On note n un entier naturel, $n \geqslant 2$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, I l'identité de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-k+1}$, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. IV.14

ESCL 88

PB 1

1. a) Exprimer $f \circ f$ en fonction de I et de n.

   b) En déduire que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, et calculer f^{-1} en fonction de f.

2. Écrire la matrice de f relativement à B.

3. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 5$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ; f est-il diagonalisable ?

4. On revient au cas général.

   a) Pour tout entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}]$ et tout réel λ, calculer $f(e_k + \lambda e_{n-k+1})$.

   b) Montrer que, pour chaque entier k de l'intervalle $[1 ; \frac{n+1}{2}[$, il existe deux réels distincts a_k et b_k, que l'on calculera, tels que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f. Examiner le cas où $2k = n + 1$.

   c) Montrer que f est diagonalisable.

Q1. a) Soit $k \in [\![1, n]\!]$, $f(f(e_k)) = f(2^{k-1} e_{n-k+1}) = 2^{k-1} f(e_{n-k+1}) = 2^{k-1} 2^{n-k+1-1} e_{n-(n-k+1)+1}$

$\underline{\forall k \in [\![1, n]\!],}\ f(\underline{f(e_k)) = 2^{n-1} e_k}$

$2^{n-1} I$ et $f \circ f$ coïncident sur la base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$; par conséquent : $f \circ f = 2^{n-1} I$

b) $f \circ (\frac{1}{2^{n-1}} f) = I = (\frac{1}{2^{n-1}} f) \circ f$; f est donc bijective et $f^{-1} = \frac{1}{2^{n-1}} f$

$\underline{f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ et } f^{-1} = \frac{1}{2^{n-1}} f}$

Q2. $f(e_1) = e_n$, $f(e_2) = 2 e_{n-1}$, $f(e_3) = 2^2 e_{n-2}$, ..., $f(e_k) = 2^{k-1} e_{n-(k-1)}$, ..., $f(e_n) = 2^{n-1} e_1$

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} & O & & 2^{n-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & 2 \ 2^2 & & O \end{bmatrix}$$

Q3. Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(f)$. Soit $u \in F_\lambda$ et $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. $f(u) = \lambda u$; $f^2(u) = \lambda f(u) = \lambda^2 u$, $2^{5-1} u = \lambda^2 u$;

$\lambda^2 = 2^4 = 16$; $\lambda = 4$ ou -4. $\mathrm{Spec}(f) \subset \{-4, 4\}$.

$$M_B(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $u = x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4 + u e_5 \in E$

$$u \in F_4 \Leftrightarrow f(u) = 4u \Leftrightarrow \begin{cases} 16 u = 4x \\ 8t = 4y \\ 4z = 4z \\ 2y = 4t \\ x = 4u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4u \\ y = 2t \end{cases}$$

⚠ Voir dans le bœuf... annuler T10 une grossière erreur de calcul ($2y - 4t \Rightarrow y - 4t = 0$)

$F_4 = \{u = x e_1 + y e_2 + z e_3 + t e_4 + u e_5 \in E \mid x = 4u \text{ et } y = 2t\}$

$F_4 = \{u = 4u e_1 + 2t e_2 + z e_3 + t e_4 + u e_5 \in E \mid (z, t, u) \in \mathbb{R}^3\} = \{u = u(4e_1 + e_5) + t(2e_2 + e_4) + z e_3 \in E \mid (z, t, u) \in \mathbb{R}^3\}$

Finalement $F_4 = \mathrm{Vect}(4e_1 + e_5, 2e_2 + e_4, e_3)$; en particulier $4 \in \mathrm{Spec}(f)$.

$u\in F_{-4} \iff \begin{cases}16u=-4x\\ 8t=-4y\\ 4z=-4z\\ 2y=-4t\\ x=-4u\end{cases} \iff \begin{cases}x=-4u\\ y=-2t\\ z=0\end{cases}$

$F_{-4}=\{-4ue_1-2te_2+te_4+ue_5\in E\mid (t,u)\in\mathbb{R}^2\}=\mathrm{Vect}(-4e_1+e_5,-2e_2+e_4)$; donc $-4\in \mathrm{Spec}(f)$.

