

PROBLÈME 1

Q1. a) soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a une équité de genre de $A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{2} & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + (\frac{\lambda^2}{2} - 1) L_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} (4 - \lambda^2) \end{bmatrix}$$

$$\lambda \in \text{Spec}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I \text{ non inversible} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\lambda}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} (4 - \lambda^2) \end{bmatrix} \text{ non inversible} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} (4 - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 0, 2\}.$$

c) Les valeurs propres de A_3 sont: $-2, 0$ et 2 .

b) A_3 est diagonalisable car A_3 possède trois valeurs propres distinctes et A_3 est un élément de $M_3(\mathbb{K})$.

▼ Remarque... les sous-espaces propres associés aux valeurs propres $-2, 0$ et 2 sont les droites vectorielles respectivement engendrées par: $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ est une matrice inversible. } P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P^{-1} A P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \blacktriangledown$$

c) 0 est valeur propre de A_3 donc A_3 n'est pas inversible.

Q2 a) $u(j) = (n-1)x$, $\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $u(n) = jx^{j-1} + (n-1-j)x^{j+1}$ et $u(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2}$.

b) soit $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ un élément de E . Calculer $Q = (n-1)x P(x) - (x^2-1) P'(x)$.

$$Q = (n-1)x \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j - (x^2-1) \sum_{j=1}^{n-1} j a_j x^{j-1} = (n-1)a_0 x + (n-1) \sum_{j=1}^{n-1} a_j x^{j+1} - \sum_{j=1}^{n-1} j a_j x^{j+1} + \sum_{j=1}^{n-1} j a_j x^{j-1};$$

$$Q = a_0 (n-1)x + \sum_{j=1}^{n-1} (n-1-j) a_j x^{j+1} + \sum_{j=1}^{n-1} j a_j x^{j-1};$$

$$Q = a_0 (n-1)x + \sum_{j=1}^{n-2} a_j [(n-1-j)x^{j+1} + j x^{j-1}] + (n-1-(n-1))a_{n-1} x^n + (n-1)a_{n-1} x^{n-2};$$

$$Q = a_0 u(1) + \sum_{j=1}^{n-2} a_j u(j) + 0 + a_{n-1} u(x^{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u(j) = u\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j\right) = u(P).$$

Finalement: $\forall P \in E, u(P) = (n-1)x P(x) - (x^2-1)P'(x).$

Q3) $P \in E, P \neq 0_E$ et $(n-1)X P(X) - (X^2-1)P'(X) = \lambda P(X)$ ou $(n-1)XP - (X^2-1)P' = \lambda P$

a) On suppose $\lambda \neq n-1$.

$$(n-1)XP(1) - (1^2-1)P'(1) = \lambda P(1); (n-1)P(1) = \lambda P(1); P(1) = 0 \text{ car } \lambda \neq n-1.$$

Si $\lambda \neq n-1$: 1 est racine de P.

b) On suppose $\lambda \neq 1-n$.

$$(n-1)(-1)P(-1) - ((-1)^2-1)P'(-1) = \lambda P(-1); (1-n)P(-1) = \lambda P(-1); P(-1) = 0 \text{ car } \lambda \neq 1-n.$$

Si $\lambda \neq 1-n$: -1 est racine de P.

c) $\lambda = n-1$. Mais -1 est racine de P car $\lambda \neq 1-n$. Soit α l'ordre de multiplicité de 1 dans P et T le quotient de P par $(X+1)^\alpha$.

$$P = (X+1)^\alpha T \text{ et } T(-1) \neq 0.$$

$$\lambda P = (n-1)XP - (X^2-1)P'; (n-1)(X+1)^\alpha T = (n-1)X(X+1)^\alpha T - (X^2-1)(X+1)^{\alpha-1}T' - (X^2-1)(X+1)^\alpha T'$$

divisons par $(X+1)^\alpha$. On voit : $(n-1)T = (n-1)XT - (X-1)T' - (X^2-1)T'$.

En prenant la valeur en -1 et en divisant par $T(-1)$ on obtient :

$$(n-1) = (n-1)(-1) + 2\alpha; \text{ c'est à dire } \underline{\alpha = n-1}$$

$P = (X+1)^{n-1}T$. Comme $\deg P \leq n-1$: T est nécessairement constant. P n'est pas nul, T ne l'est pas davantage.

