

PREMIER PROBLÈME

Remarque Je ne ferai pas, dans ce qui suit, l'identification des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aux éléments de $\mathbb{R}^n$ proposée par le texte car elle n'apporte rien ici. Le produit scalaire utilisé sera donc le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Je conserverai le parti pris de ne pas parenthéser les expressions du type $\sin k\theta$.

1. A_3 est une matrice symétrique et réelle donc A_3 est diagonalisable ... A_n aussi.

Cherchons les valeurs propres de A_3 . Soit λ un réel. Déterminons une réduite de Gauss de $A_3 - \lambda I_3$.

$A_3 - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Les opérations $L_1 \leftrightarrow L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$ donnent successivement :

$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$. Les opérations $L_2 \leftrightarrow L_3$ et $L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda^2 - 1)L_2$ donnent successivement :

$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda^2 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda^2 - 1) + \lambda \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda^2 - 2) \end{pmatrix}$ est alors une réduite de Gauss de $A_3 - \lambda I_3$.

Ainsi $A_3 - \lambda I_3$ est non inversible si et seulement si $-\lambda(\lambda^2 - 2) = 0$; c'est à dire si et seulement si λ vaut 0, $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$.

Les valeurs propres de A_3 sont donc : $\sqrt{2}$, 0 et $-\sqrt{2}$.

Cherchons les sous-espaces propres de A_3 . Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$A_3 X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \text{ et } z = -x.$$

Le sous-espace propre de A_3 associé à la valeur propre 0 est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit ε un élément de $\{-1, 1\}$. Notons que : $\varepsilon^2 = 1$.

$$A_3 X = \varepsilon\sqrt{2} X \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2} x \\ x + z = \varepsilon\sqrt{2} y \\ y = \varepsilon\sqrt{2} z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2} x \\ z = x \\ 2x = \varepsilon\sqrt{2} y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varepsilon\sqrt{2} x \\ z = x \\ y = \frac{2}{\varepsilon\sqrt{2}} x = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon^2} \varepsilon x = \varepsilon\sqrt{2} x \end{cases}.$$

$$A_3 X = \varepsilon\sqrt{2} X \Leftrightarrow z = x \text{ et } y = \varepsilon\sqrt{2} x.$$

Le sous-espace propre de A_3 associé à la valeur propre $\sqrt{2}$ (resp. $-\sqrt{2}$) est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$).

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de trois vecteurs propres de A_3 associés à trois valeurs propres distinctes $\sqrt{2}$, 0 et $-\sqrt{2}$; $\mathcal{B}$ est donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3.

Ainsi $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{B}$ et posons $D = P^{-1}A_3P$. D'après ce qui précède :

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible	comme matrice de passage,	$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est diagonale
--	---------------------------	--

et $A_3 = PDP^{-1}$.

Exercice Déterminer P^{-1} . Trouver une matrice orthogonale Q telle que $A_3 = QD^tQ$.

2. Le cours nous indique que l'ensemble S'_θ des suites réelles $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout entier naturel k , $s_{k+2} - 2 \cos \theta s_{k+1} + s_k = 0$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.

L'équation caractéristique attachée aux éléments de S'_θ est $x^2 - 2 \cos \theta x + 1 = 0$. Cette équation admet deux solutions complexes et conjuguées : $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Ainsi $\left((\cos k\theta)_{k \in \mathbb{N}}, (\sin k\theta)_{k \in \mathbb{N}} \right)$ est une base de S'_θ .

Soit $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un élément de S_θ . $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est encore un élément de S'_θ . Par conséquent il existe deux réels α et β tel que, pour tout élément k de $\mathbb{N}$: $s_k = \alpha \cos k\theta + \beta \sin k\theta$. On a alors $0 = s_0 = \alpha$ et $s_1 = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta$; donc $\alpha = 0$ et $\beta = s_1 \frac{1}{\sin \theta}$.

Ainsi si $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un élément de S_θ : $\forall k \in \mathbb{N}, s_k = s_1 \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}$.

En particulier $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à la droite vectorielle de S'_θ engendrée par la suite $(\sin k\theta)_{k \in \mathbb{N}}$.

Réciproquement soit $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un élément de cette droite. Il existe un réel β tel que $\forall k \in \mathbb{N}, s_k = \beta \sin k\theta$.

Par conséquent $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à S'_θ et $s_0 = \beta \sin(0\theta) = 0$; donc $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un élément de S_θ .

Finalement S_θ est la droite vectorielle de S'_θ engendrée par la suite $(\sin k\theta)_{k \in \mathbb{N}}$. $S_\theta = \text{Vect} \left((\sin k\theta)_{k \in \mathbb{N}} \right)$.

