x + \frac{1}{2} z = 0 \\ 1/2\, y = 0 \\ 1/2\, z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -2x \\ t = x \end{cases}$. Par conséquent $\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid \Pi X = 0\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Donc 0 est valeur propre de Π et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

• $\Pi X = X \iff \begin{cases} \frac{1}{2} y = x \\ x + \frac{1}{2} z = y \\ 1/2\, y = z \\ 1/2\, z + t = t \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$. Par conséquent $\{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid \Pi X = X\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

Donc 1 est valeur propre de Π et le sous-espace propre associé est $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

- $\varepsilon \in \{-1,1\}$.

$MX = \varepsilon\frac{\sqrt3}{2}X \Leftrightarrow \begin{cases} \frac12 y = \frac{\varepsilon\sqrt3}{2}x \\ x+\frac12 z = \frac{\varepsilon\sqrt3}{2}y \\ \frac12 y = \frac{\varepsilon\sqrt3}{2}z \\ \frac12 z + t = \frac{\varepsilon\sqrt3}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt3 x \\ y = \varepsilon\sqrt3 z \\ x+\frac12 z = \frac{\varepsilon\sqrt3}{2}\varepsilon\sqrt3 z \\ t = \frac{-1}{2-\varepsilon\sqrt3}z = \frac{-(2+\varepsilon\sqrt3)}{4-\varepsilon^2 3}z = -(2+\varepsilon\sqrt3)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt3 x \\ z = x \\ x+\frac12 z = \frac32 z \\ t = -(1+\varepsilon\sqrt3)z \end{cases}$

$MX = \varepsilon\frac{\sqrt3}{2}X \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt3 x \\ z = x \\ t = -(1+\varepsilon\sqrt3)x \end{cases}$ car $x+\frac12 z = \frac32 z \Leftrightarrow x = z$.

Finalement $\{X \in M_{4,1}(\mathbb{R}) \mid MX = \varepsilon\frac{\sqrt3}{2}X\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\ \varepsilon\sqrt3\\ 1\\ -(1+\varepsilon\sqrt3)\end{bmatrix}\right)$.

Donc $\frac{\sqrt3}{2}$ est valeur propre de M et le sous-espace propre associé est : $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\ \sqrt3\\ 1\\ -(1+\sqrt3)\end{bmatrix}\right)$

et $-\frac{\sqrt3}{2}$ est valeur propre de M et le sous-espace propre associé est : $\mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt3\\ 1\\ \sqrt3-2\end{bmatrix}\right)$.

<u>b)</u> M a quatre valeurs propres distinctes 0, 1, $\frac{\sqrt3}{2}$ et $-\frac{\sqrt3}{2}$ et $M \in M_4(\mathbb{R})$; par conséquent <u>M est diagonalisable</u>.

$B' = \left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ \sqrt3\\ 1\\ -(1+\sqrt3)\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ -\sqrt3\\ 1\\ \sqrt3-2\end{bmatrix}\right)$ est une famille de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de quatre vecteurs propres de M associés à des valeurs propres distinctes ; <u>B' est donc une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$.</u>

Soit $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt3 & -\sqrt3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\sqrt3 & \sqrt3-2 \end{bmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base B'. P est inversible comme matrice de passage. De plus :

$P^{-1}MP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt3/2 \end{bmatrix}$ car les quatre éléments de B' sont des vecteurs propres de M respectivement associés aux valeurs propres $0, 1, \frac{\sqrt3}{2}$ et $-\frac{\sqrt3}{2}$.

Par conséquent $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt3 & -\sqrt3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1-\sqrt3 & \sqrt3-2 \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt3/2 \end{bmatrix}$.

c) Vérifions paresseusement la validité de l'égalité proposée.

$$P\times\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&0&-2&0\\6&6&6&6\\2&\sqrt3&1&0\\2&-\sqrt3&1&0\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&\sqrt3&-\sqrt3\\-2&0&1&1\\1&1&-2-\sqrt3&\sqrt3-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&-2&0\\6&6&6&6\\2&\sqrt3&1&0\\2&-\sqrt3&1&0\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&6\end{bmatrix}=I_4$$

Par conséquent $P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&0&-2&0\\6&6&6&6\\2&\sqrt3&1&0\\2&-\sqrt3&1&0\end{bmatrix}$!

d) et e) $\forall n\in\mathbb{N},\ U_{n+1}=MU_n$.

Une récurrence simple donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ U_n=M^nU_0$

Or $U_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$; par conséquent pour tout $n\in\mathbb{N}$, U_n n'est autre que la première colonne de la matrice M^n.

De plus $\forall n\in\mathbb{N},\ M^n=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}$ (... encore une récurrence simple).

