
PARTIE I : Etude d'un produit scalaire.

Dans toute la suite nous nous autoriserons à noter E_k l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à k , et ceci pour tout k dans \mathbb{N} ...

Q1 a) Montrons tout d'abord que si Q est un élément de E : $\lim_{t \rightarrow +\infty} (Q(t) e^{-t}) = 0$. Si $Q = O_E$ ceci est une évidence. Supposons dès lors que Q est un élément non nul de E et considérons son terme de plus haut degré $a_p X^p$. Nous avons alors $Q(t) e^{-t} \sim a_p t^p e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$ et par croissance comparée $\lim_{t \rightarrow +\infty} (a_p t^p e^{-t}) = 0$; le résultat s'en déduit sans problème.

Ainsi si Q est un élément de E : $\lim_{t \rightarrow +\infty} (Q(t) e^{-t}) = 0$.

Soit P un élément de E . Montrons que $\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ converge. $u : t \rightarrow P(t) e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et donc localement intégrable sur cet intervalle.

Comme $X^2 P$ est un élément de E , d'après ce qui précède $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 P(t) e^{-t}) = 0$ ou $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2 u(t)) = 0$.

Il existe donc un réel A , strictement positif, tel que pour tout élément t de $[A, +\infty[$: $|t^2 u(t)| \leq 1$.

On a alors pour tout élément t de $[A, +\infty[$: $0 \leq |u(t)| \leq \frac{1}{t^2}$.

La convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_A^{+\infty} |u(t)| dt$ donc l'absolue convergence de $\int_A^{+\infty} u(t) dt$ et ainsi sa convergence.

Comme $\int_0^A u(t) dt$ existe : $\int_0^{+\infty} u(t) dt$ converge.

Ainsi pour tout élément P de E , $\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt$ converge.

b) Cela peut se faire de manière immédiate en utilisant la partie du programme concernant la fonction Γ . En effet pour tout élément k de \mathbb{N} : $I_{k+1} = \Gamma(k+2) = (k+1)\Gamma(k+1) = (k+1)I_k$ et $I_k = \Gamma(k+1) = (k+1-1)! = k!$.

Suivons la logique du texte et retrouvons ces deux résultats. La question précédente montre que I_k existe pour tout élément k de \mathbb{N} ($t \rightarrow t^k$ appartient à E).

Fixons k dans \mathbb{N} . Soit A un élément de $]0, +\infty[$. Une intégration par parties élémentaire donne :

$$\int_0^A t^{k+1} e^{-t} dt = [t^{k+1}(-e^{-t})]_0^A - \int_0^A (k+1)t^k(-e^{-t}) dt = -A^{k+1} e^{-A} + (k+1) \int_0^A t^k e^{-t} dt.$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} (A^{k+1} e^{-A}) = 0$ il vient en faisant tendre A vers $+\infty$: $I_{k+1} = (k+1)I_k$.

Pour tout élément k de \mathbb{N} : $\frac{I_{k+1}}{(k+1)!} = \frac{(k+1)I_k}{(k+1)!} = \frac{I_k}{k!}$. La suite $(I_k/k!)_{k \geq 0}$ est donc constante.

De plus son premier terme est $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-t} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} (-e^{-A} + 1) = 1$. Par conséquent, pour tout élément k de \mathbb{N} : $\frac{I_k}{k!} = 1$ ou $I_k = k!$.

Pour tout élément k de \mathbb{N} , $I_{k+1} = (k+1)I_k$ et $I_k = k!$.

Q2 a) Remarquons pour commencer que si P et Q sont deux éléments de E_n leur produit est un élément de E ; ainsi, d'après la première question, $\int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$ converge. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien alors une application de $E_n \times E_n$ dans \mathbb{R} . Montrons qu'il s'agit d'un produit scalaire.

• Si P et Q sont deux éléments de E_n , $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} Q(t) P(t) e^{-t} dt = \langle Q, P \rangle$.
 $\langle \dots \rangle$ est symétrique.

• Soient P, Q, R trois éléments de E_n et λ un réel.

$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(t) R(t) e^{-t} dt = \lambda \int_0^{+\infty} P(t) R(t) e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} Q(t) R(t) e^{-t} dt$ (car toutes les intégrales convergent).

Donc $\langle \lambda P + Q, R \rangle = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$. $\langle \dots \rangle$ est linéaire à gauche.

• Soit P un élément de E_n . $\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt$ et $t \rightarrow (P(t))^2 e^{-t}$ est une fonction positive ou nulle sur $[0, +\infty[$ donc $\langle P, P \rangle$ est positif ou nul.

Supposons que $\langle P, P \rangle = 0$. Fixons un élément B dans \mathbb{R}^{+*} . $0 \leq \int_0^B (P(t))^2 e^{-t} dt \leq \int_0^{+\infty} (P(t))^2 e^{-t} dt = 0$

Ceci donne alors : $\int_0^B (P(t))^2 e^{-t} dt = 0$. Ainsi la fonction $t \rightarrow (P(t))^2 e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0, B]$. Cette fonction est donc nulle sur $[0, B]$ et nécessairement : $\forall t \in [0, B], P(t) = 0$. La fonction polynôme P a alors une infinité de racines ; c'est donc la fonction nulle. Ainsi $\langle P, P \rangle = 0$ donne $P = 0_{E_n}$.