Ainsi S_θ est un espace vectoriel réel de dimension 1.

3. a. λ est une valeur propre de A_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A_n associé à λ .

$$A_n X = \lambda X \text{ donc } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \text{ soit encore } \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda x_2 \\ \cdots \\ x_{k-1} + x_{k+1} = \lambda x_k \\ \cdots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}.$$

$$\text{Ceci donne enfin : } \begin{cases} \bullet \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet \lambda x_n = x_{n-1} \end{cases}.$$

Observons que ce système est exactement équivalent à : $A_n X = \lambda X$.

Notons que $m = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ est strictement positif car X n'est pas nul.

$$|\lambda| |x_1| = |\lambda x_1| = |x_2| \leq m \leq 2m \text{ et } |\lambda| |x_n| = |\lambda x_n| = |x_{n-1}| \leq m \leq 2m.$$

$$\text{De plus si } k \text{ appartient à } \{2, \dots, n-1\} : |\lambda| |x_k| = |\lambda x_k| = |x_{k-1} + x_{k+1}| \leq |x_{k-1}| + |x_{k+1}| \leq m + m = 2m.$$

Finalement $\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ de } \{1, \dots, n\}, |\lambda| |x_k| \leq 2m}.$

Ainsi $\max_{1 \leq k \leq n} (|\lambda| |x_k|) \leq 2m$ donc $|\lambda| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq 2m$. Ceci donne encore $|\lambda| m \leq 2m$ donc $|\lambda| \leq 2$ car m est strictement positif.

Par conséquent $\boxed{\text{si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A : |\lambda| \leq 2}$

Exercice Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout élément i de $\llbracket 1, n \rrbracket$ on pose $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|\}$. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de A est contenu dans $D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$ (disques de Gershgorin). Retrouver le résultat précédent.

b. Posons pour tout élément t de $]0, \pi[$, $u(t) = 2 \cos t$. u est continue et dérivable sur $]0, \pi[$.

$\forall t \in]0, \pi[$, $u'(t) = -2 \sin t < 0$. Ainsi u est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, \pi[$.

u définit alors une bijection de $]0, \pi[$ sur $] \lim_{t \rightarrow \pi} (2 \cos t), \lim_{t \rightarrow 0} (2 \cos t)[=]-2, 2[$.

Comme λ est élément de $] -2, 2[$, $\boxed{\text{il existe un unique élément } \theta \text{ de }]0, \pi[\text{ tel que } \lambda = u(\theta) = 2 \cos \theta.}$

D'après la question 2, la suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ est définie par : $\forall k \in \mathbb{N}$, $s_k = x_1 \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}$.

Montrons alors à l'aide d'une récurrence faible que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $s_k = x_k$.

La propriété est vraie pour $k = 1$ car $s_1 = x_1$. Supposons la vraie jusqu'à k , k élément de $\{1, \dots, n-1\}$ et montrons la pour $k+1$. $s_{k+1} = 2 \cos \theta s_k - s_{k-1}$.

Si $k = 1$: $s_{k+1} = s_2 = 2 \cos \theta s_1 - s_0 = \lambda s_1 = \lambda x_1 = x_2 = x_{k+1}$;

Si $k \geq 2$, d'après l'hypothèse de récurrence : $s_{k+1} = 2 \cos \theta s_k - s_{k-1} = 2 \cos \theta x_k - x_{k-1} = x_{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

Finalement $\boxed{\forall k \in \{1, \dots, n\}, s_k = x_k}.$

$$s_{n+1} = 2 \cos \theta s_n - s_{n-1} = 2 \cos \theta x_n - x_{n-1} = \lambda x_n - x_{n-1} = 0. \quad \boxed{s_{n+1} = 0}.$$

Rappelons que $s_{n+1} = x_1 \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$. Ainsi $x_1 \times \sin(n+1)\theta = 0$. Donc $x_1 = 0$ ou $\sin(n+1)\theta = 0$.

Supposons x_1 nul. La suite $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est alors la suite nulle. Donc $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $x_k = s_k = 0$. Ce qui donne $X = 0$!

x_1 n'étant pas nul $\sin(n+1)\theta$ l'est. $(n+1)\theta$ est alors un multiple de π . Il existe un élément p de $\mathbb{Z}$ tel que : $(n+1)\theta = p\pi$. Alors $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$ et comme θ appartient à $]0, \pi[$: p appartient à $\{1, \dots, n\}$.

$$\boxed{\text{Il existe un entier } p \text{ de } \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \theta = \frac{p\pi}{n+1}}.$$

c. Soit p un élément de $\{1, \dots, n\}$. Notons déjà que X_p n'est pas nul car sa première composante $\sin \theta_p$ est différente de 0 ($\theta_p \in]0, \pi[$). Dès lors montrons que $A_n X_p = \lambda_p X_p$.

