CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
Direction de l'Enseignement

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

H.E.C.
E.S.C.P. – E.A.P.
E.M. LYON

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mardi 13 Mai 2003, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans ce problème sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ et à valeurs réelles. L'espérance d'une variable aléatoire X est notée $\mathbf{E}(X)$. Si A est un événement de probabilité non nulle on note $\mathbf{P}(E|A)$ la probabilité conditionnelle sachant A de l'événement E.
Si n est un entier naturel non nul et si $x_1, \ldots, x_n$ sont n réels on note $\min(x_1, \ldots, x_n)$ ou $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ le plus petit d'entre eux.
On rappelle que deux variables aléatoires X et Y prenant des valeurs **positives ou nulles** sont indépendantes si et seulement si, pour tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, on a :

$$\mathbf{P}\Big([X \leqslant a] \cap [Y \leqslant b]\Big) = \mathbf{P}\Big([X \leqslant a]\Big)\mathbf{P}\Big([Y \leqslant b]\Big)$$

On rappelle qu'une variable aléatoire X prenant des valeurs positives ou nulles suit une loi exponentielle si et seulement si elle vérifie la propriété, dite d'absence de mémoire :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad \mathbf{P}\Big([X > x + y] \Big| [X > x]\Big) = \mathbf{P}\Big([X > y]\Big)$$

L'objet du problème est l'obtention de diverses caractérisations de la loi exponentielle.

Partie I Un résultat d'analyse

On considère une fonction réelle φ continue sur $[0, 1]$. On note M le maximum de la fonction $|\varphi|$ sur $[0, 1]$.
Pour tout entier naturel n non nul et tout réel v de $[0, 1]$, on note $Y_{n,v}$ une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et v.

1) Soit n un entier naturel non nul, x un réel de $]0, 1[$, ε un réel strictement positif vérifiant les inégalités :
$$0 < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < 1$$

a) Comparer, pour tout réel v de $[x + \varepsilon, 1]$, les événements $\Big[Y_{n,v} \leqslant nx\Big]$ et $\Big[|Y_{n,v} - nv| \geqslant n(v - x)\Big]$ et en déduire les inégalités :
$$\mathbf{P}\left(\left[Y_{n,v} \leqslant nx\right]\right) \leqslant \frac{v(1-v)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

b) Justifier d'une façon analogue, pour tout réel v de $[0, x - \varepsilon]$, l'inégalité :
$$\mathbf{P}\left(\left[Y_{n,v} > nx\right]\right) \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

c) Établir les inégalités :

$$\left|\int_{x+\varepsilon}^{1}\varphi(v)\,\mathrm{P}\left(\left[Y_{n,v}\leqslant nx\right]\right)\,\mathrm{d}v\right|\leqslant\frac{M(1-x)}{4n\varepsilon^2}\qquad\text{et}\qquad\left|\int_0^{x-\varepsilon}\varphi(v)\left(1-\mathrm{P}\left(\left[Y_{n,v}\leqslant nx\right]\right)\right)\,\mathrm{d}v\right|\leqslant\frac{Mx}{4n\varepsilon^2}$$

d) En déduire l'inégalité :

$$\left|\int_0^x\varphi(v)\,\mathrm{d}v-\int_0^1\varphi(v)\,\mathrm{P}\left(\left[Y_{n,v}\leqslant nx\right]\right)\,\mathrm{d}v\right|\leqslant\left(\frac{1}{4n\varepsilon^2}+2\varepsilon\right)M$$

2) Établir que, pour tout réel x de $]0,1[$, on a, pour tout entier naturel n assez grand, l'inégalité :

$$\left|\int_0^x\varphi(v)\,\mathrm{d}v-\int_0^1\varphi(v)\,\mathrm{P}\left(\left[Y_{n,v}\leqslant nx\right]\right)\,\mathrm{d}v\right|\leqslant\frac{9M}{4\sqrt[3]{n}}$$

3) On suppose maintenant que la fonction φ vérifie, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1\varphi(v)\,v^n\,\mathrm{d}v=0$.

a) Justifier, pour tout polynôme P à coefficient réels, l'égalité : $\displaystyle\int_0^1\varphi(v)\,P(v)\,\mathrm{d}v=0$.

b) Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x de $]0,1[$, on a l'égalité : $\displaystyle\int_0^x\varphi(v)\,\mathrm{d}v=0$.

c) Montrer que la fonction φ est nulle.

Ainsi, on a montré dans cette partie que si φ est une fonction continue sur $[0,1]$ vérifiant pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1\varphi(v)\,v^n\,\mathrm{d}v=0$, alors φ est nulle.

Dans toute la suite du problème, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires **indépendantes, positives ou nulles**, admettant toutes la même densité (nulle sur l'intervalle $]-\infty,0[$) dont on note f la restriction à l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose que la fonction f est continue et strictement positive sur $[0,+\infty[$. On note F la restriction à l'intervalle $[0,+\infty[$ de la fonction de répartition commune à toutes ces variables. On suppose de plus que X_1 (et donc chaque variable X_i) admet une espérance.

Partie II Caractérisations de la loi exponentielle à l'aide du minimum d'un n-échantillon

Pour tout entier naturel n non nul, on note I_n l'application définie, pour tout ω de Ω, par $I_n(\omega)=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i(\omega)$ et on admet que I_n est une variable aléatoire qui admet une espérance.

1) Déterminer à l'aide de F, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de I_n.

2) Dans cette question, on suppose que la loi de X_1 (qui est la loi commune à tous les X_i) est exponentielle de paramètre λ strictement positif.

a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, la variable nI_n a même loi que X_1.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, l'espérance de I_n.

L'objet des questions suivantes est d'établir que chacune de ces propriétés est caractéristique de la loi exponentielle.

