I Q1.a) $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$; $e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$; $e^x-e^{-x}=2x+\frac{2x^3}{3!}+o(x^3)=2x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$.

$\frac{e^x-e^{-x}}{x}=2+\frac{x^2}{3}+o(x^2)$; $\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=1+\frac{x^2}{6}+o(x^2)$.

$\frac{2x}{e^x-e^{-x}}=1-\frac{x^2}{6}+\left(\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^2)$; $\frac{2x^2}{e^x-e^{-x}}=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$.

$\underline{\underline{f(x)=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}}$

b) $\frac{2x^2}{e^x-e^{-x}} \underset{0}{\sim} x$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{e^x-e^{-x}}=0=f(0)$; f est continue en 0.

$\frac{f(x)}{x}\underset{0}{\sim}1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$; f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$. $y=x$ est une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

c) $f(x)-(1(x-0)+0)=f(x)-x \sim -\frac{x^3}{6}$; localement (au voisinage de 0 !) le signe de $x\mapsto f(x)-x$ est celui de $x\mapsto -\frac{x^3}{6}$.

"Au voisinage de 0 $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en 0 pour $x<0$ et en dessous pour $x>0$"

Q2. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $h'(x)=\frac{-(e^{2x})^2+6e^{2x}-1}{(e^{2x}+1)^2}=-\frac{(e^{2x}-(3+\sqrt{8}))(e^{2x}-(3-\sqrt{8}))}{(e^{2x}+1)^2}$

$3-\sqrt{8}<1$; le signe de h' est celui de $x\mapsto -(e^{2x}-(3+\sqrt{8}))$

Par conséquent : $\forall x\in\left[0,\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2}\right[$, $h'(x)>0$, $h'\left(\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2}\right)=0$ et $\forall x\in\left]\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2},+\infty\right[$, $h'(x)<0$.

h est strictement croissante (resp. décroissante) sur $\left[0,\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2}\right]$ (resp. $\left[\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2},+\infty\right[$).

$h(0)=0$ et h strictement croissante sur $\left[0,\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2}\right[$ donc $\forall x\in\left]0,\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2}\right[$, $h(x)>0$.

h est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2},+\infty\right[$ donc h définit une bijection de cet intervalle sur $h\left(\left[\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2},+\infty\right[\right)\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty}{=}\left]-\infty,h\left(\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2}\right)\right]$. 0 appartient à cet intervalle car $h\left(\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2}\right)=\underbrace{\frac{\sqrt8}{4}-\frac{\ln(3+\sqrt8)}{4}}_{>0}$

Par conséquent $\exists!\,\alpha\in\left[\frac{\ln(3+\sqrt8)}{2},+\infty\right[$, $h(\alpha)=0$.

Finalement : $\exists!\,\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, $h(\alpha)=0$. $\alpha\simeq 1{,}9$ ($\alpha\simeq 1{,}915008$)

Q3.a) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=\frac{4x(e^x-e^{-x})-2x^2(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}=\frac{4x(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}\left[\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}-\frac{x}{2}\right]$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=\frac{4x(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}-\frac{x}{2}\right)=\frac{4x(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}\left(1-\frac{2}{e^{2x}+1}-\frac{x}{2}\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)=\frac{4x(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2}h(x)$. Le signe de f' sur $\mathbb{R}_+^*$ est celui de h.

b) $\forall x\in[0,\alpha[$, $f'(x)>0$ ($f'(0)=1$) ; $f'(\alpha)=0$, $\forall x\in]\alpha,+\infty[$, $f'(x)<0$.

f est strictement croissante sur $[0,\alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha,+\infty[$.

f est impaire sur $\mathbb{R}$, par conséquent f est strictement décroissante sur $]-\infty,-\alpha]$ et strictement croissante sur $[-\alpha,0]$ (f' est paire !)

c) $f(\alpha)\simeq 1{,}1$ et $f(-\alpha)\simeq -1{,}1$.

Notons encore que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ $\left(f(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{2x^2}{e^x}\text{ et } f(x)\underset{-\infty}{\sim}-\frac{2x^2}{e^{-x}}\right)$

II 1. a. $\lim_{x\to+\infty} x^4e^{-ax}=0$. $\exists B\in\mathbb{R}_+^*$, $\forall x\in[B,+\infty[$, $0\le x^4e^{-ax}\le 1$

$\forall x\in[B,+\infty[$, $0\le x^2e^{-ax}\le \frac{1}{x^2}$. $\int_B^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ converge ; $\int_B^{+\infty}x^2e^{-ax}dx$ aussi.