Finalement $P = (X+1)^{n-1}T$ où T est un polynôme constant et non nul.

Remarque... Ceci prouve que : $\text{Ker}(u - (n-1)\text{Id}_E) \subset \text{Vect}((X+1)^{n-1})$

d) $\lambda = 1-n$ même démarche que pour c)

Remarque... On prouve ainsi que : $\text{Ker}(u - (1-n)\text{Id}_E) \subset \text{Vect}((X-1)^{n-1})$

e) $\lambda \neq (n-1)$ et $\lambda \neq 1-n$.

1 et -1 sont racines de P. Soit 2 (resp. 1) l'ordre de multiplicité de $+1$ (resp. -1) dans P.

Notons T le quotient de P par $(X-1)^r(X+1)^\alpha$.

$$P = (X-1)^r(X+1)^\alpha T \text{ avec } T(1) \neq 0 \text{ et } T(-1) \neq 0.$$

$$\lambda(X-1)^r(X+1)^\alpha T = \lambda P = (n-1)XP - (X^2-1)P' = (n-1)X(X-1)^r(X+1)^\alpha T - (X^2-1)(X-1)^{r-1}(X+1)^\alpha T' - (X^2-1)(X-1)^r(X+1)^{\alpha-1}T'$$

En divisant par $(X-1)^r(X+1)^s$ il vient :

$$\lambda T = (n-1)XT - r(X+1)T - s(X-1)T - (X^2-1)T'$$

En prenant la valeur $n-1$ et en divisant par $T(1)$ on obtient : $\lambda = (n-1) - 2r$
 $-1 \quad \quad \quad T(-1) \quad \quad \quad : \lambda = -(n-1) + 2s$

Par soustraction il vient : $0 = 2(n-1) - 2r - 2s$; ou : $r+s = n-1$, ou $s = n-1-r$

En conséquence : $\begin{cases} s = n-1-r \\ \text{et} \\ \lambda = n-1-2r \end{cases}$. $\lambda \in \mathbb{N}^*$ donc $n-1-r \geq 1$; $r \leq n-2$; $1 \leq r \leq n-2$

Finalement : $\begin{cases} 1 \leq r \leq n-2 \\ s = n-1-r \\ \lambda = n-1-2r \end{cases}$

$P = (X-1)^r(X+1)^s T = (X-1)^r(X+1)^{n-1-r} T$. A $\deg P \leq n-1$ et $\deg(X-1)^r(X+1)^{n-1-r} = n-1$;
 par conséquent T est constant et non nul car P n'est pas nul.

▼ Remarque 1.. ce qui précède indique que :

$$\forall r \in [1, n-2], \text{Ker}(u - (n-1-2r)\text{Id}_E) \subset \text{Vect}((X-1)^r(X+1)^{n-1-r})$$

Avec c) et d) on a même $\forall r \in [0, n-1], \text{Ker}(u - (n-1-2r)\text{Id}_E) \subset \text{Vect}((X-1)^r(X+1)^{n-1-r})$.

2.. Φ_3 indique donc que : $\text{Spec } u \subset \{n-1-2r ; r \in [0, n-1]\}$ et que
 pour tout $r \in [0, n-1]$, $\text{Ker}(u - (n-1-2r)\text{Id}_E) \subset \text{Vect}((X-1)^r(X+1)^{n-1-r})$.

Si on nous prouve que pour tout $r \in [0, n-1]$, $u((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}) = (n-1-2r)(X-1)^r(X+1)^{n-1-r}$
 nous aurons des égalités à la place des inclusions. ▼

$\textcircled{\Phi_4}$ a) fait $r \in [0, n-1]$.

$$u((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}) = (n-1)X(X-1)^r(X+1)^{n-1-r} - (X^2-1)r(X-1)^{r-1}(X+1)^{n-1-r} - (X^2-1)(X-1)^r(n-1-r)(X+1)^{n-2-r}$$

$$u((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}) = (X-1)^r(X+1)^{n-1-r} [(n-1)X - r(X+1) - (n-1-r)(X-1)] = (n-1-2r)(X-1)^r(X+1)^{n-1-r}$$

$$\underline{\underline{\forall r \in [0, n-1], u((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}) = (n-1-2r)(X-1)^r(X+1)^{n-1-r}}}$$

b) Φ_4 a) montre alors que pour tout $r \in [0, n-1]$, $n-1-2r$ est valeur

propre de u donc de A_n . A_n a donc au moins n valeurs propres distinctes ;

A_n a donc n valeurs propres distinctes puisque $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A_n est donc diagonalisable

La famille $\mathcal{B}$ est constituée de n vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. $\mathcal{B}$ est donc une famille libre de n vecteurs de E , comme $\dim E = n$: $\mathcal{B}$ est une base de E .

