ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option générale

MATHÉMATIQUES

Année 1996

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE 1

1.1 Etude préliminaire

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^\times \quad f(x) = x^x \\ \qquad\qquad f(0) = 1 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. On considère un repère orthonormale $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan et l'on note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans ce repère. Quelle est la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à sa tangente $(\mathcal{T})$ en son point d'abscisse 1 ?
4. On note g la restriction de f à l'intervalle $I = [\frac{1}{e}, +\infty[$. Démontrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

1.2. Etude d'une fonction

1. Démontrer qu'il existe une application φ de J sur I telle que :
$$\forall x \in J, \quad \varphi(x)^{\varphi(x)} = x.$$
2. Etablir que φ est négligeable devant la fonction logarithme népérien au voisinage de plus l'infini.
3. Déterminer le plus grand intervalle K inclus dans J sur lequel φ est dérivable et montrer que :
$$\forall x \in K, \quad \varphi'(x) = \frac{\varphi(x)}{x(\varphi(x) + \ln x)}.$$
4. On note (Γ) la courbe représentative de φ dans le repère $\mathcal{R}$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^\times$, on note $(\mathcal{T}_n)$ la tangente à (Γ) en son point d'abscisse n.
   (a) Déterminer l'abscisse u_n du point d'intersection de $(\mathcal{T}_n)$ avec l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.
   (b) Donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers plus l'infini.

EXERCICE 2

Désignant par n un entier naturel, on se propose de déterminer l'ensemble des polynômes à coefficients réels tels que :

$$P(X) + P(X+1) = 2X^n \tag{1}$$

1. On considère l'application Φ qui, à tout élément $Q(X)$ de $\mathbb{R}[X]$, associe le polynôme :
$$\Phi[Q(X)] = Q(X) + Q(X+1).$$
   (a) Etablir que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Notant p un entier naturel, on désigne par Φ_p la restriction de Φ à $\mathbb{R}_p[X]$.
      i. Montrer que Φ_p est un endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$
      ii. On note $B_p = (1, X, X^2, ..., X^p)$ la base canonique de $\mathbb{R}_p[X]$.
      Etablir que la matrice de Φ_p dans B_p est une matrice triangulaire supérieure dont on déterminera les termes diagonaux.
      iii. En déduire que Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$.

(c) Prouver que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

(d) Démontrer qu'il existe un polynôme unique de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation (1).
On précisera son degré et on le notera $E_n(X)$.

2. On écrit :

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} X^k.$$

(a) Vérifier que :

$$E_n(X+1) + E(X) = \sum_{j=0}^{n} \left[a_{n,j} + \sum_{k=j}^{n} C_k^j a_{n,k} \right] X^j$$

(b) En déduire le système dont les $a_{n,k}$ sont les solutions. Préciser la valeur de $a_{n,k}$.

(c) Déterminer $E_0(X)$, $E_1(X)$ et $E_2(X)$.

(d) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$E_n'(X) = nE_{n-1}(X)$$

et en déduire l'expression de $E_n^{(k)}(X)$ (dérivée $k^{ième}$ de $E_n(X)$).

(e) Montrer que :

$$E_n(X) = (-1)^n E_n(1 - X)$$

et en déduire, que pour n pair strictement positif, la valeur de $E_n(0)$ et $E_n(1)$, ainsi que, pour n impair, la valeur de $E_n(\frac{1}{2})$.

(f) Déterminer $E_3(X)$ et $E_4(X)$?

PROBLEME

3.1. Etude d'une variable aléatoire X

1. On considère la fonction numérique F de la variable x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

et l'on note (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
(unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées)

(a) Dresser le tableau de variations de F. On notera f la dérivée de F.

(b) Démontrer que le point $\Omega(0, \frac{1}{2})$ est centre de symétrie de (Γ). Donner une équation de la tangente (Δ) à (Γ) en Ω.

(c) Etablir que f est paire et étudier la concavité de (Γ).

(d) Construire (Γ) et (Δ).

(e) Prouver que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ et exprimer $F^{-1}(x)$ pour x élément de $]0, 1[$.

(f) Vérifier que f est une densité de probabilité.

2. On désigne par X une variable aléatoire admettant f pour densité de probabilité.

(a) Déterminer les quartiles de X, c'est-à-dire les réels Q_i vérifiants, pour i entier compris entre 1 et 3 :

$$F(Q_i) = \frac{i}{4}$$

et les faire apparaitre sur la figure du 3.1.1.(d)

(b) Soit ε un élément de $]0,1[$. Exprimer en fonction de ε le plus petit réel α tel que :

$$P\left[(|X| > \alpha)\right] \leqslant \varepsilon$$

(c) Montrer que X possède une espérance mathématique et la calculer.

3.2. Calcul des deux intégrales

On se propose dans cette partie de calculer les deux intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

(*On rappelle le résultat suivant : si f est une fonction continue sur $]0,1]$, prolongeable par continuité à droite en 0, alors l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente).*

1. Etude de la convergence de I et J

   (a) Démontrer que J est convergente.

   (b) Pour tout réel ε de $]0,1]$, on pose :

   $$h(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{\ln x}{1+x} dx.$$

   Montrer que h est monotone et bornée sur $]0,1]$. En déduire que l'intégrale I est convergente.

2. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout élément x de $[0,1]$, on a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \tag{2}$$

3. On désigne par k un entier naturel. Etablir la convergence de l'intégrale :

$$I_k = \int_0^1 x^k \ln x dx$$

   et la calculer.

4. Etudier succinctement les variations de la fonction ρ continue sur $[0,1]$ et définie par :

$$\begin{cases} \rho(0) = 0 \\ \forall x \in]0,1] \quad \rho(x) = x \ln x \end{cases}$$

5. Montrer, grâce à la relation (2), que, pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\left| \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} dx - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_k \right| \leqslant \frac{1}{e(n+1)}$$

   puis que la série de terme générale $\dfrac{(-1)^k}{k^2}$ converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = I$$

6. On note θ la fonction continue sur $[0,1]$ définie par :

$$\begin{cases} \theta(0) = 1 \\ \forall x \in]0,1] \quad \theta(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \end{cases}$$

   (a) Déduire de (2) que, pour tout entier naturel non nul n, il existe une fonction R_n définie sur $[0,1]$ telle que, pour tout élément x de $[0,1]$, on ait :

$$\theta(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k + R_n(x) \qquad \text{et} \qquad |R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+2} x^{n+1}$$

   (b) En déduire que :

$$\left| \int_0^1 \theta(x)dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \right| \leqslant \frac{1}{(n+2)^2}$$

   et que $J = -I$.

7. On admet que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. En déduire que :

$$J = -I = \frac{\pi^2}{12}$$

3.3. Calcul de la variance de X

1. Prouver que X possède une variance.

2. Démontrer, en utilisant la parité de f et un changement de variable, que :

$$V(X) = 2 \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{(1+x)^2} dx$$

3. Calculer la dérivée de la fonction ψ définie sur $]0,1]$ par :

$$\psi(x) = \frac{x \ln x}{1+x} - \ln(1+x)$$

   et déterminer $\lim\limits_{x \to 0} (\ln x)\psi(x)$.

4. En déduire, grâce à une intégration par parties, que :

$$V(X) = 2(J - I)$$

   et donner enfin la valeur de $V(X)$.