$\langle \dots \rangle$ est définie positive.

Les trois points précédents suffisent pour dire que $\langle \dots \rangle$ est un produit scalaire sur E_n .

Remarques 1. Dans la suite nous noterons $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

2. En posant : $\forall (P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$ on obtient un produit scalaire sur E .

3. On peut, de la même manière, définir encore un produit scalaire sur l'espace vectoriel (à démontrer...) des fonctions numériques f , continues sur $[0, +\infty[$ et telles que $\int_0^{+\infty} (f(t))^2 e^{-t} dt$ converge.

b) Soient i et j deux éléments de $\llbracket 0, n \rrbracket$. $\langle X^i, X^j \rangle = \int_0^{+\infty} t^i t^j e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} dt = I_{i+j} = (i+j)!$.

Si i et j sont deux éléments de $\llbracket 0, n \rrbracket$: $\langle X^i, X^j \rangle = (i+j)!$.

Q3 a) • La seule fonction polynôme unitaire de degré 0 est X^0 , il est donc raisonnable de poser $Q_0 = X^0 = 1$.

• Soit P une fonction polynôme unitaire de degré 1. Il existe un réel a tel que : $P = X + a$.

$\langle P, Q_0 \rangle = \langle X + a, 1 \rangle = \langle X^1, X^0 \rangle + a \langle X^0, X^0 \rangle = (1+0)! + a(0+0)! = 1 + a$. P est donc orthogonale à Q_0 si et seulement si $a = -1$. En posant : $Q_1 = X - 1$, nous obtenons une fonction polynôme unitaire de degré 1 orthogonale à Q_0 .

• Soit P une fonction polynôme unitaire de degré 2. Il existe deux réels b et c tels que : $P = X^2 + bQ_1 + cQ_0$ ((Q_0, Q_1) est clairement une base de E_1). Cherchons alors b et c pour que P soit orthogonale à Q_0 et Q_1 . Rappelons que Q_0 et Q_1 sont orthogonaux !

$\langle P, Q_0 \rangle = \langle X^2, Q_0 \rangle + b \langle Q_1, Q_0 \rangle + c \langle Q_0, Q_0 \rangle = \langle X^2, X^0 \rangle + c \langle X^0, X^0 \rangle = (2+0)! + c(0+0)! = 2 + c$.

$\langle P, Q_1 \rangle = \langle X^2, Q_1 \rangle + b \langle Q_1, Q_1 \rangle + c \langle Q_0, Q_1 \rangle = \langle X^2, X - 1 \rangle + b \langle X - 1, X - 1 \rangle$.

$\langle P, Q_1 \rangle = \langle X^2, X \rangle - \langle X^2, X^0 \rangle + b(\langle X, X \rangle - 2 \langle X, X^0 \rangle + \langle X^0, X^0 \rangle)$.

$\langle P, Q_1 \rangle = (2+1)! - (2+0)! + b((1+1)! - 2(1+0)! + (0+0)!) = 4 + b$.

Ainsi $P = X^2 + bQ_1 + cQ_0$ est orthogonale à Q_0 et Q_1 si et seulement si $c = -2$ et $b = -4$. Il est alors grand temps de poser $Q_2 = X^2 - 4Q_1 - 2Q_0 = X^2 - 4(X - 1) - 2 = X^2 - 4X + 2$. Q_2 est une fonction polynôme unitaire de degré 2 orthogonale à Q_0 et Q_1 .

$(Q_0, Q_1, Q_2) = (1, X - 1, X^2 - 4X + 2)$ est une famille orthogonale de fonctions polynômes telle que pour tout k dans $\llbracket 0, 2 \rrbracket$, Q_k soit unitaire et de degré k .

Remarques 1. Notons que non seulement nous avons trouvé une famille (Q_0, Q_1, Q_2) solution du problème posé mais nous avons également montré l'unicité de cette famille.

2. D'ailleurs il n'est pas difficile de montrer qu'il existe une famille orthogonale (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) de fonctions polynômes, et une seule, telle que pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, Q_k soit unitaire et de degré k (polynômes de Laguerre).

$Q_0 = 1$ et pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, Q_k est l'unique fonction polynôme unitaire appartenant à la droite vectorielle constituée par l'orthogonale de E_{k-1} dans E_k . Nous en reparlerons dans la partie II...

A titre d'exercice on pourra montrer que, pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, Q_k(x) = (-1)^k e^x \frac{d^k}{dx^k} (x^k e^{-x}) \quad \text{et} \quad \|Q_k\| = k!$$

Voir, à ce sujet, les parties I et II du problème d'Edhec 98.

b) Soit u et v deux réels. Posons dès maintenant $H(u, v) = \int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt$.

$$H(u, v) = \|X^2 + uX + v\|^2 = \|X^2 - 4X + 2 + (u+4)(X-1) + u + v + 2\|^2 = \|Q_2 + (u+4)Q_1 + (u+v+2)Q_0\|^2.$$

$H(u, v) = \|Q_2\|^2 + \|(u+4)Q_1 + (u+v+2)Q_0\|^2$ car Q_2 et $(u+4)Q_1 + (u+v+2)Q_0$ sont orthogonaux.