- Q5) A_n inversible $\Leftrightarrow 0 \notin \text{Spec } A_n \Leftrightarrow \nexists r \in [0, n-1], n-1-2r=0$
 A_n inversible $\Leftrightarrow \nexists r \in [0, n-1], r = \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow n-1$ n'est pas pair $\Leftrightarrow n$ est pair.

CL... A_n est inversible, ni est possible si n est pair.

▼ Remarque 1... Q3 est un peu vague. Rapportant de $P \in E, P \neq 0 \in E$ et $u(P) = \lambda P$.

$$\text{Alors: } ((n-1)x - \lambda)P = (x^2 - 1)P'.$$

Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$ et k son ordre de multiplicité. Supposons $a \neq 1$ et $a \neq -1$ ($x-a$ divise P , donc $((n-1)x - \lambda)P$, donc $(x^2 - 1)P'$, donc P' (car $a \neq 1$ et $a \neq -1$).

Ceci signifie que l'ordre de multiplicité de a dans P' est au moins k alors que nous savons que cet ordre est $k-1$! des contradictions possibles de P dans $\mathbb{C}$ sont -1 et 1 .

Pour conséquent $\exists c \in \mathbb{R}^*, \exists r \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, P = c(x-1)^r(x+1)^p$

Notons q le degré de P . $q = r+p$. Soit a_q le coefficient de x^q dans P ; $a_q \neq 0$.

$((n-1)x - \lambda)P = (x^2 - 1)P'$. Le coefficient de x^{q+1} dans le 1^{er} membre est $(n-1)a_q$; dans le 2nd membre c'est qa_q ; donc $q = n-1$

Pour conséquent: $r+p = n-1$. Comme r et p sont dans $\mathbb{N}$: $r \in [0, n-1]$.

$$P = c(x-1)^r(x+1)^p \text{ et } ((n-1)x - \lambda)P = (x^2 - 1)P'; -\lambda P(0) = -P'(0); \lambda P(0) = P'(0).$$

$$P(0) = c(-1)^r, P'(0) = cr(-1)^{r-1} + cp(-1)^p. \text{ Donc } \lambda c(-1)^r = cr(-1)^{r-1} + c p(-1)^p.$$

En divisant par $c(-1)^r$ il vient: $\lambda = -r + p = n-1-2r$

ce qui prouve que 1^o. $\text{Spec } u \subset \{n-1-2r; r \in [0, n-1]\}$

$$2^o. $\forall r \in [0, n-1], K((u - (n-1-2r)\text{Id}_E) \subset \text{Vect}((x-1)^r(x+1)^{n-1-r}).$$$

2... Il faut pouvoir montrer à la main que $\mathcal{B}$ est une famille libre de E . Plus généralement il faut pouvoir prouver que si a et b sont deux éléments distincts de K ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $n \in \mathbb{N}^*$, $((x-a)^n, (x-a)^{n-1}(x-b), \dots, (x-b)^n) = ((x-a)^k(x-b)^{n-k})_{k \in [0, n]}$ est une famille libre de $K[X]$ (donc une base de $K_n[X]$)

Supposons cette famille liée. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^{n+1}, \sum_{k=0}^n \alpha_k (x-a)^k (x-b)^{n-k} = 0$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0_{K^{n+1}}$

Soit $i = \min\{k \in [0, n], \alpha_k \neq 0\}$. $\alpha_i \neq 0$.

$$0 = \sum_{k=i}^n \alpha_k (x-a)^k (x-b)^{n-k}. \text{ Divisons par } (x-a)^i; \text{ il vient: } \alpha_i (x-b)^{n-i} + \sum_{k=i+1}^n \alpha_k (x-a)^{k-i} (x-b)^{n-k} = 0$$