3) Dans cette question, on suppose que, pour tout entier naturel n non nul, nI_n a même loi que X_1.

a) Établir, pour tout entier naturel n non nul et tout réel x positif ou nul, l'égalité :

$$F(x)=1-\left(1-F\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n$$

b) Déterminer, pour tout réel x positif ou nul, la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(1-F\left(\frac{x}{n}\right)\right)$.

c) Montrer que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre $F'(0)$.

4) On revient au cas général.

a) Montrer que la fonction F réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$. On note F^{-1} sa réciproque.

b) À l'aide d'un changement de variable, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$\mathrm{E}(I_n) = n\int_0^1 F^{-1}(u)\,(1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u$$

c) Établir, pour tout réel u de $[0,1[$, les inégalités :

$$0 \leqslant (1-u)\,F^{-1}(u) \leqslant \int_u^1 F^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que la fonction G définie sur $[0,1]$ par $G(u) = (1-u)\,F^{-1}(u)$ si u est élément de $[0,1[$ et par $G(1) = 0$ est continue.

Établir, pour tout entier n au moins égal à 2, les égalités :

$$\mathrm{E}(I_n) = n\int_0^1 G(u)\,(1-u)^{n-2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}(I_n) = n\int_0^1 G(1-v)\,v^{n-2}\,\mathrm{d}v$$

d) On suppose maintenant qu'il existe un réel λ strictement positif tel que, pour tout entier naturel n non nul, l'espérance de I_n est égale à $\dfrac{1}{n\lambda}$.

On note F_λ la restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ et G_λ la fonction définie sur $[0,1]$ par $G_\lambda(u) = (1-u)\,F_\lambda^{-1}(u)$ si u est élément de $[0,1[$ et par $G_\lambda(1) = 0$.

i) Quelle est, pour tout entier naturel n au moins égal à 2, la valeur de $n\displaystyle\int_0^1 G_\lambda(1-v)\,v^{n-2}\,\mathrm{d}v$?

ii) À l'aide du résultat de la partie I, montrer que G et G_λ sont égales.

iii) En déduire que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre λ.

Partie III Caractérisation de la loi exponentielle à l'aide des deux premiers records

On pose $R_1 = X_1$. On note R_2 l'application définie, pour tout élément ω de Ω, par :

$$R_2(\omega) = \begin{cases} X_n(\omega) & \text{si } n \text{ est le plus petit des entiers } k \text{ tels que } X_k(\omega) > X_1(\omega) \\ X_1(\omega) & \text{si un tel entier n'existe pas.} \end{cases}$$

On admet que R_2 est une variable aléatoire.

A. Préliminaire

1) Exprimer l'événement $[R_2 = R_1]$ à l'aide de la suite d'événements $\Big([X_k \leqslant X_1]\Big)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

2) Établir, pour tout réel t positif ou nul et pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\mathrm{P}\Big(\bigcap_{k=2}^{n+1}[X_k \leqslant X_1]\Big) \leqslant \Big(F(t)\Big)^{n+1} + 1 - F(t)$$

3) Soit ε un réel strictement positif. En choisissant un réel t de façon convenable et à l'aide de l'inégalité précédente, montrer que, pour tout entier n assez grand, on a : $\mathrm{P}\Big(\displaystyle\bigcap_{k=2}^{n+1}[X_k \leqslant X_1]\Big) \leqslant 2\varepsilon$.

Comment énoncer le résultat obtenu ?

4) En déduire que, presque sûrement, $R_2 > R_1$.

B. La caractérisation

Pour tout couple (x,y) de réels positifs ou nuls on pose : $\varphi(x,y) = \mathrm{P}\Big(\big[R_1 \leqslant x\big] \cap \big[R_2 - R_1 > y\big]\Big)$.

1) Soit (x,y) un couple de réels positifs ou nuls et h un réel strictement positif.

   a) Justifier l'égalité :

$$\varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}\Big(\big[x < X_1 \leqslant x+h\big] \cap \Big(\bigcap_{i=2}^{j} \big[X_i \leqslant X_1\big]\Big) \cap \big[X_{j+1} > y + X_1\big]\Big)$$

   b) En déduire les inégalités :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{1-F(x)}\,\big(1 - F(x+y+h)\big) \leqslant \varphi(x+h,y) - \varphi(x,y) \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{1-F(x+h)}\,\big(1-F(x+y)\big)$$

2) Calculer, pour tout couple (x,y) de réels positifs ou nuls, la limite de $\dfrac{\varphi(x+h,y)-\varphi(x,y)}{h}$ quand h tend vers 0 par valeurs supérieures et, en **admettant** que le résultat tient encore pour la limite quand h tend vers 0 par valeurs inférieures, en déduire l'égalité :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{f(x)}{1-F(x)}\,\big(1-F(x+y)\big)$$

3) Dans cette question on suppose que la loi de X_1 est exponentielle de paramètre λ strictement positif.

   a) Établir, pour tout couple (x,y) de réels positifs ou nuls, l'égalité : $\varphi(x,y) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda x})\,\mathrm{e}^{-\lambda y}$.

   b) En déduire la loi de $R_2 - R_1$ puis l'indépendance des variables R_1 et $R_2 - R_1$.

4) Réciproquement, dans cette question, on suppose que les variables R_1 et $R_2 - R_1$ sont indépendantes et on note G la fonction de répartition de $R_2 - R_1$.

   a) Établir, pour tout couple (x,y) de réels positifs ou nuls, l'égalité : $\dfrac{1-F(x+y)}{1-F(x)} = 1 - G(y)$.

   b) En déduire que les fonctions G et F sont égales puis, à l'aide de la propriété d'absence de mémoire, montrer que la loi de X_1 est exponentielle.