$H(u, v) = \|Q_2\|^2 + \|(u+4)Q_1\|^2 + \|(u+v+2)Q_0\|^2$ car $(u+4)Q_1$ et $(u+v+2)Q_0$ sont orthogonaux.

$$H(u, v) = \|Q_2\|^2 + (u+4)^2 \|Q_1\|^2 + (u+v+2)^2 \|Q_0\|^2.$$

On a donc $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt = \|Q_2\|^2 + (u+4)^2 \|Q_1\|^2 + (u+v+2)^2 \|Q_0\|^2$.

c) Notons que si u et v sont deux réels : $(u+4)^2$ et $(u+v+2)^2$ sont simultanément nuls si et seulement si $u = -4$ et $v = 2$.

Ainsi : $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, H(u, v) = \|Q_2\|^2 + (u+4)^2 \|Q_1\|^2 + (u+v+2)^2 \|Q_0\|^2 \geq \|Q_2\|^2 = H(-4, 2)$. Donc $\|Q_2\|^2$ est le minimum de H . Rappelons que $Q_2 = X^2 - 4Q_1 - 2Q_0$.

$$\|Q_2\|^2 = \langle Q_2, Q_2 \rangle = \langle Q_2, X^2 - 4Q_1 - 2Q_0 \rangle = \langle Q_2, X^2 \rangle - 4 \langle Q_2, Q_1 \rangle - 2 \langle Q_2, Q_0 \rangle = \langle Q_2, X^2 \rangle - 4 \langle Q_2, Q_1 \rangle - 2 \langle Q_2, Q_0 \rangle = \langle Q_2, X^2 \rangle.$$

$$\|Q_2\|^2 = \langle X^2 - 4X + 2, X^2 \rangle = \langle X^2, X^2 \rangle - 4 \langle X, X^2 \rangle + 2 \langle 1, X^2 \rangle = 4! - 4 \times 3! + 2 \times 2! = 4.$$

H admet un minimum qui vaut 4 et qui est atteint en $(-4, 2)$.

Remarques 1. Notons que H atteint son minimum en le seul point $(-4, 2)$.

2. Le cours permet facilement de traiter le problème précédent sans utiliser les indications du texte. En effet :

$$\text{Min}_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} H(u, v) = \text{Min}_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 + uX + v\|^2 = \text{Min}_{(u',v') \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - (u'X + v')\|^2 = \text{Min}_{P \in E_1} \|X^2 - P\|^2$$

Tout est clair, $\text{Min}_{P \in E_1} \|X^2 - P\|^2$ existe et vaut $\|X^2 - S\|^2$ où S est la projection orthogonale de X^2 sur E_1 . On montre

alors sans problème que $S = 4Q_1 + 2Q_0 = 4X - 2$ et que $\|X^2 - S\|^2 = 4$.

3. $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, H(u, v) = 2u^2 + v^2 + 2uv + 12u + 4v + 24$. On peut donc encore retrouver le résultat de c) en utilisant le cours sur les fonctions numériques de plusieurs variables.

4. Retenons encore que le c) nous apprend que Q_2 est la fonction polynôme unitaire de degré 2 de norme (au carré) minimum. En fait ceci caractérise Q_2 .

Plus généralement si nous revenons à la famille (Q_0, Q_1, \dots, Q_n) évoquée dans la remarque 2 de Q3 a), Q_k est la fonction polynôme unitaire de degré k de norme minimum.

PARTIE II : Construction d'une base orthogonale.

Q1 Soit P un élément de E_n . P'' (resp. P') est une fonction polynôme de degré au plus $n-2$ (resp. au plus $n-1$) donc XP'' (resp. $(1-X)P'$) est une fonction polynôme de degré au plus $n-1$ (resp. au plus n). Ainsi XP'' et $(1-X)P'$ sont deux éléments de E_n et donc $XP'' + (1-X)P'$ aussi.

Φ est une application de E_n dans E_n .

Soient P et Q deux éléments de E_n et λ un réel.

$$\Phi(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q)''(X) + (1 - X)(\lambda P + Q)'(X) = X(\lambda P''(X) + Q''(X)) + (1 - X)(\lambda P'(X) + Q'(X)).$$

$$\Phi(\lambda P + Q) = \lambda(XP''(X) + (1 - X)P'(X)) + (XQ''(X) + (1 - X)Q'(X)) = \lambda\Phi(P) + \Phi(Q).$$

Φ est linéaire. Φ est un endomorphisme de E_n .

$$\Phi(X^0) = 0_{E_n}. \quad \Phi(X^1) = 1 - X. \quad \text{Si } k \text{ est un élément de } \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \Phi(X^k) = Xk(k-1)X^{k-2} + (1-X)kX^{k-1} = k^2X^{k-1} - kX^k.$$

Ceci donne encore : $\Phi(X^0) = 0_{E_n}$ et pour tout élément k de $\llbracket 1, n \rrbracket$: $\Phi(X^k) = k^2X^{k-1} - kX^k$.