En prenant la valeur a à la place de x on obtient: $\alpha_i (a-b)^{n-i} = 0$ donc $\alpha_i = 0$!! contradiction... ▼

PROBLEME 2

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

(Q1) Etude globale de F sur $\mathbb{R}^*$

a) Soit $x \in]0, +\infty[$. $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \leq 1$; donc $0 \leq x F(x) \leq \int_0^x 1 dt = x$.

$$\underline{\forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leq F(x) \leq 1.}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $F(-x) = -\frac{1}{x} \int_0^{-x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = -\frac{1}{x} \int_0^x \frac{-dy}{\sqrt{1+y^4}} = F(x)$. De plus $F(-0) = F(0)$;

F est paire sur $\mathbb{R}$.

c) $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$, qui prend la valeur 0 à 0; c'est donc une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ étant C^1 sur $\mathbb{R}^*$, F est C^1 sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de deux fonctions C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}. \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F(x) + x F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = r(x^4).$$

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x F'(x) = -F(x) + r(x^4).}$$
 Ajoutons F à C^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad x F'(x) = -F(x) + r(x^4).$$

d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall t \in [0, x]$, $r(x^4) \leq r(t^4)$ car r décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\text{En intégrant sur } \mathcal{I}: \quad x r(x^4) = \int_0^x r(x^4) dt \leq \int_0^x r(t^4) dt = x F(x)$$

En divisant par x on obtient: $r(x^4) \leq F(x)$.

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad r(x^4) \leq F(x).}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x F'(x) = -F(x) + r(x^4) \leq 0. \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) \leq 0.$$

F est décroissante sur $]0, +\infty[$.

(Q2) Etude locale de F en 0.

a) Soit g la primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 à 0. g est dérivable à 0 et $g'(0) = 1$.

$$\text{Donc } 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}.$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = 1 = F(0)$. F est donc continue en 0.

b) α . r est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+, r'(t) = -\frac{1}{2(1+t)^{3/2}}$.

r est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+, r''(t) = \frac{3}{4(1+t)^{5/2}}$; r'' est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

Finalement r est C^2 sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $u \in [0, +\infty[$. Appliquons Taylor-Lagrange avec reste intégral à r sur $[0, u]$ à l'ordre 1. On a :

$$r(u) = r(0) + r'(0)u + \int_0^u \frac{(u-t)^2}{2} r''(t) dt = 1 - \frac{1}{2}u + \int_0^u (u-t) r''(t) dt$$

donc $r(u) - (1 - \frac{1}{2}u) = \int_0^u (u-t) r''(t) dt$.

$\forall t \in [0, u], 0 \leq (u-t) \frac{3}{4(1+t)^{5/2}} = (u-t) r''(t) \leq (u-t) \frac{3}{4} \quad (r''(t) = \frac{3}{4} \frac{1}{(1+t)^{5/2}})$

En intégrant on a : $0 \leq \int_0^u (u-t) r''(t) dt \leq \frac{3}{4} \int_0^u (u-t) dt = \frac{3}{4} \left[-\frac{(u-t)^2}{2} \right]_0^u = \frac{3}{8} u^2$

Finalement : $\forall u \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - (1 - \frac{1}{2}u) \leq \frac{3}{8} u^2$.

β . Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} - (1 - \frac{1}{2}t^4) \leq \frac{3}{8} t^8$

En intégrant on a : $0 \leq \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} - (x - \frac{1}{10}x^5) \leq \frac{3}{8} \frac{x^9}{9}$

donc $0 \leq F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4) \leq \frac{3}{72} x^8$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4) \leq \frac{3}{72} x^8$.

Notons que ceci vaut encore pour $x=0$ car $F(0)=1$.

Remarque : $\forall x \in \mathbb{R}^*, 0 \leq F(-x) - (1 - \frac{1}{10}(-x)^4) \leq \frac{3}{72} (-x)^8$; ceci donne par symétrie :

$\forall x \in \mathbb{R}^*, 0 \leq F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4) \leq \frac{3}{72} x^8$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4) \leq \frac{3}{72} x^8$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \left| \frac{F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4)}{x^2} \right| \leq \frac{3}{72} \frac{x^8}{|x|^2} = \frac{3}{72} |x|^6$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - (1 - \frac{1}{10}x^4)}{x^2} = 0$.

