CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Jeudi 18 Mai 2000, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème a pour objet l'étude des points en lesquels une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ atteint son maximum sur l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires.
Pour tout entier p strictement positif, on identifiera $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

Partie I. Préliminaires

On dit qu'une partie K non vide de $\mathbb{R}$ est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in K,\ x \leqslant M$$

Un réel M vérifiant ces inégalités s'appelle un majorant de K ; on dit aussi que M majore K.
Dans ce qui suit on suppose que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Soit M un majorant de K et a un élément de K. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = a,\ v_0 = M$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \Big(u_{n+1}, v_{n+1}\Big) = \begin{cases} \left(\dfrac{u_n+v_n}{2}, v_n\right) & \text{si } \dfrac{u_n+v_n}{2} \text{ ne majore pas K} \\ \left(u_n, \dfrac{u_n+v_n}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

1) On suppose, dans cette question seulement, que $K = [0,1[\cup[3,4[$, $a = 0$ et que $M = 10$.
Déterminer (u_n, v_n) pour tout entier n appartenant à $\{1,2,3,4\}$.

2) On revient désormais au cas général.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$.

b) Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers un réel b.

c) Montrer que pour tout entier positif n, v_n est un majorant de K, puis que b majore K.

d) Montrer qu'il existe une suite d'éléments de K qui converge vers b.

e) On suppose que b' est un majorant de K.

• Montrer que $b' \geqslant b$.

• En déduire que b ne dépend pas des choix initiaux de a et M pourvu que a appartienne à K et que M majore K.

Désormais, on notera α_K le majorant b de K ainsi obtenu.

Partie II. Étude d'un exemple

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne définie par $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ pour tout (x,y) appartenant à $\mathbb{R}^2$.

1) On considère trois nombres réels a, b, c, tels que $(a,b)\neq(0,0)$. On définit alors les trois ensembles :

$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c=0\}$, $\mathcal{R}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c>0\}$ et $\mathcal{R}_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax+by+c<0\}$

- **a)** Montrer que $\mathcal{R}_+$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
  On pourra montrer, en utilisant la continuité de $(x,y) \longmapsto ax+by+c$ en un point (x_0,y_0) appartenant à $\mathcal{R}_+$, qu'il existe une boule ouverte centrée en (x_0,y_0) et incluse dans $\mathcal{R}_+$.
  Il s'ensuit, mutatis mutandis, que $\mathcal{R}_-$ est également une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$, ce que l'on admettra.
- **b)** Soit (x,y) et (x',y') deux éléments de $\mathcal{R}_+$. Montrer que, pour tout réel λ appartenant à $[0,1]$, le couple $\Big(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y'\Big)$ appartient à $\mathcal{R}_+$.
- **c)** On suppose que (x,y) et (x',y') appartiennent respectivement à $\mathcal{R}_+$ et $\mathcal{R}_-$.
  En considérant la fonction $\lambda \longmapsto a\big(\lambda x + (1-\lambda)x'\big) + b\big(\lambda y + (1-\lambda)y'\big) + c$, montrer qu'il existe λ dans $[0,1]$ tel que $\Big(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y'\Big)$ appartient à $\mathcal{D}$.

2) Soit k un entier strictement positif. On considère des parties non vides et ouvertes de $\mathbb{R}^2$: $A_1, \ldots, A_k$.

- **a)** On suppose dans cette sous-question que $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ est non vide. Montrer que $A_1 \cap \ldots \cap A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
  Si (x_0,y_0) est un élément de $A_1 \cap \ldots \cap A_k$, on montrera qu'il existe un réel r strictement positif tel que la boule de centre (x_0,y_0) et de rayon r soit incluse dans $A_1 \cap \ldots \cap A_k$.
- **b)** Montrer que $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

3) On note Δ l'ensemble $\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 1-2x+y \geqslant 0 \text{ et } 1+x-2y \geqslant 0\Big\}$ et g l'application définie sur Δ par :

$$\forall (x,y) \in \Delta,\ g(x,y) = 3x - y + 4$$

- **a)** Représenter graphiquement Δ dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
- **b)** Montrer que Δ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.
- **c)** Montrer que g admet un maximum sur Δ.
- **d)** Ce maximum peut-il être atteint en un point de l'ensemble Δ' défini par :
  $$\Delta' = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x>0,\ y>0,\ 1-2x+y>0 \text{ et } 1+x-2y>0\Big\}$$
- **e)** Déterminer l'ensemble des points de Δ où ce maximum est atteint.

4) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble $\left\{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4;\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0 \text{ et } AX = B\right\}$.

- **a)** Montrer que $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si x_1, x_2, x_3, x_4 satisfont :
  $$x_3 = 1 - 2x_1 + x_2,\ x_4 = 1 + x_1 - 2x_2,\ (x_1,x_2) \in \Delta$$
- **b)** On considère l'élément $W = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathbb{R}^4$.
  On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y \rangle = {}^tX.Y$. On considère également la fonction f définie sur $\mathcal{C}$ par :
  $$\forall X \in \mathcal{C},\ f(X) = \langle X, W \rangle$$
  - Montrer que $f(X) = g(x_1,x_2)$ pour tout élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{C}$.
  - Déterminer l'ensemble des points en lesquels f atteint son maximum sur $\mathcal{C}$.

Partie III. Sommets et maximum

Désormais n et p désigneront des entiers strictement positifs.

On considère une matrice A appartenant à $\mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et deux matrices colonnes B et W appartenant respectivement à $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Pour tout élément X de $\mathbb{R}^p$ et pour tout i appartenant à $\{1,\ldots,p\}$, nous noterons X_i sa i-ième composante, et ainsi $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$.

On dira qu'un élément X de $\mathbb{R}^p$ est positif et on écrira $X \geqslant 0$, lorsque toutes ses composantes sont positives.

On munit $\mathbb{R}^p$ de son produit scalaire canonique : $\langle X, Y\rangle = {}^tX.Y$.

On considère l'ensemble $\mathscr{C} = \Big\{X \in \mathbb{R}^p;\ X \geqslant 0 \text{ et } AX = B\Big\}$ et l'application f définie sur $\mathscr{C}$ par :

$$\forall X \in \mathscr{C},\ f(X) = \langle X, W\rangle$$

On dit qu'un élément Z de $\mathscr{C}$ est un ***sommet*** *de $\mathscr{C}$ lorsque :*

$$\forall (Z', Z'') \in \mathscr{C}^2,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ \Big(Z = \lambda Z' + (1-\lambda)Z''\Big) \Rightarrow \Big(Z' = Z''\Big)$$

Si $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_p \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathbb{R}^p$, on notera $s(X)$ l'ensemble $\Big\{i \in \{1,\ldots,p\};\ X_i \neq 0\Big\}$; cet ensemble sera appelé le support de X.

Enfin, on notera C^1, C^2, ..., C^p les colonnes de A.

Toutes ces notations seront utilisées jusqu'à la fin du problème.

1) Vérifier que si l'élément nul de $\mathbb{R}^p$ appartient à $\mathscr{C}$, alors il est un sommet de $\mathscr{C}$.

2) On revient au cas général et on suppose dans ce qui suit que $\mathscr{C}$ est non vide et que f atteint son maximum sur $\mathscr{C}$ en U. Ce maximum sera noté M_0. Le but de ce qui va suivre est de construire un sommet de $\mathscr{C}$ en lequel f atteint son maximum. On suppose donc que U n'est pas un sommet de $\mathscr{C}$ et on considère deux éléments distincts U', U'' appartenant à $\mathscr{C}$ et un réel λ appartenant à $]0,1[$ tels que $U = \lambda U' + (1-\lambda)U''$.

a) Vérifier que $f(U') = f(U'') = f(U)$ et en déduire que le vecteur $V = U'' - U'$ est orthogonal à W.
Le vecteur $U'' - U'$ étant non nul, il a au moins une composante non nulle et quitte à échanger U' et U'' on peut supposer que le vecteur V égal à $U'' - U'$ admet une composante strictement négative. C'est ce que nous supposons désormais.

b) • Montrer que $s(U') \subset s(U)$, $s(U'') \subset s(U)$ et $s(V) \subset s(U)$.
• Pour tout réel μ, calculer : $A(U + \mu V)$.
• Montrer que $s(U + \mu V) \subset s(U)$ pour tout réel μ.