Par conséquent la matrice de Φ dans la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ de E_n est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

Q2 Commençons par remarquer que le premier point de a) est franchement inutile car la matrice M est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres, ainsi que celles de Φ , sont les éléments de sa diagonale c'est à dire : $0, -1, -2, \dots, -n$. Mais pourquoi faire simple ...

a) Fixons k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ et notons Φ_k l'endomorphisme $\Phi + kId_{E_n}$ de E_n .

Si $k = 0$, la famille $(\Phi(X^j) + kX^j)_{0 \leq j \leq k} = (\Phi_k(X^j))_{0 \leq j \leq k}$ est réduite au vecteur nul donc elle est liée.

Supposons alors k non nul.

Si $j = 0$: $\Phi_k(X^j) = kX^0$ est un élément de E_{k-1} .

Si j est dans $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $\Phi_k(X^j) = \Phi(X^j) + kX^j = j^2X^{j-1} + (k-j)X^j$ est encore un élément de E_{k-1} .

Si $j = k$, $\Phi_k(X^j) = k^2X^{k-1}$ est toujours un élément de E_{k-1} .

Ainsi $(\Phi(X^j) + kX^j)_{0 \leq j \leq k} = (\Phi_k(X^j))_{0 \leq j \leq k}$ est une famille de $k+1$ éléments de E_{k-1} qui est un espace vectoriel de dimension k . Cette famille est donc nécessairement liée.

Pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $(\Phi(X^j) + kX^j)_{0 \leq j \leq k}$ est une famille liée de E_n .

Reprenons k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. $(\Phi(X^j) + kX^j)_{0 \leq j \leq k} = (\Phi_k(X^j))_{0 \leq j \leq k}$ est une famille liée donc on peut trouver $k+1$ réels

a_0, a_1, \dots, a_k , non tous nuls, tels que $\sum_{j=0}^k a_j \Phi_k(X^j) = 0_{E_n}$ ou tel que $\Phi_k\left(\sum_{j=0}^k a_j X^j\right) = 0_{E_n}$.

Ainsi $\sum_{j=0}^k a_j X^j$ est un élément non nul du noyau de $\Phi_k = \Phi - (-k)Id_{E_n}$. Ce noyau n'étant pas réduit au vecteur nul, $-k$ est valeur propre de Φ .

Pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $-k$ est valeur propre de Φ .

b) Φ admet au moins $n+1$ valeurs propres distinctes $-1, -2, \dots, -n$. Comme c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel E_n qui est de dimension $n+1$, Φ admet exactement $n+1$ valeurs propres distinctes et donc Φ est diagonalisable.

c) D'après ce qui précède, Φ admet $n+1$ sous-espaces propres distincts dont la somme des dimensions est $n+1$. Dans ces conditions chacun de ces sous-espaces propres ne peut donc être que de dimension 1.

Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$ et S_k un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-k$. S_k engendre le sous-espace propre $SEP(\Phi, -k)$ correspondant. Montrons alors l'existence et l'unicité de P_k et pour cela commençons par noter $\alpha_p X^p$ le terme de plus haut degré de S_k .

Unicité Supposons que P_k existe. P_k est un élément de $SEP(\Phi, -k) = \text{Vect}(S_k)$, donc il existe un réel λ tel que $P_k = \lambda S_k$.

Comme P_k est unitaire : $1 = \lambda \alpha_p$ et ainsi $P_k = (1/\alpha_p)S_k$. D'où l'unicité de P_k .

Existence. Posons $P_k = (1/\alpha_p)S_k$. P_k est un élément de $\text{Vect}(S_k) = SEP(\Phi, -k)$ donc vérifie $\Phi(P_k) = -kP_k$; de plus son terme de plus haut degré est : $(1/\alpha_p)\alpha_p X^p = X^p$. Ainsi P_k est unitaire.

Pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, il existe une unique fonction polynôme unitaire P_k vérifiant $\Phi(P_k) = -kP_k$.

d) Soit k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Notons p le degré de P_k . Le coefficient de X^p dans $-kP_k$ est $-k$. Le coefficient de X^p dans $\Phi(P_k) = XP_k'' + (1-X)P_k'$ est $-p$ (c'est en fait le coefficient de X^p dans $-XP_k'$). Comme $\Phi(P_k) = -kP_k$ on obtient : $-p = -k$ et donc $p = k$!

Pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, P_k est de degré k .

e) $Q_0 = 1$ est une fonction polynôme unitaire et $\Phi(Q_0) = 0 = -(0)Q_0$ donc $Q_0 = P_0$.

Q_1 est une fonction polynôme unitaire et $\Phi(Q_1) = \Phi(X-1) = X0_{E_n} + (1-X) \times 1 = (-1)Q_1$ donc $Q_1 = P_1$.

$Q_2 = X^2 - 4X + 2$ est une fonction polynôme unitaire et $\Phi(Q_2) = \Phi(X^2 - 4X + 2) = X \times 2 + (1-X)(2X-4) = -2X^2 + 8X - 4 = -2Q_2$ donc $Q_2 = P_2$.