$\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax}dx$ est donc convergente (il est clair que $x\mapsto x^2e^{-ax}$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$)

b.. Soit $A\in\mathbb{R}_+$. $\int_0^A x^2e^{-ax}dx = \left[x^2\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_0^A - \int_0^A\frac{2xe^{-ax}}{-a}dx = -\frac{A^2}{a}e^{-aA}+\frac{2}{a}\left[x\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_0^A - \frac{2}{a}\int_0^A\frac{e^{-ax}}{-a}dx$

$\int_0^A x^2e^{-ax}dx = -\frac{A^2}{a}e^{-aA} - \frac{2A}{a^2}e^{-aA} + \frac{2}{a^2}\left[\frac{e^{-ax}}{-a}\right]_0^A = -\frac{A^2}{a}e^{-aA} - \frac{2A}{a^2}e^{-aA} - \frac{2}{a^3}(e^{-aA}-1)$

$K(a)=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^2e^{-ax}dx = \underline{\underline{\frac{2}{a^3}}}$.

2.. a.. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f(x)\ge 0$. $f(x)\underset{+\infty}{\sim} 2\frac{x^2}{e^x} = 2x^2e^{-x}$

$\int_0^{+\infty}2x^2e^{-x}dx$ converge (1.a) donc $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ converge.

b.. $n\in\mathbb{N}$. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc loc. intégrable. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)\ge 0$. $f_n(x)\sim 2x^2e^{-x}e^{-2nx} = 2x^2e^{-(2n+1)x}$

$\int_0^{+\infty}2x^2e^{-(2n+1)x}dx$ converge (1.a) donc $\int_0^{+\infty}f_n(x)dx$ converge.

3.. a.. $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $\frac{1-e^{-2nx}}{1-e^{-2x}} = \sum_{k=0}^{n-1}(e^{-2x})^k$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. (... suite géométrique)

b.. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)-f_n(x) = 2x^2e^{-x}\frac{(1-e^{-2nx})}{1-e^{-2x}} = \sum_{k=0}^{n-1}2x^2e^{-(2k+1)x}$. Cette formule vaut encore pour $x=0$.

c.. $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)-f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}2x^2e^{-(2k+1)x}$.

$J=\int_0^{+\infty}f(x)dx = \int_0^{+\infty}(f(x)-f_n(x))dx + \int_0^{+\infty}f_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{+\infty}2x^2e^{-(2k+1)x}dx + I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $J = \sum_{k=0}^{n-1}2K(2k+1)+I_n = \sum_{k=0}^{n-1}2\times\frac{2}{(2k+1)^3}+I_n = 4\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(2k+1)^3}+I_n$.

Q4.. a.. $h: x\mapsto e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x\ge h'(0)(x-0)+h(0)=x+1$.

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-2x}\ge -2x+1$; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $1\ge\frac{1-e^{-2x}}{2x}$; $\forall x\in]0,1]$, $\varphi(x)\le 1$. Ceci vaut encore en 0. $\forall x\in[0,1]$, $\varphi(x)\le 1$.

φ est dérivable sur $]0,1]$ et $\forall x\in]0,1]$, $\varphi'(x)=\frac{1}{2x^2}\left[2e^{-2x}x-1+e^{-2x}\right] = \frac{e^{-2x}}{2x^2}\underbrace{(2x+1-e^{2x})}_{e^{2x}\ge 2x+1}\le 0$

φ est continue sur $[0,1]$ dérivable sur $]0,1[$ (ou $]0,1]$) et de dérivée négative ; par conséquent :

φ est décroissante sur $[0,1]$. $\forall x\in[0,1]$, $\varphi(0)\ge\varphi(x)\ge\varphi(1)$. $\forall x\in[0,1]$, $1\ge\varphi(x)\ge\varphi(1)=\underbrace{\frac{1-e^{-2}}{2}}_{\simeq 0,43}\ge 0,4$!!