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, U_n est la première colonne de $PD^nP^{-1}U_0$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $D^nP^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&a^n&0\\0&0&0&(-a)^n\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&0&-2&0\\6&6&6&6\\2&\sqrt3&1&0\\2&-\sqrt3&1&0\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\6&6&6&6\\2a^n&\sqrt3a^n&a^n&0\\2(-a)^n&-\sqrt3(-a)^n&(-a)^n&0\end{bmatrix}$ avec $a=\frac{\sqrt3}{2}$

$$PD^nP^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&0&\sqrt3&-\sqrt3\\-2&0&1&1\\1&1&-2-\sqrt3&\sqrt3-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\6&6&6&6\\2a^n&\sqrt3a^n&a^n&0\\2(-a)^n&-\sqrt3(-a)^n&(-a)^n&0\end{bmatrix}$$

Par conséquent la première colonne de PD^nP^{-1} est : $\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2a^n+2(-a)^n\\2\sqrt3a^n-2\sqrt3(-a)^n\\2a^n+2(-a)^n\\6+2a^n(-2-\sqrt3)+2(\sqrt3-2)(-a)^n\end{bmatrix}$

La première colonne de M^n est : $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}(\sqrt3/2)^n+(-\sqrt3/2)^n\\\sqrt3(\sqrt3/2)^n-\sqrt3(-\sqrt3/2)^n\\(\sqrt3/2)^n+(-\sqrt3/2)^n\\3-(2+\sqrt3)(\sqrt3/2)^n+(\sqrt3-2)(-\sqrt3/2)^n\end{bmatrix}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour $n=0$ la première colonne de M^n est $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ car $M^0=I$.

Par conséquent

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ \begin{cases} p(X_n=0)=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^n+\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)^n\right)\\ p(X_n=1)=\frac{\sqrt3}{3}\left(\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^n-\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)^n\right)\\ p(X_n=2)=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^n+\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)^n\right)\\ p(X_n=3)=\frac{1}{3}\left(3-(1+\sqrt3)\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^n+(\sqrt3-1)\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)^n\right)\end{cases}$$

(puisque U_n est la première colonne de M^n).

PROBLÈME PARTIE II

Q1 a) Soit $j\in[\![1,+\infty[\![$.

→ Si $(Y=j)$ est réalisé : $\forall k\in[\![0,j-1]\!]$, le mobile n'est pas en C à l'instant k et le point mobile est en C à l'instant j.

Donc si $(Y=j)$ est réalisé : $\left[\bigcap_{k=0}^{j-1}(X_k\neq 3)\right]\cap(X_j=3)$ est réalisé

→ Réciproquement supposons $\left[\bigcap_{k=0}^{j-1}(X_k\neq 3)\right]\cap(X_j=3)$ est réalisé alors le mobile se trouve pour la première fois à l'instant j en C donc $(Y=j)$ est réalisé.

Par conséquent : $(Y=j)=\left[\bigcap_{k=0}^{j-1}(X_k\neq 3)\right]\cap(X_j=3)$.

b) → Supposons $(X_{j-1}\neq3)\cap(X_j=3)$ réalisé.

Le mobile est en C à l'instant j mais n'est pas à l'instant $j-1$, par conséquent il est en B à l'instant $j-1$ et en C à l'instant j ; $(X_{j-1}=2)\cap(X_j=3)$ est réalisé.

→ Inversement, si $(X_{j-1}=2)\cap(X_j=3)$ est réalisé alors $(X_{j-1}\neq3)\cap(X_j=3)$ l'est aussi

Finalement : $(X_{j-1}\neq3)\cap(X_j=3)=(X_{j-1}=2)\cap(X_j=3)$.

c) Si $(X_{j-1}=2)$ est réalisé le mobile ne s'est jamais trouvé en C aux instants $0,1,2,\dots,j-2$ donc $\bigcap_{k=0}^{j-2}(X_k\neq3)$ est réalisé.

$(X_{j-1}=2)\subset\bigcap_{k=0}^{j-2}(X_k\neq3)$.

$$\{Y=j\} = \left[\bigcap_{k=0}^{j-1} \{X_k \neq 3\}\right] \cap \{X_j = 3\}$$

$$\{Y=j\} = \left[\bigcap_{k=0}^{j-2} \{X_k \neq 3\}\right] \cap \{X_{j-1} \neq 3\} \cap \{X_j=3\} = \left[\bigcap_{k=0}^{j-2} \{X_k \neq 3\}\right] \cap \{X_{j-1}=2\} \cap \{X_j=3\}$$

$\{Y=j\} = \{X_{j-1}=2\} \cap \{X_j=3\}$ car $\{X_{j-1}=2\} \subset \left[\bigcap_{k=0}^{j-2} \{X_k \neq 3\}\right]$

Remarque ... ce résultat n'est-il pas une évidence ?!