c) Montrer que la famille $\left(C^i\right)_{i \in s(U)}$ est liée. *On pourra considérer AV.*

d) On considère $K = \{\mu \in \mathbb{R},\ U + \mu V \in \mathscr{C}\}$.
• Montrer que K est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
• Montrer que $U + \alpha_K V$ appartient à $\mathscr{C}$ et que $f(U + \alpha_K V) = M_0$.
Le nombre α_K a été défini dans la partie I.

e) On suppose que, pour tout i appartenant à $s(U)$, la i-ième composante Y_i de la colonne Y égale à $U + \alpha_K V$ est non nulle.
En remarquant que pour tout i appartenant à $s(U)$, $\lim\limits_{\substack{\mu \to 0 \\ >}} \Big(U_i + (\alpha_K + \mu)V_i\Big) = U_i + \alpha_K V_i$, justifier l'existence d'un réel η, strictement positif, tel que $U + (\alpha_K + \eta)V$ appartienne à $\mathscr{C}$.
En déduire que $s(U + \alpha_K V)$ est strictement inclus dans $s(U)$.

f) Nous noterons désormais $U^{(1)} = U + \alpha_K V$ et nous supposons que $U^{(1)}$ n'est pas un sommet de $\mathscr{C}$.
En se servant des questions précédentes, montrer que l'on peut construire un élément $U^{(2)}$ de $\mathscr{C}$ tel que $f(U^{(2)}) = M_0$ et tel que $s(U^{(2)})$ soit strictement inclus dans $s(U^{(1)})$.

g) Déduire de ce qui précède l'existence d'un sommet de $\mathscr{C}$ en lequel f atteint son maximum sur $\mathscr{C}$.

Partie IV. Existence du maximum de la fonction f

Dans cette partie nous reprenons les mêmes notations que dans la partie précédente et nous noterons par $\langle X, X' \rangle$ aussi bien le produit scalaire canonique de deux vecteurs X et X' de $\mathbb{R}^p$, que le produit scalaire canonique de deux vecteurs X et X' de $\mathbb{R}^n$.

1) Montrer qu'il existe une matrice A' appartenant à $\mathbb{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n,\ \langle AX, Y \rangle = \langle X, A'Y \rangle$$

2) On note r le rang de la matrice A. On suppose d'une part que r est non nul, et d'autre part que la famille $(C^1, C^2, \dots, C^r)$ est libre.

On note E l'espace vectoriel engendré par les colonnes $C^1, \dots, C^p$ de A.

a) Montrer que l'application $\theta : Y \longmapsto \begin{pmatrix} \langle Y, C^1 \rangle \\ \vdots \\ \langle Y, C^r \rangle \end{pmatrix}$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^r$.

b) Montrer qu'il existe un unique vecteur colonne Z appartenant à E tel que, pour tout i appartenant à $\{1, \dots, r\}$, on a $\langle Z, C^i \rangle = W_i$. *On rappelle que W_i représente la i-ième composante du vecteur W introduit dans le préambule de la partie III.*

c) Exprimer les composantes dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$ du vecteur colonne $A'Z$, à l'aide des produits scalaires $\langle Z, C^i \rangle$, $(i = 1, \dots, p)$.

d) Dans cette sous-question on suppose en outre que : $\forall i \in \{r+1, \dots, p\}$, $\langle Z, C^i \rangle \geqslant W_i$.

- Soit X un élément appartenant à $\mathscr{C}$, montrer que $\langle Z, B \rangle \geqslant \langle X, W \rangle$.
- On suppose qu'il existe un vecteur U appartenant à $\mathscr{C}$ tel que $s(U) = \{1, \dots, r\}$.

Prouver que la fonction $f : X \longmapsto \langle X, W \rangle$ atteint son maximum sur $\mathscr{C}$ en U et que U est un sommet de $\mathscr{C}$.

3) Dans cette question A et W sont respectivement la matrice et le vecteur introduits dans la partie II.

a) Déterminer la valeur de r.

b) Déterminer le vecteur Z.

c) Est-ce que $A'Z - W \geqslant 0$?

d) Retrouve-t-on les résultats de la partie II ?