Par conséquent : $F(x) = (1 - \frac{1}{10}x^4) = o(x^7)$

Donc $F(x) = 1 - \frac{1}{10}x^4 + o(x^4)$. F admet un dl 7 en 0 !

A partir de $F(x) = 1 - \frac{1}{10}x^4 + o(x^4)$. F admet un dl 4 en 0 .

r.. F admet en particulier un dl 1 en 0 qui est : $F(x) = 1 + o(x)$.

F est donc dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}^*, x F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Rien $\forall x \in \mathbb{R}, x F(x) = \int_0^x f(t) dt$

En dérivant : $F(x) + x F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x F'(x) = -F(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = -(F(x)-1) + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} - 1 = -(F(x)-1) + \frac{1-\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x F'(x) = -(F(x)-1) + \frac{-x^4}{(1+\sqrt{1+x^4})(\sqrt{1+x^4})};$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{F'(x)}{x^3} = -\frac{F(x)-1}{x^4} - \frac{1}{(1+\sqrt{1+x^4})\sqrt{1+x^4}} \quad (\text{par division par } x^4).$$

$$\text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)-1}{x^4} = -\frac{1}{10} \quad (\text{car } F(x)-1 = -\frac{1}{10}x^4 + o(x^4)) \quad \& \quad \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{(1+\sqrt{1+x^4})\sqrt{1+x^4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{et finalement : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^3} = +\frac{1}{10} - \frac{1}{2} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} ; \quad \frac{F'(x)}{x^3} \underset{0}{\sim} -\frac{2}{5} ; \quad F'(x) \underset{0}{\sim} -\frac{2}{5}x^3$$

Donc $F'(x) = -\frac{2}{5}x^3 + o(x^3)$

c.l.. F' admet un dl 3 au voisinage de 0 : $F'(x) = -\frac{2}{5}x^3 + o(x^3)$.

► Remarque .. cette démonstration a consisté à dire que $F(x) = 1 - \frac{1}{10}x^4 + o(x^4)$ devrait donner $F'(x) = -\frac{4}{10}x^3 + o(x^3)$, résultat équivalent à

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^3} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5} ! \quad \text{à partir aussi parti de } F'(x) = -\frac{F(x)}{x} + \frac{f(x)}{x} \text{ et,}$$

écrire $F'(x) = -\frac{F(x)-1}{x} + (\frac{f(x)}{x} - 1)$ et faire une pousse de degré dl 3 ▼

a) Ce qui précède indique alors que $\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = 0 = F'(0)$; F est alors continue à 0.
 $\forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) = -\frac{F(x)}{x} + \frac{f(x^4)}{x}$; d'où F est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Pour conclure: F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ car F est dérivable et F est continue sur $\mathbb{R}$.

③ Etude locale de F en $+\infty$.

a) α . Soit $x \in]0, +\infty[$. $R(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \stackrel{z=1/t}{=} \int_1^{1/x} \frac{-\frac{1}{z^2} dz}{\sqrt{1+\frac{1}{z^4}}} = - \int_1^{1/x} \frac{dz}{z^2 \sqrt{1+\frac{1}{z^4}}} = - \int_1^{1/x} \frac{dz}{\sqrt{z^4+1}}$

$\forall x \in]0, +\infty[, R(x) + R(\frac{1}{x}) = 0$.

β . Soit $x \in]0, +\infty[$. $x F(x) + \frac{1}{x} F(\frac{1}{x}) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + \int_0^{1/x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + R(x) + R(\frac{1}{x})$.

$x F(x) + \frac{1}{x} F(\frac{1}{x}) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = L F(1)$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x F(x) + \frac{1}{x} F(\frac{1}{x}) = L F(1)$.

b) $\checkmark$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; $F(x) = \frac{L F(1)}{x} - \frac{1}{x^2} F(\frac{1}{x})$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(\frac{1}{x}) = \lim_{y \rightarrow 0^+} F(y) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$

Remarque: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (L F(1) - \frac{1}{x} F(\frac{1}{x})) = L F(1)$; $x F(x) \sim L F(1)$ ($L F(1) \neq 0$)

d'où $F(x) \sim \frac{L F(1)}{x}$.

β . $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F'(x) = -\frac{F(x)}{x} + \frac{f(x^4)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$. ∇