Finalement : $\mathrm{Spec}(f)=\{-4,4\}$. $\dim_{\mathbb{R}} F_{-4}+\dim_{\mathbb{R}} F_4=2+3=5=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^5$; f est diagonalisable.

Q4.- a) Soit $k\in [\![1,\frac{n+1}{2}]\!]$. $f(e_k+\lambda e_{n-k+1})=f(e_k)+\lambda f(e_{n-k+1})=2^{k-1}e_{n-k+1}+\lambda 2^{n-k}e_k$

b) Soit $k\in [\![1,\frac{n+1}{2}[\![$ et soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

$f(e_k+\lambda e_{n-k+1})=\alpha(e_k+\lambda e_{n-k+1}) \iff 2^{k-1}e_{n-k+1}+\lambda 2^{n-k}e_k=\alpha(e_k+\lambda e_{n-k+1})$

$\underset{\substack{(e_k,e_{n-k+1})\text{ libre}\\ \text{car } k\neq n-k+1}}{\iff} \begin{cases}2^{k-1}=\alpha\lambda\\ \lambda 2^{n-k}=\alpha\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=\lambda 2^{n-k}\\ \lambda^2 2^{n-k}=2^{k-1}\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda^2=2^{2k-n-1}\\ \alpha=\lambda 2^{n-k}\end{cases}$

$f(e_k+\lambda e_{n-k+1})=\alpha(e_k+\lambda e_{n-k+1}) \iff \begin{cases}\lambda=2^{k-\frac{n+1}{2}}\\ \text{et}\\ \alpha=2^{\frac{n-1}{2}}\end{cases}$ ou $\begin{cases}\lambda=-2^{k-\frac{n+1}{2}}\\ \text{et}\\ \alpha=-2^{\frac{n-1}{2}}\end{cases}$

Finalement pr $k\in [\![1,\frac{n+1}{2}[\![$, $e_k+2^{k-\frac{n+1}{2}}e_{n-k+1}$ et $e_k-2^{k-\frac{n+1}{2}}e_{n-k+1}$ sont des vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $2^{\frac{n-1}{2}}$ et $-2^{\frac{n-1}{2}}$

ceci permet de dire que 1.. $2^{\frac{n-1}{2}}\in\mathrm{Spec}(f)$, $-2^{\frac{n-1}{2}}\in\mathrm{Spec}(f)$

2.. $\forall k\in [\![1,\frac{n+1}{2}[\![$, $e_k+2^{k-\frac{n+1}{2}}e_{n-k+1}\in F_{2^{\frac{n-1}{2}}}$ et $e_k-2^{k-\frac{n+1}{2}}e_{n-k+1}\in F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}$.

Supposons $2k=n+1$; $k=\frac{n+1}{2}$. $e_{n-k+1}=e_{\frac{n+1}{2}}=e_k$! } ceci suppose n impair.

$f(e_k)=2^{k-1}e_k=2^{\frac{n-1}{2}}e_k$; $e_k\in F_{2^{\frac{n-1}{2}}}$.

c.. Il ne reste plus qu'à conclure ... ou presque.

1er cas.. n est pair. $n=2p$ avec $p\in\mathbb{N}^*$. $[\![1,\frac{n+1}{2}[\![=[\![1,p]\!]$

$(e_1+2^{1-\frac{n+1}{2}}e_n, e_2+2^{2-\frac{n+1}{2}}e_{n-1},\dots,e_p+2^{p-\frac{n+1}{2}}e_{p+1})$ est une famille libre (vérification à faire)

d'éléments de $F_{2^{\frac{n-1}{2}}}$; par conséquent : $\dim_{\mathbb{R}}F_{2^{\frac{n-1}{2}}}\geq p$

$(e_1-2^{1-\frac{n+1}{2}}e_n, e_2-2^{2-\frac{n+1}{2}}e_{n-1},\dots,e_p-2^{p-\frac{n+1}{2}}e_{p+1})$ est une famille libre d'éléments de $F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}$;

par conséquent : $\dim_{\mathbb{R}}F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}\geq p$

$n=2p\geq \dim_{\mathbb{R}}(F_{2^{\frac{n-1}{2}}}+F_{-2^{\frac{n-1}{2}}})=\dim_{\mathbb{R}}(F_{2^{\frac{n-1}{2}}}\oplus F_{-2^{\frac{n-1}{2}}})=\dim_{\mathbb{R}}F_{2^{\frac{n-1}{2}}}+\dim_{\mathbb{R}}F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}\geq 2p$

Finalement $\dim_{\mathbb{R}}(F_{2^{\frac{n-1}{2}}}\oplus F_{-2^{\frac{n-1}{2}}})=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n$; $F_{2^{\frac{n-1}{2}}}\oplus F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}=\mathbb{R}^n$.