$\forall j \in [\![3,+\infty[\![,\ p(Y=j) = p(X_{j-1}=2 \cap X_j=3) = p(X_j=3 / X_{j-1}=2)\, p(X_{j-1}=2)$.

$\forall j \in [\![3,+\infty[\![,\ p(Y=j) = \frac{1}{2} p(X_{j-1}=2) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}\right]$

$\forall j \in [\![3,+\infty[\![,\ p(Y=j) = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}\right]$.

d) Les séries de terme général $j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}$ et $j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}$ sont convergentes car $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|<1$ et $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|<1$!

Par conséquent la série de terme général $j\,p(Y=j)$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes.

$\forall j \in [\![3,+\infty[\![,\ j\,p(Y=j) \geq 0$; la série de terme général $j\,p(Y=j)$ est donc absolument convergente : Y possède une espérance.

$$E(Y) = \sum_{j=3}^{+\infty} \frac{j}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}\right] = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1}\right] - \frac{1}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{0} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{0}\right] - \frac{2}{6}\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1}\right]$$

$$E(Y) = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{j-1} - \frac{1}{6}\times 2 - \frac{2}{6}\times 0$$

$$E(Y) = \frac{1}{6}\ \frac{1}{(1-\sqrt{3}/2)^2} + \frac{1}{6}\ \frac{1}{(1+\sqrt{3}/2)^2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left[\frac{(1+\sqrt{3}/2)^2+(1-\sqrt{3}/2)^2}{(1-\sqrt{3}/2)^2(1+\sqrt{3}/2)^2}\right] - \frac{1}{3}$$

$$E(Y) = \frac{1}{6}\left[\frac{1+3/4+\sqrt{3}+1+3/4-\sqrt{3}}{(1-3/4)^2}\right] - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\times 16\times\frac{7}{2} - \frac{1}{3} = \frac{28}{3} - \frac{1}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

$E(Y) = 9$.

(Q2) a) $\{Z=j\} \subset \{X_{j-1}=1\} \cap \{X_j=2\}$ mais l'inclusion inverse est en général fausse ;
si $\{X_{j-1}=1\} \cap \{X_j=2\}$ le mobile est en 2 à l'instant j mais rien ne prouve qu'il y arrive pour la première fois à cet instant.

b) Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

$\{Z=2j\} = \{X_0=0\} \cap \{X_1=1\} \cap \{X_2=0\} \cap \{X_3=1\} \cap \dots \cap \{X_{2j-2}=0\} \cap \{X_{2j-1}=1\} \cap \{X_{2j}=2\}$

$p(Z=2j) = p(X_0=0)\, p(X_1=1/X_0=0)\, p(X_2=0/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\})\, p(X_3=1/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\}) \times \dots \times$

$p(X_{2j-2}=0/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\dots\cap\{X_{2j-3}=1\})\, p(X_{2j-1}=1/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\dots\cap\{X_{2j-2}=0\}) \times$

$p(X_{2j}=2/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\dots\cap\{X_{2j-1}=1\})$

Or on remarque que → $p(X_{2k}=0/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\dots\cap\{X_{2k-1}=1\}) = \frac{1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

→ $p(X_{2k+1}=1/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\dots\cap\{X_{2k}=0\}) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

→ $p(X_{2j}=2/\{X_0=0\}\cap\{X_1=1\}\cap\dots\cap\{X_{2j-1}=1\}) = \frac{1}{2}$

Par conséquent : $p(Z=2j) = \underbrace{1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \dots \times 1 \times \frac{1}{2}}_{j \text{ fois}} = \left(\frac{1}{2}\right)^j$

$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ p(Z=2j) = \left(\frac{1}{2}\right)^j$.

c) Soit $j \in \mathbb{N}$. $p(Z=2j+1) \underset{\{Z=2j+1\} \subset \{X_{2j+1}=2\}}{\leq} p(X_{2j+1}=2) = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2j+1} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2j+1}\right] = 0$

Donc $\forall j \in \mathbb{N},\ p(Z=2j+1)=0$.

d) $\forall j \in \mathbb{N}^*,\quad 2j\, p(Z=2j) = 2j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2j}$

$\forall j \in \mathbb{N}^*,\quad (2j+1)\, p(Z=2j+1) = 0 \leq (2j+1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2j+1}$!

Dans tous les cas : $\forall j \in [2,+\infty[,\ 0 \leq j\,p(Z=j) \leq j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^j$

La série de terme général $j\left(1/\sqrt{2}\right)^j$ étant convergente les règles de comparaison des séries à termes positifs assurent la convergence de la série de terme général $j\,p(Z=j)$ donc par absolue convergence ($j\,p(Z=j) \geq 0$). $E(Z)$ existe.

$E(Z) = \sum_{j=1}^{+\infty} 2j\, p(Z=2j) = 2\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^j = \sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$. $E(Z)=4$.