Q3 a) Soient P et Q deux éléments de E_n .

Posons pour tout élément t de $[0, +\infty[$, $v(t) = tP'(t)e^{-t}$. v est dérivable et, pour tout élément t de $[0, +\infty[$: $v'(t) = [P'(t) + tP''(t) + tP'(t)(-1)]e^{-t} = [tP''(t) + (1-t)P'(t)]e^{-t} = \Phi(P)(t)e^{-t}$. v' étant continue sur $[0, +\infty[$, v est de classe \mathcal{C}^1 sur cet intervalle. Q est également de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$. Dès lors fixons A dans \mathbb{R}^{+*} et intégrons par parties.

$$\int_0^A \Phi(P)(t) Q(t) e^{-t} dt = \int_0^A v'(t) Q(t) dt = [v(t) Q(t)]_0^A - \int_0^A v(t) Q'(t) dt.$$

$$\int_0^A \Phi(P)(t) Q(t) e^{-t} dt = v(A) Q(A) - v(0) Q(0) - \int_0^A tP'(t) Q'(t) e^{-t} dt.$$

Remarquons alors que :

$$- \int_0^{+\infty} \Phi(P)(t) Q(t) e^{-t} dt \text{ converge et vaut } \langle \Phi(P), Q \rangle ;$$

$$- v(0)Q(0) = 0 \text{ car } v(0) = 0 ;$$

$$- \lim_{A \rightarrow +\infty} (v(A)Q(A)) = \lim_{A \rightarrow +\infty} (tP'(t)Q(t) e^{-t}) = 0 \text{ car } XP'Q \text{ est un élément de } E.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ l'intégration par parties précédente fournit :

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t) e^{-t} dt.$$

b) Soit P et Q deux éléments de E_n .

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t) e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t) e^{-t} dt = \langle \Phi(Q), P \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle.$$

Φ est un endomorphisme symétrique de E_n .

c) Φ est un endomorphisme symétrique de E_n donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux. Ainsi (P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille orthogonale de E_n ; les vecteurs de cette famille orthogonale étant non nuls, cette famille est libre.

(P_0, P_1, \dots, P_n) est une famille libre orthogonale de $n+1$ éléments de E_n qui est de dimension $n+1$, par conséquent

(P_0, P_1, \dots, P_n) est une base orthogonale de E_n .

Remarques 1. (P_0, P_1, \dots, P_n) base de E_n pouvait s'obtenir directement en remarquant que $E_n = \bigoplus_{k=0}^n \text{Vect}(P_k)$ (Q2).

2. Notons que, pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, (P_0, P_1, \dots, P_k) est une base orthogonale de E_k et même que $P_k = Q_k$.

3. On peut montrer que, pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, P_k admet k racines réelles distinctes appartenant toutes à l'intervalle $]0, +\infty[$ (voir encore à ce sujet la partie III du problème d'Edhec 98). Cette remarque permettra aux lecteurs plus exigeants de généraliser les résultats de la partie III.

PARTIE III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

Q1 a) Soient α et β deux réels.

$$\begin{aligned} \forall P \in E_1, \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b) &\iff \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2, \int_0^{+\infty} (ct + d) e^{-t} dt = \alpha(ca + d) + \beta(cb + d) \\ &\iff \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2, cI_1 + dI_0 = c(\alpha a + \beta b) + d(\alpha + \beta) \\ &\iff \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2, c + d = c(\alpha a + \beta b) + d(\alpha + \beta) \\ &\iff \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2, (\alpha a + \beta b - 1)c + (\alpha + \beta - 1)d = 0 \\ &\iff \alpha a + \beta b - 1 = \alpha + \beta - 1 = 0 \\ &\iff \begin{cases} \alpha a + \beta b = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = \frac{1-b}{a-b} = \frac{1-2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \beta = \frac{1-a}{b-a} = \frac{1-2-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Il existe un (unique) couple de réels (α, β) tel que : $\forall P \in E_1, \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b)$.

Remarques 1. Ce dernier résultat vaut encore lorsque a et b sont deux réels quelconques distincts.

2. Mieux, si (a_1, a_2, \dots, a_n) est un n -uplet de réels deux à deux distincts, il existe un unique n -uplet de réels $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tel que :

$$\forall P \in E_{n-1}, \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(a_k).$$

Ce résultat s'obtient facilement en utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange (voir Hec 96 Math. I) ou encore en prouvant l'inversibilité de la matrice réelle d'ordre n : $A = (a_j^{i-1})$ (un passage à la transposée rend la chose élémentaire).

b) $\int_0^{+\infty} P_2(t) e^{-t} dt = \langle 1, P_2 \rangle = \langle Q_0, Q_2 \rangle = 0 = \alpha 0 + \beta 0 = \alpha P_2(a) + \beta P_2(b)$.

On a donc $\int_0^{+\infty} P_2(t) e^{-t} dt = \alpha P_2(a) + \beta P_2(b)$.

c) Soit P un élément de E_3 . La division euclidienne de P par P_2 fournit deux fonctions polynômes Q et R telles que $P = QP_2 + R$ et $\deg R < \deg P_2 = 2$. Le degré de R est donc inférieur ou égal à 1. Montrons qu'il en est encore ainsi pour Q . $QP_2 = P - R$ et $P - R$ est un élément de E_3 donc $\deg(QP_2) = \deg Q + \deg P_2 \leq 3$. Comme le degré de P_2 est 2, le degré de Q est nécessairement inférieur ou égal à 1.

