

ECRI COME

Banque d'épreuves communes

aux concours des Ecoles

esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option scientifique

MATHÉMATIQUES

Année 1998

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

**Tournez la page
S.V.P**

EXERCICE 1

On considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi définie pour tout entier $n > 0$ par :

$$P(X_n = -1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = +1) = 1 - p$$

où p est un réel tel que $0 < p < 1$.

On définit la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ par : $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

1. On pose :

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} a_n = P(Z_n = -1) \\ b_n = P(Z_n = +1) \end{cases}$$

(a) Calculer $a_n + b_n$.

(b) Montrer que : $\forall n \geq 1 \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où Q est la matrice $\begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$.

2. (a) Montrer que :

$$\forall n \geq 1 \quad Q^n = \begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix},$$

où p_n est un réel tel que $0 < p_n < 1$ et donner une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .

(b) En déduire une expression explicite de p_n en fonction de n et p .

(c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

Que peut-on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p pour que les variables Z_1 et Z_2 soient indépendantes. On suppose cette condition réalisée : quelle est alors la loi de Z_n ?

Montrer que :

$$\forall n \geq 1 \quad P(Z_1 = \varepsilon_1, \dots, Z_i = \varepsilon_i, \dots, Z_n = \varepsilon_n) = \frac{1}{2^n}$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$ pour tout i ($1 \leq i \leq n$)

Que peut-on en déduire pour la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$?

EXERCICE 2

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$.

A toute fonction f de E , on associe la fonction F définie par : $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$

1. Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$.

2. Déterminer F dans les cas suivants :

(a) $f(x) = \sin 2\pi x$;

(b) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

3. Soit T l'application de E dans lui-même définie par : $T(f) = F$

(a) Montrer que T est linéaire.

(b) Est-elle injective ? surjective ?

4. On dit que le réel λ est valeur propre de T s'il existe une fonction non nulle f de E vérifiant $T(f) = \lambda f$; f est appelée fonction propre associée à la valeur propre λ .
 - (a) Montrer que 0 est valeur propre de T .
 - (b) Montrer que pour tout réel a , la fonction $x \mapsto e^{ax}$ est une fonction propre associée à une valeur propre $\lambda(a)$ que l'on déterminera.
 - (c) Etudier les variations de cette fonction λ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que tout réel positif est valeur propre de l'application T .

PROBLEME

L'objectif de ce problème est de "prolonger" la fonction factorielle $n \mapsto (-1)^n$ définie sur $\mathbb{N}^\times$ en une fonction définie sur les réels qui ne sont pas des entiers négatifs. On étudie ensuite quelques propriétés de cette fonction.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}^-$ l'ensemble des entiers négatifs ou nuls. On pose $E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$: E est donc l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers négatifs ou nuls.

A

On considère une fonction f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que f a la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$f \text{ est définie en } 1 \text{ et } f(1) = 1 \\ \forall x \in D, \quad x+1 \in D \text{ et } f(x+1) = xf(x)$$

1. (a) Montrer qu'une fonction ayant la propriété $\mathcal{P}$ ne peut être définie en x entier négatif ou nul.
 (b) Montrer que si $D = \mathbb{N}^\times$, alors $n \mapsto f(n) = (n-1)!!$ a la propriété $\mathcal{P}$ (On adopte la convention : $0! = 1$)
2. (a) On considère la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
 En utilisant, sans les démontrer, des résultats du cours, montrer que Γ a la propriété $\mathcal{P}$ et rappeler la valeur de $\Gamma(n)$ pour n entier strictement positif.
 (b) Montrer que pour tout x réel strictement positif et tout n entier strictement positif :

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \dots (x+1)x\Gamma(x)$$

3. Pour tout élément x de E et tout entier n tel que $x+n$ soit strictement positif, on pose : $A_n(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1) \dots (x+n-1)}$
 (a) Montrer que pour $x > 0$ et $n > 0$, $A_n(x)$ ne dépend pas de n .
 (b) Soit x un réel négatif non entier.
 Montrer que $x+n$ est strictement positif à partir d'un rang dépendant de x noté N_x .
 Soient n et p deux entiers naturels. Pour n strictement supérieur à N_x , calculer $A_{n+p}(x)$ en fonction de $A_p(x+n)$.
 En déduire que :

$$\forall n > N_x, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad A_{n+p}(x) = A_n(x).$$