Ceci prouve 1°.. $2^{\frac{n-1}{2}}$ et $-2^{\frac{n-1}{2}}$ sont les seules valeurs propres de f

2°.. f est diagonalisable.

2°cas.. n est impair .. $n=2p+1$ avec $p\in\mathbb{N}^*$ $(n\geq 2)$. $[\![1,\frac{n+1}{2}[\![=[\![1,p]\!]$.

$(e_1+2^{1-\frac{n+1}{2}}e_n, e_2+2^{2-\frac{n+1}{2}}e_{n-1},\dots,e_p+2^{p-\frac{n+1}{2}}e_{p+2}, \underset{2p=n+1}{\underline{\underline{e_{p+1}}}})$ est une famille libre (à vérifier) de

$F_{2^{\frac{n-1}{2}}}$ donc $\dim_{\mathbb{R}}F_{2^{\frac{n-1}{2}}}\geq p+1$

On montre comme précédemment que $\dim_{\mathbb{R}}F_{-2^{\frac{n-1}{2}}}\geq p$ ... et que f est diagonalisable (le faire)

(Q1) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$; $f_n(x) = e^{-n(x+\frac{1}{x})} = \left[e^{-(x+\frac{1}{x})}\right]^n = (f_1(x))^n$.

De plus : $f_n(0)=0=(f_1(0))^n$

Finalement $\underline{\underline{f_n = f_1^n}}$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \dfrac{1}{x} e^{-(x+\frac{1}{x})} = \left(-\dfrac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right)\left(-e^{-x}\right)$

$\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0$; par conséquent $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=0$.

$\underline{\underline{f_1 \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f_1'(0)=0.}}$

$x\mapsto -(x+\frac{1}{x})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x\mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; par composition $x\mapsto e^{-(x+\frac{1}{x})}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

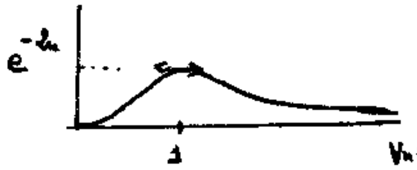
$\underline{\underline{f_1 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_1'(x) = \left(-1+\frac{1}{x^2}\right)e^{-(x+\frac{1}{x})}}}$

(Q2) f_1 est positive sur $\mathbb{R}_+$ et $x\mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; par composition les variations de f_n sont les variations de f_1 et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$\forall x\in[0,1[$, $f_1'(x)>0$; $f_1'(1)=0$ et $\forall x\in]1,+\infty[$, $f_1'(x)<0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$

Notons que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f_n' = n f_1' f_1^{n-1}$ donc $f_n'(1)=0$. Notons aussi que $f_n(1)=e^{-2n}$



On a aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=0$; la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe représentative de f_n. $0< f_1(x)\le e^{-2}<1$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $f_{n+1}(x)-f_n(x) = (f_1(x))^n[f_1(x)-1] < 0$. $f_{n+1}(0)-f_n(0)=0$

La courbe représentative de f_{n+1} est en dessous de la courbe représentative de f_n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Par monotonie : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in\mathbb{R}_+$, $f_n(x)\le f_n(1)=e^{-2n}$.

(Q3) a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $g_n(x) = f_n(x) - a(x-1)$.

1er cas.- $a>0$. $\forall x\in[0,1]$, $g_n(x)>0$. g_n ne s'annule pas sur $[0,1]$.

Sur $[1,+\infty[$ f_n et $x\mapsto -a(x-1)$ sont strictement décroissantes donc g_n est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. g_n définit une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]-\infty, e^{-2n}]$ car $g_n(1)=e^{-2n}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)=-\infty$

$0\in]-\infty,e^{-2n}]$; $\exists! u_n\in[1,+\infty[$, $g_n(u_n)=0$.