$P_2 = Q_2$, Q_2 est orthogonal à Q_0 et Q_1 , et (Q_0, Q_1) est une base (orthogonale) de E_1 . Par conséquent P_2 est orthogonal à tous les éléments de E_1 donc à Q . Ainsi $\langle P_2, Q \rangle = 0$.

$$\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} (Q(t)P_2(t) + R(t)) e^{-t} dt = \langle Q, P_2 \rangle + \int_0^{+\infty} R(t) e^{-t} dt = 0 + \alpha R(a) + \beta R(b) \text{ car } R \text{ est un élément de } E_1.$$

Or $P(a) = Q(a)P_2(a) + R(a) = R(a)$ car a est un zéro de P_2 . De même $P(b) = R(b)$. On a alors :

$\int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b)$ pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 3.

Remarque Dans les remarques précédentes nous avons dit que si (a_1, a_2, \dots, a_n) est un n -uplet de réels deux à deux distincts, il existe un unique n -uplet de réels $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tel que :

$$\forall P \in E_{n-1}, \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(a_k).$$

On peut montrer que cette égalité s'étend aux éléments de E_{2n-1} si et seulement si a_1, a_2, \dots, a_n sont les zéros de P_n (cela constitue un excellent exercice à faire sur les champs). On ne peut pas faire mieux. Autrement dit on ne peut pas trouver $q > 2n - 1$ telle que l'égalité précédente s'étende aux éléments de E_q (cela s'obtient aisément en raisonnant par l'absurde et en considérant $\int_0^{+\infty} [(t - a_1) \cdots (t - a_n)]^2 e^{-t} dt$).

Q2 a) Soit t un réel positif ou nul. f étant de classe \mathcal{C}^4 sur $[0, +\infty[$, l'inégalité de Taylor-Lagrange fournit :

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (t-0)^k \right| \leq \frac{|t-0|^4}{4!} \max_{u \in [0, t]} |f^{(4)}(u)| \leq \frac{t^4}{4!} M.$$

Or si x et y sont deux réels : $|x| - |y| \leq |x - y|$. Ce qui précède donne alors :

$$|f(t)| - \left| \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| \leq \frac{M}{4!} t^4 \quad \text{ou} \quad |f(t)| \leq \left| \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| + \frac{M}{4!} t^4.$$

L'inégalité triangulaire donne encore :

$$|f(t)| \leq \sum_{k=0}^3 \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} t^k + \frac{M}{4!} t^4.$$

Dès lors posons $T = \sum_{k=0}^3 \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} X^k + \frac{M}{4!} X^4$.

T est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 4 telle que : $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq |f(t)| \leq T(t)$.

Ce qui précède donne encore $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq |f(t) e^{-t}| = |f(t)| e^{-t} \leq T(t) e^{-t}$.

La convergence de $\int_0^{+\infty} T(t) e^{-t} dt$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} |f(t) e^{-t}| dt$ converge.

$\int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt$ est absolument convergente donc convergente.

b) Soit P et Q deux éléments de E_3 et λ un réel.

$$D(\lambda P + Q) = \left((\lambda P + Q)(a), (\lambda P + Q)'(a), (\lambda P + Q)(b), (\lambda P + Q)'(b) \right).$$

$$D(\lambda P + Q) = (\lambda P(a) + Q(a), \lambda P'(a) + Q'(a), \lambda P(b) + Q(b), \lambda P'(b) + Q'(b)).$$

$$D(\lambda P + Q) = \lambda(P(a), P'(a), P(b), P'(b)) + (Q(a), Q'(a), Q(b), Q'(b)) = \lambda D(P) + D(Q).$$

D est une application linéaire de E_3 dans \mathbb{R}^4 .

Pour montrer que l'application linéaire D est bijective il suffit de montrer que D est injective car E_3 et \mathbb{R}^4 sont deux espaces vectoriels de même dimension finie 4 sur \mathbb{R} .

Montrons donc, par l'absurde, que le noyau de D est réduit à la fonction polynôme nulle.

Supposons que P soit un élément non nul de $\text{Ker } D$. $P(a) = P'(a) = P(b) = P'(b) = 0$. a et b sont alors deux racines de P d'ordre de multiplicité au moins deux et ainsi le nombre de racines de P , comptées avec leur ordre de multiplicité est supérieur ou égal à 4. Ceci n'est pas raisonnable pour une fonction polynôme non nulle de degré au plus 3!

Par conséquent le noyau de D est réduit à O_{E_3} et D est injective.