Remarque.. On pouvait aussi étudier $\psi_1: x\mapsto\varphi(x)-0,4$ et $\psi_2: x\mapsto\varphi(x)-1$

$\psi_1'=\psi_2'=\varphi'$. En cas de problème pour le signe de φ' on pouvait redériver $x\mapsto 2e^{-2x}x-1+e^{-2x}$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1\frac{2x^2e^{-(2n+1)x}}{1-e^{-2x}}dx = \int_0^1\frac{1}{\varphi(x)}xe^{-(2n+1)x}dx \le \int_0^1\frac{1}{0,4}xe^{-(2n+1)x}dx = 2,5\int_0^1 xe^{-(2n+1)x}dx$

$\int_0^1 f_n(x)dx \le 2,5\int_0^1 \underbrace{x}_{x\le 1\,!}e^{-(2n+1)x}dx \le 2,5\int_0^1 e^{-(2n+1)x}dx = 2,5\left[\frac{e^{-(2n+1)x}}{-(2n+1)}\right]_0^1 = \frac{2,5}{2n+1}(1-e^{-(2n+1)})\le\frac{2,5}{2n+1}$.

b.. $\forall x\in[1,+\infty[$, $e^{-2x}\ge 0$; $\forall x\in[1,+\infty[$, $1-e^{-2x}\le 1$!

$\forall x\in\mathbb{R}$, $0,8\le 1-e^{-2x}\iff e^{-2x}\le 0,2\iff -2x\le\ln(0,2)\iff x\ge-\frac{\ln(0,2)}{2}\simeq 0,805$

Donc $\forall x\in[1,+\infty[$, $0,8\le 1-e^{-2x}\le 1$.

$$\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{x^2 e^{-(2n+1)x}}{1-e^{-2x}}\,dx \le \int_1^{+\infty}\frac{1}{0,8}\,x^2 e^{-(2n+1)x}\,dx \le \frac{2}{0,8}K(2n+1) = 2,5\times\frac{2}{(2n+1)^3} = \frac{5}{(2n+1)^3}$$

$n\in\mathbb{N}^*$

$$\int_1^{+\infty} x^2 e^{-(2n+1)x}\,dx \le \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(2n+1)x}\,dx$$

En particulier $\int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx \le \frac{5}{2n+1}$ ($(2n+1)^3 \ge 2n+1$!)

c) d) donc $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \le \frac{2,5}{2n+1} + \frac{5}{2n+1} = \frac{7,5}{2n+1}$; $0 \le \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = I_n \le \frac{7,5}{2n+1}$. Par conséquent

$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. Ceci prouve que : $I = \lim_{n\to+\infty}\left(2\sum_{k=0}^{n-1}K(2k+1)\right)$

donc $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-e^{-x}}\,dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty}K(2n+1) = 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$; $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{1}{4}I$

Dans ce problème apparaît la fonction $x\mapsto\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; c'est la fonction sinus hyperbolique, on la note sh
la fonction cosinus hyperbolique est : $x\mapsto\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, on la note ch

ch et sh sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. ch est paire sur $\mathbb{R}$ et sh impaire.

ch' = sh et sh' = ch (ici c'est simple !)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'x$		$-$	0	$+$	
$ch\,x$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh'x$		$+$		$+$	
$sh\,x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$ch\,x + sh\,x = e^x$, $ch\,x - sh\,x = e^{-x}$

$ch^2x - sh^2x = 1$

$sh(a+b) = sh\,a\,ch\,b + ch\,a\,sh\,b$ et $sh(a-b) = sh\,a\,ch\,b - ch\,a\,sh\,b$

$ch(a+b) = ch\,a\,ch\,b + sh\,a\,sh\,b$ et $ch(a-b) = ch\,a\,ch\,b - sh\,a\,sh\,b$.

$sh\,2a = 2\,sh\,a\,ch\,a$ $\quad ch\,2a = ch^2a + sh^2a = 2ch^2a - 1 = 2sh^2a + 1$

$sh\,p + sh\,q = 2\,sh\frac{p+q}{2}\,ch\frac{p-q}{2}$

$sh\,p - sh\,q = 2\,ch\frac{p+q}{2}\,sh\frac{p-q}{2}$

$ch\,p + ch\,q = 2\,ch\frac{p+q}{2}\,ch\frac{p-q}{2}$

$ch\,p - ch\,q = 2\,sh\frac{p+q}{2}\,sh\frac{p-q}{2}$

$ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

On peut encore définir la tangente hyperbolique ($th = \frac{sh}{ch}$) et la cotangente hyperbolique ($coth = \frac{ch}{sh}$).

On peut aussi définir des fonctions réciproques associées (Argsh , Argch , Argth , Argcoth).

Argsh est définie sur $\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $Argsh\,x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

Argch ——— $[1,+\infty[$. $\forall x\in[1,+\infty[$, $Argch\,x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

Argth ——— $]-1,1[$ et $\forall x\in]-1,1[$, $Argth\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $Argsh'x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\forall x\in]1,+\infty[$, $Argch'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $\forall x\in]-1,1[$, $Argth'x = \frac{1}{1-x^2}$.