Finalement g_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+$ en u_n ; $u_n\in]1,+\infty[$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\exists! u_n\in\mathbb{R}_+$, $f_n(u_n)=a(u_n-1)$ ... cqfd.

2ème Cas. $a < 0$. $\forall x \in [1, +\infty[$, $g_n(x) = f_n(x) - a(x-1) > 0$; g_n ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. ②

f_n et $x \mapsto -a(x-1)$ sont strictement croissantes sur $[0,1]$ donc g_n aussi.

g_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$; g_n définit une bijection de $[0,1]$ sur $g_n([0,1]) = [g_n(0), g_n(1)] = [a, e^{-2n}]$.

$0 \in [a, e^{-2n}]$, par conséquent $\exists!\, u_n \in [0,1]$, $g_n(u_n) = 0$.

Finalement g_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+$: en u_n ; $u_n \in [0,1]$, mieux $u_n \in]0,1[$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists!\, u_n \in \mathbb{R}_+$, $f_n(u_n) = a(u_n - 1)$ ... cqfd

<u>b)</u> $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = a(u_n - 1)$ — plus directement : $u_n - 1 = \frac{1}{a} f(u_n)$ ...

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a(u_n - 1)| = |f_n(u_n)| = f_n(u_n) \leq e^{-2n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-2n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (a(u_n - 1)) = 0$; comme a n'est pas nul : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - 1) = 0$

Par conséquent $\underline{\underline{(u_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers } 1.}}$

<u>c)</u> Dans la question précédente a est fixe ; ici "on change de a en même temps que de n !"
Cela étant en appliquant $0 < a$, pour n fixé, à f_n et $a = \frac{1}{n}$ on a l'existence d'un v_n et un seul tel que $f_n(v_n) = \frac{1}{n}(v_n - 1)$; notons que $v_n > 1$ $(\ldots \frac{1}{n} > 0)$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n - 1| = n f_n(v_n) \leq n e^{-2n}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} n e^{-2n} = 0$ (négligeabilité classique) donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - 1) = 0$; $\underline{\underline{(v_n)_{n \geq 1} \text{ converge vers } 1.}}$

<u>d)</u> Notons qu'ici le concepteur a fait une petite erreur en prenant $n \in \mathbb{N}^*$.

En effet pour $n = 1$ la droite joignant "$A(1,0)$" et "$\Pi_n(n, f(n))$" est parallèle à l'axe des ordonnées et n'a pas de pente. Nous supposerons donc ici $n \geq 2$ lorsque nous parlerons de a_n.

On a alors $a_n = \dfrac{f_n(n)}{n-1} = \dfrac{1}{n-1} e^{-n(n + \frac{1}{n})} = e^{-n^2} \times \dfrac{e^{-1}}{n-1}$.

$\dfrac{e^{-1}}{n-1} = \dfrac{1}{e(n-1)} > \dfrac{1}{4(n-1)} \geq \dfrac{1}{n^2}$ $\quad \left(\dfrac{1}{4(n-1)} \geq \dfrac{1}{n^2} \Leftrightarrow n^2 \geq 4n - 4 \Leftrightarrow (n-2)^2 \geq 0 \right)$; $\dfrac{e^{-1}}{n-1} > \dfrac{1}{n^2}$

Donc $a_n = e^{-n^2} \dfrac{e^{-1}}{n-1} > e^{-n^2} \times \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{e^{-n^2}}{n^2}$. $\underline{\underline{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \Rightarrow a_n > \dfrac{e^{-n^2}}{n^2}.}}$

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Reprenons la fonction g_n avec $a = \dfrac{e^{-n^2}}{n^2}$; $a > 0$.

$\forall x \in [0, w_n[$, $g_n(x) > 0$; $g_n(w_n) = 0$ et $\forall x \in]w_n, +\infty[$, $g_n(x) < 0$ (voir ce qui a été dit sur g_n dans le cas où $a > 0$).