Ce qui précède montre bien que D est un isomorphisme de E_3 sur \mathbb{R}^4 .

c) Soit S un élément de E_3 .

$$\begin{aligned}
S(a) = f(a), S'(a) = f'(a), S(b) = f(b), S'(b) = f'(b) &\iff (S(a), S'(a), S(b), S'(b)) = (f(a), f'(a), f(b), f'(b)) \\
&\iff D(S) = (f(a), f'(a), f(b), f'(b)) \\
&\iff S = D^{-1}\left((f(a), f'(a), f(b), f'(b))\right)
\end{aligned}$$

Il existe une unique fonction polynôme S de E_3 telle que : $S(a) = f(a)$, $S'(a) = f'(a)$, $S(b) = f(b)$, $S'(b) = f'(b)$.
 $S = D^{-1}\left((f(a), f'(a), f(b), f'(b))\right)$.

Remarque Par des considérations analogues on montre que si a_1, a_2, \dots, a_n sont n éléments distincts d'un intervalle I de \mathbb{R} et si f est une application dérivable de I dans \mathbb{R} , il existe un unique élément S de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que, pour tout élément i de $\llbracket 1, n \rrbracket$: $S(a_i) = f(a_i)$ et $S'(a_i) = f'(a_i)$ (voir encore Hec 96 Math. I).

Q3 a) $g(a) = f(a) - S(a) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{(P_2(x_0))^2} (P_2(a))^2 = 0$ car $f(a) = S(a)$ et $P_2(a) = 0$. De même $g(b) = 0$.

$$g(x_0) = f(x_0) - S(x_0) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{(P_2(x_0))^2} (P_2(x_0))^2 = f(x_0) - S(x_0) - (f(x_0) - S(x_0)) = 0.$$

g s'annule en a, b et x_0 .

b) Notons immédiatement que f, S et $(P_2)^2$ sont de classe \mathcal{C}^4 sur $]0, +\infty[$. g l'est donc également.

Etudier avec soin le cas $a < x_0 < b$ est aussi aisé que rapide car ce cas ne se pose pas ! ($a = 2 + \sqrt{2} > 2 - \sqrt{2} = b$).

Contournons les "cas" et ordonnons les éléments de $\{a, b, x_0\}$. Notons t_1 le plus petit élément de cette partie, t_3 le plus grand et t_2 l'élément restant. $t_1 < t_2 < t_3$ et $\{a, b, x_0\} = \{t_1, t_2, t_3\}$. Soit i un élément de $\{1, 2\}$. g est dérivable sur $[t_i, t_{i+1}]$ et $g(t_i) = g(t_{i+1}) (= 0)$; le théorème de Rolle montre alors qu'il existe un élément u_i dans $]t_i, t_{i+1}[$ tel que $g'(u_i) = 0$.

u_1 et u_2 sont alors deux zéros de g' distincts de a, b et x_0 .

$$g'(t) = f'(t) - S'(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{(P_2(x_0))^2} (2P_2'(t)P_2(t)). \quad g'(a) = 0 \text{ car } S'(a) = f'(a) \text{ et } P_2(a) = 0; \text{ de même } g'(b) = 0.$$

g' admet au moins quatre zéros deux à deux distincts (dont a et b).

Notons que ces quatre zéros sont strictement positifs car a et b le sont et $0 \leq t_1 < u_1 < t_2 < u_2$. Dès lors montrons par récurrence que, pour tout élément i de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$, $g^{(i)}$ possède au moins $5 - i$ zéro(s) dans $]0, +\infty[$!

D'après ce qui précède, la propriété est vraie pour $i = 1$. Supposons la propriété vraie pour i élément de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ et montrons la alors pour $i + 1$.

$g^{(i)}$ possède au moins $5 - i$ zéros $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{5-i}$ ($\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{5-i}$) dans $]0, +\infty[$. Montrons alors que $g^{(i+1)} = (g^{(i)})'$ possède au moins $4 - i$ zéro(s) dans $]0, +\infty[$.

Soit j dans $\llbracket 1, 4 - i \rrbracket$. $g^{(i)}$ est dérivable sur $[\alpha_j, \alpha_{j+1}]$ et $g^{(i)}(\alpha_j) = g^{(i)}(\alpha_{j+1}) (= 0)$. Le théorème de Rolle montre alors l'existence de β_j dans $]\alpha_j, \alpha_{j+1}[$ tel que : $g^{(i+1)}(\beta_j) = 0$.

Ceci donne à $g^{(i+1)}$ au moins $4 - i$ zéro(s) strictement positif(s) et achève la récurrence.

En appliquant la propriété pour $i = 4$, on obtient l'existence d'un élément c de $]0, +\infty[$ tel que $g^{(4)}(c) = 0$.

c) Calculons $g^{(4)}$. S est un élément de E_3 donc sa dérivée quatrième est nulle. $(P_2)^2$ est une fonction polynôme unitaire de degré quatre donc sa dérivée quatrième est la fonction constante égale à $4!$. Finalement :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad g^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{(P_2(x_0))^2} \times 4!.$$

Comme $g^{(4)}(c) = 0$, il vient sans difficulté : $f(x_0) - S(x_0) = \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} f^{(4)}(c)$.

Ainsi $|f(x_0) - S(x_0)| = \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} |f^{(4)}(c)|$ et comme $|f^{(4)}(c)| \leq M$: $|f(x_0) - S(x_0)| \leq \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} M$.

