BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

CODE EPREUVE :

280

HEC_M1_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 3 Mai 2006, de 8 h. à 12 h.

Pour tout couple (p,q) d'entiers strictement positifs, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Si A est un élément quelconque de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note A^T la transposée de A.

Dans tout le problème, pour n dans $\mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire de deux vecteurs X et Y étant noté $\langle X, Y\rangle$ ou $Y^T X$.

Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, sa norme est donnée par $||X|| = \sqrt{X^T X} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2\right)^{1/2}$.

Le module et le conjugué d'un nombre complexe z sont notés respectivement $|z|$ et $\overline{z}$. On rappelle que $|z|^2 = z\overline{z}$. Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ est noté i.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la matrice $H_n = (h_{k,j}^{(n)})_{1\leqslant k,j\leqslant n}$ (appelée matrice de Hilbert) de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, de terme générique $h_{k,j}^{(n)} = \dfrac{1}{k+j-1}$, les entiers k et j décrivant $[\![1,n]\!]$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la matrice H_n s'écrit donc :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

Préliminaire

On rappelle que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque notée arctan. On note (arctan)' sa dérivée.

1. a) Pour tout réel x, rappeler l'expression de $(\arctan)'(x)$ en fonction de x.

b) Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, l'égalité : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

c) Établir, pour tout x de $\mathbb{R}^{+}$, l'encadrement : $0 \leqslant \arctan x \leqslant x$.

2. a) Montrer que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Soit U une variable aléatoire réelle de densité ψ. On note F sa fonction de répartition. Déterminer la loi de la variable aléatoire $F(U)$.

c) On rappelle que la fonction Pascal `random` rend un nombre aléatoire de l'intervalle $[0, 1[$ suivant une loi uniforme sur cet intervalle. Écrire, dans le langage Pascal, une fonction `Cauchy` simulant la variable aléatoire U.

Partie I. Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de H_n

1. Calculer, pour tout couple (k, j) de $[\![1, n]\!]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{k+j-2}dt$.

En déduire, pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, l'égalité : $X^T H_n X = \displaystyle\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

2. a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs, et d'une matrice orthogonale P telles que : $H_n = PDP^T$.

b) On désigne par α_n (resp. β_n) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de H_n.
Montrer, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, l'encadrement suivant :

$$\alpha_n ||X||^2 \leqslant X^T H_n X \leqslant \beta_n ||X||^2$$

3. On note $\mathcal{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la valeur propre β_n.
a) Soit Y un vecteur de $\mathcal{V}$. Montrer que $Y^T H_n Y = \beta_n ||Y||^2$.

b) Réciproquement, soit Y un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Y^T H_n Y = \beta_n ||Y||^2$. Montrer que Y appartient à $\mathcal{V}$.

4. Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X_0.

a) Établir l'inégalité : $|X_0|^T H_n |X_0| \geqslant X_0^T H_n X_0$.

b) En déduire que $|X_0|$ est un élément de $\mathcal{V}$.

c) Montrer que les composantes du vecteur $H_n|X_0|$ sont toutes strictement positives. En déduire que le vecteur X_0 n'a aucune composante nulle.

d) En utilisant le fait que $X_0^T H_n X_0 = |X_0|^T H_n |X_0|$, montrer que les composantes de X_0 sont toutes de même signe.

5. a) Montrer qu'il n'existe pas deux vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$ orthogonaux.

b) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

Partie II. Croissance et convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$

On rappelle que β_n désigne la plus grande valeur propre de la matrice H_n.

1. Soit $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de H_n associé à β_n. Soit Z le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$Z = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $Z^T H_{n+1} Z = X'^T H_n X'$. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

2. Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions définies et continues sur le segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On définit le nombre complexe $\displaystyle\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta$ par :

$$\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta = \int_a^b \varphi_1(\theta)d\theta + i\int_a^b \varphi_2(\theta)d\theta$$

et on rappelle que pour tout réel x, on a : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{Z}$, les deux nombres complexes : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}d\theta$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ik\theta}d\theta$.

b) Montrer, pour tout entier p de $\mathbb{N}$, l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^p dx = -i\int_0^{\pi} e^{i(p+1)\theta}d\theta$.

c) En déduire, pour tout polynôme P à coefficients complexes, l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)dx = -i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$.

d) Dans le cas où P est un polynôme à coefficients réels, établir l'inégalité suivante :

$$\left|\int_{-1}^{1} P(x)dx\right| \leqslant \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|d\theta$$

Dans les questions 3 et 4, on désigne par $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ *un vecteur quelconque de* $\mathbb{R}^n$.

3. a) Établir l'encadrement : $0 \leqslant X^T H_n X \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{1} (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

b) En déduire que l'on a : $0 \leqslant X^T H_n X \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} |x_0 + x_1 e^{i\theta} + \cdots + x_{n-1}e^{i(n-1)\theta}|^2 d\theta$.

4. a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(\theta) = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\theta}\right|^2$.

Montrer que φ est 2π–périodique et paire ; en déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\theta)d\theta$.

b) Établir l'inégalité : $X^T H_n X \leqslant \pi ||X||^2$.

c) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée, puis qu'elle est convergente.

Partie III. Limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$

Dans cette partie, le vecteur W de $\mathbb{R}^n$ est défini par $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}$.

1. Montrer les égalités suivantes :

$$W^T H_n W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{j}(k+j-1)} = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 dt$$

2. En déduire, pour $n \geqslant 2$, l'inégalité suivante :

$$W^T H_n W \geqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p-k}}$$

(on pourra utiliser le développement du produit de deux polynômes)

Dans les questions suivantes, p est un entier supérieur ou égal à 2.

3. a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0,p[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(p-x)}}$.

b) En déduire, quelle que soit la parité de p, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geqslant \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$$

4. Justifier la validité du changement de variable $x = \dfrac{p}{1+t^2}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$, et établir la relation :

$$\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} = \pi - 4\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$$

5. On pose : $u_p = \dfrac{1}{p-1}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$. Montrer que la série de terme général u_p est convergente.

6. a) Montrer que $||W||^2$ est équivalent à $\ln n$, lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$.