Pour montrer que $w_n > n$ il suffit donc de montrer que $g_n(n) > 0$.

$$g_n(n) = f_n(n) - \frac{e^{-n^2}}{n^2}(n-1) = \begin{cases} e^{-2} > 0 & \text{si } n = 1 \\ = (n-1)\left[\dfrac{f_n(n)}{n-1} - \dfrac{e^{-n^2}}{n^2}\right] = (n-1)\left[a_n - \dfrac{e^{-n^2}}{n^2}\right] \underset{n \geq 2 \text{ et } a_n > \frac{e^{-n^2}}{n^2}}{>} 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas on a $g_n(n) > 0$.

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ n<\omega_n$. $\lim_{n\to+\infty} n=+\infty$ donne donc $\underline{\lim_{n\to+\infty}\omega_n=+\infty}$

Q4 Soit $x\in\mathbb{R}_+$. $f_n(x)=(f_1(x))^n$ et $|f_1(x)|\leq e^{-2}<1$.

Par conséquent la série de terme général $f_n(x)$ converge (... série géométrique). $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=0$ pour $x=0$.

Pour $x\neq0$: $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(f_1(x))^n=f_1(x)\times\frac{1}{1-f_1(x)}=\frac{e^{-(x+\frac{1}{x})}}{1-e^{-(x+\frac{1}{x})}}$. $\underline{\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=e^{-(x+1/x)}/1-e^{-(x+1/x)}}$

Q5 a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et F_n est la primitive de f_n sur $\mathbb{R}_+$ qui prend la valeur 0 en 0.

F_n est donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $F_n'=f_n$.

Par conséquent : $F_n'(0)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ F_n'(x)>0$.

F_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ -n(x+\frac{1}{x})<-nx$; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ f_n(x)=e^{-n(x+\frac{1}{x})}\leq e^{-nx}$

Si $x=0$ $f_n(x)=0<e^{-n\times0}$.

Finalement : $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f_n(x)<e^{-nx}$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ F_n(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt\leq\int_0^x e^{-nt}\,dt=\left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^x=\frac{1}{n}(1-e^{-nx})<\frac{1}{n}$.

(< pour $x>0$!)

F_n est donc une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ et majorée (par $\frac{1}{n}$) ; elle admet donc une limite finie en $+\infty$, inférieure à $1/n$

$I_n=\lim_{x\to+\infty}F_n(x)=\int_0^{+\infty}f_n(t)\,dt$ existe et $I_n\leq\frac{1}{n}$.

Notons encore que F_n est positive sur $\mathbb{R}_+$ ($\forall t\in\mathbb{R}_+, f_n(t)\geq0$) donc par passage à la limite au chtiost $0\leq I_n$.

Finalement : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ 0\leq I_n\leq\frac{1}{n}$; par conséquent : $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$

c) $n\in\mathbb{N}^*$ $F_n: x\mapsto\int_0^x f_n(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$ donc $x\mapsto\int_1^x f_n(t)\,dt$ aussi ($\int_1^x f_n(t)dt=F_n(x)-\int_0^1 f_n(t)dt$)

$K_n=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f_n(t)\,dt=\int_1^{+\infty}f_n(t)\,dt$ existe.

On a aussi $K_n=I_n-\int_0^1 f_n(t)\,dt$ c'est à dire $I_n=J_n+K_n$ avec $J_n=\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

$J_n=\int_0^1 f_n(t)\,dt$ donc $0\leq J_n\leq\int_0^1 f_n(1)\,dt=e^{-2n}$ ($\forall t\in[0,1],\ f_n(t)\leq f_n(1)$)

La série de terme général e^{-2n} converge (en effet : $e^{-2n}=\left(\frac{1}{e^2}\right)^n$ et $0<\frac{1}{e^2}<1$) donc la série de terme général J_n aussi.

$\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\leq\int_1^x f_n(t)\,dt\leq\int_1^x e^{-nt}\,dt=\frac{1}{n}(e^{-n}-e^{-nx})\leq\frac{e^{-n}}{n}$

A la limite : $0\leq K_n\leq\frac{e^{-n}}{n}\leq e^{-n}$

La série de terme général e^{-n} converge ($e^{-n}=\left(\frac{1}{e}\right)^n$ et $|\frac{1}{e}|<1$) donc la série de terme général K_n aussi.

Comme $I_n=J_n+K_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série de terme général I_n converge.