Q4 a) D'après la question précédente : $\forall x \in [0, +\infty[- \{a, b\}$, $|f(x) - S(x)| \leq \frac{(P_2(x))^2}{4!} M$. Les deux membres de cette inégalité étant nuls pour $x = a$ et $x = b$ on a bien :

$$\forall x \in [0, +\infty[, |f(x) - S(x)| \leq \frac{(P_2(x))^2}{4!} M.$$

Remarque Ici encore ce résultat peut se généraliser de la manière suivante. a_1, a_2, \dots, a_n sont n éléments distincts d'un intervalle I de \mathbb{R} . f est une application I dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^{2n} (ou simplement $2n$ fois dérivable) telle qu'il existe un réel M majorant $|f^{(2n)}|$ sur I . S est l'unique élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $S(a_i) = f(a_i)$ et $S'(a_i) = f'(a_i)$. Alors :

$$\forall x \in I, |f(x) - S(x)| \leq \frac{M}{(2n)!} [(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)]^2.$$

On obtient ce résultat, sans difficulté, en reprenant les idées développées dans ce qui précède (Hec 96 Math. 1 encore et encore...).

b) Q4 a) nous donne (en multipliant par e^{-x} ...) : $\forall x \in [0, +\infty[, |(f(x) - S(x)) e^{-x}| \leq \frac{M}{4!} (P_2(x))^2 e^{-x}$.

La convergence de $\int_0^{+\infty} (P_2(x))^2 e^{-x} dx$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées des fonctions positives donnent la convergence de $\int_0^{+\infty} |(f(x) - S(x)) e^{-x}| dx$ donc l'absolue convergence de $\int_0^{+\infty} (f(x) - S(x)) e^{-x} dx$.

Nous pouvons alors écrire : $\left| \int_0^{+\infty} (f(x) - S(x)) e^{-x} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} |(f(x) - S(x)) e^{-x}| dx \leq \frac{M}{4!} \int_0^{+\infty} (P_2(x))^2 e^{-x} dx$.

Comme $\int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx$ et $\int_0^{+\infty} S(x) e^{-x} dx$ convergent, ceci donne encore :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx - \int_0^{+\infty} S(x) e^{-x} dx \right| \leq \frac{M}{4!} \int_0^{+\infty} (P_2(x))^2 e^{-x} dx = \frac{M}{4!} \|P_2\|^2.$$

Or $\int_0^{+\infty} S(x) e^{-x} dx = \alpha S(a) + \beta S(b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$ et $\|P_2\|^2 = \|Q_2\|^2 = 4$ (I Q3 c), par conséquent :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx - \alpha f(a) - \beta f(b) \right| \leq \frac{M}{6}.$$

Remarque Soient a_1, a_2, \dots, a_n les n zéros de P_n et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ l'unique n -uplet de réels tel que :

$$\forall P \in E_{2n-1}, \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt = \sum_{k=1}^n \alpha_k P(a_k).$$

Si f est une application $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^{2n} telle que $|f^{(2n)}|$ soit majorée sur $[0, +\infty[$ par M on obtient alors :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt - \sum_{k=1}^n \alpha_k f(a_k) \right| \leq \frac{M}{(2n)!} \|P_n\|^2 = \frac{M(n!)^2}{(2n)!}.$$

Notons que la formule de Stirling donne $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sqrt{\pi n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ ce qui donne de l'espoir. Mais notons aussi que M dépend, a priori, de n .

Q5 Application : f est de classe \mathcal{C}^4 sur $[0, +\infty[$ (f est la restriction d'une fonction rationnelle).

$$\forall t \in [0, +\infty[, f'(t) = -\frac{1}{(10+t)^2}, f''(t) = \frac{2}{(10+t)^3}, f^{(3)}(t) = -\frac{6}{(10+t)^4} \text{ et } f^{(4)}(t) = \frac{24}{(10+t)^5}.$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, |f^{(4)}(t)| = \frac{24}{(10+t)^5} \leq \frac{24}{10^5}.$$

Posons $I = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-t} dt$ et $J = \alpha f(a) + \beta f(b) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} f(2 + \sqrt{2}) + \frac{2 + \sqrt{2}}{4} f(2 - \sqrt{2})$.

Q4 donne alors $|I - J| \leq \frac{(24/10^5)}{6}$ donc $|I - J| \leq \frac{4}{10^5}$.

Ainsi $J - \frac{4}{10^5} \leq I \leq J + \frac{4}{10^5}$. Comme $0.0915 \leq J \leq 0.0916$ on obtient alors : $0.0915 - \frac{4}{10^5} \leq I \leq 0.0916 + \frac{4}{10^5}$.

Ceci donne encore : $\boxed{0.09146 \leq I \leq 0.09164}$.

I appartient à l'intervalle $[0.09146, 0.09164]$ donc $\left| I - \frac{0.09164 + 0.09146}{2} \right| \leq \frac{0.09164 - 0.09146}{2}$.

Ainsi : $|I - 0.09155| \leq 0.00009$ et $\boxed{0.09155 \text{ est une valeur approchée de } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t} dt \text{ à } 9 \times 10^{-5} \text{ près}}$.