- (c) Le réel $A_n(x)$ étant indépendant de n pour $n > N_x$, on définit sur E une fonction $\tilde{\Gamma}$ par $\tilde{\Gamma}(x) = A_n(x)$ pour $n > N_x$.
 Montrer que la fonction $\tilde{\Gamma}$ a la propriété $\mathcal{P}$, et que pour tout x réel strictement positif : $\tilde{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$.
 En déduire que :

$$\forall x \in E, \quad \tilde{\Gamma}(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \dots (x+1)x\tilde{\Gamma}(x)$$

On dit que $\tilde{\Gamma}$ prolonge la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}_+^\times$.

Par abus de notation, on notera désormais dans tout le problème simplement Γ et non plus $\tilde{\Gamma}$, la fonction ainsi prolongée.

4. (a) On pose : $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} t$ et $J = \int_1^{+\infty} t \ln t e^{-t} t$.

Montrer que I et J sont des intégrales absolument convergentes.

(b) Soit h la fonction de deux variables définie sur $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R}$ par $h(t, x) = t^{x-1}$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto u_t(x) = h(t, x)$, montrer que :

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \forall x \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[, \quad |h(t, x) - h(t, 1)| \leq |x - 1| \frac{|\ln t|}{\sqrt{t}} \quad (1)$$

et que :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \forall x \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[, \quad |h(t, x) - h(t, 1)| \leq |x - 1| t \ln t \quad (2)$$

(c) Montrer qu'il existe une constante K telle que :

$$\forall x \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[, \quad |\Gamma(x) - \Gamma(1)| \leq K |x - 1| \quad (3)$$

En déduire que la fonction Γ est continue au point 1.

5. En utilisant la question précédente, montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ au voisinage de 0.

En déduire un équivalent simple de $\Gamma(x)$ au voisinage de $x = -n$ ($n \in \mathbb{N}^\times$).

6. On admet l'équivalence suivante :

$$\Gamma(x) \sim x^{x-1} e^{-x} \sqrt{2\pi x} \quad ((*))$$

(a) Calculer pour x réel fixé $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$.

(b) Montrer que si x est un entier naturel n , l'équivalence (*) permet de retrouver la formule de Stirling :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

(c) Montrer que :

$$\forall x \in E \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x+n)}{n^x \Gamma(n)} = 1.$$

(d) En déduire que :

$$\forall x \in E, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

B

On se propose dans cette partie de donner une autre expression de la fonction Γ sur E .

1. Pour n strictement positif, on pose $g_n(x) = \frac{e^{x/n}}{1+x/n}$ et $G_n(x) = \prod_{k=1}^n g_k(x)$.

Montrer que pour tout réel x positif, la série de terme général $u_n(x) = \ln g_n(x)$ est convergente.

En déduire, pour tout réel x positif, l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.

On appelle $G(x)$ cette limite. On définit ainsi une fonction G sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que la suite $(G_n(x))_{n \in \mathbb{N}^\times}$ est convergente pour x réel négatif non entier. (On remarquera que pour tout x fixé, $g_n(x)$ est strictement positif pour n suffisamment grand).

On a donc une fonction G définie sur E par : $G(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x)$.

3. Vérifier que : $\ln G_n(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et retrouver le résultat suivant : la suite de terme général

$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ a une limite finie strictement positive γ quand n tend vers $+\infty$.

γ s'appelle la constante d'Euler.

(On pourra utiliser, en le justifiant, le résultat : $\forall x > 0 \quad e^x > x + 1$)

4. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad G_n(x) = x\Gamma(x) \frac{n! \exp\left(x \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)}{(x+n)\Gamma(x+n)}.$$

5. En utilisant la question A.6.c, montrer que :

$$\forall x \in E, \quad \Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} G(x).$$