Il suffit de prouver que :
$$\begin{cases} \bullet \sin 2\theta_p = \lambda_p \sin \theta_p \\ \bullet \forall k \in \{2, \dots, n-1\}, \sin(k-1)\theta_p + \sin(k+1)\theta_p = \lambda_p \sin k\theta_p \\ \bullet \sin(n-1)\theta_p = \lambda_p \sin n\theta_p \end{cases}$$

$$\bullet \lambda_p \sin \theta_p = 2 \cos \theta_p \sin \theta_p = \sin 2\theta_p.$$

$$\bullet \text{ Si } p \text{ est dans } \{2, \dots, n-1\}, \lambda_p \sin k\theta_p = 2 \cos \theta_p \sin k\theta_p = 2 \sin k\theta_p \cos \theta_p = \sin(k\theta_p + \theta_p) + \sin(k\theta_p - \theta_p).$$

$$\lambda_p \sin k\theta_p = \sin(k-1)\theta_p + \sin(k+1)\theta_p.$$

$$\bullet \lambda_p \sin n\theta_p = 2 \cos \theta_p \sin n\theta_p = 2 \sin n\theta_p \cos \theta_p = \sin(n\theta_p + \theta_p) + \sin(n\theta_p - \theta_p).$$

$$\lambda_p \sin n\theta_p = \sin(n+1)\theta_p + \sin(n-1)\theta_p = \sin p\pi + \sin(n-1)\theta_p = \sin(n-1)\theta_p.$$

Ceci achève de prouver que : $A_n X_p = \lambda_p X_p$.

Donc $\boxed{\text{pour tout élément } p \text{ de } \{1, \dots, n\}, \lambda_p \text{ est une valeur propre de } A_n \text{ et } X_p \text{ un vecteur propre associé}}.$

d. Pour tout élément p de $\{1, \dots, n\}$, $\lambda_p = 2 \cos \theta_p = 2 \cos \left(\frac{p\pi}{n+1} \right) = u \left(\frac{p\pi}{n+1} \right)$.

Comme $\frac{\pi}{n+1}, \frac{2\pi}{n+1}, \dots, \frac{n\pi}{n+1}$ sont n réels deux à deux distincts de $]0, \pi[$ et que u est injective sur cet intervalle, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n réels deux à deux distincts.

Ainsi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n valeurs propres deux à deux distinctes de A_n qui est une matrice d'ordre n et qui a donc au plus n valeurs propres deux à deux distinctes.

Par conséquent $\boxed{\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \text{ est l'ensemble des valeurs propres de } A_n}$.

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sont n vecteurs propres de A_n associés à n valeurs propres deux à deux distinctes donc $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une famille libre de n vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension n .

Finalement $\boxed{(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

4. U_n n'est autre que la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Donc $\boxed{U_n \text{ est inversible}}$.

Comme $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_n respectivement as-

$$\text{sociés aux valeurs propres } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n : \quad D_n = U_n^{-1} A_n U_n \text{ est la matrice diagonale } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

5. a. Soit p et q deux éléments de $\{1, \dots, n\}$.

A_n est une matrice symétrique donc : $\langle AX_p, X_q \rangle = \langle X_p, AX_q \rangle$.

Ainsi $\langle \lambda_p X_p, X_q \rangle = \langle X_p, \lambda_q X_q \rangle$. C'est à dire $\lambda_p \langle X_p, X_q \rangle = \lambda_q \langle X_p, X_q \rangle$.

Par conséquent : $\boxed{\lambda_p {}^t X_p X_q = \lambda_q {}^t X_p X_q}$. Ceci donne encore : $(\lambda_p - \lambda_q) \langle X_p, X_q \rangle = 0$.

Dès lors si nous supposons $p \neq q$, λ_p et λ_q sont distincts et : $\langle X_p, X_q \rangle = 0$; X_p et X_q sont donc orthogonaux.

$\boxed{(X_1, X_2, \dots, X_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Remarque Ce n'est pas un scoop. A_n étant une matrice symétrique réelle, ses sous-espaces propres sont orthogonaux et donc la base $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est orthogonale non ?

Soient p et q deux éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$.

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta_p \sin k\theta_q = (\sin \theta_p, \sin 2\theta_p, \dots, \sin n\theta_p) \begin{pmatrix} \sin \theta_q \\ \sin 2\theta_q \\ \vdots \\ \sin n\theta_q \end{pmatrix} = {}^t X_p X_q = \langle X_p, X_q \rangle = 0.$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2, p \neq q \Rightarrow \sum_{k=1}^n \sin k\theta_p \sin k\theta_q = 0}.$$

b. Soit p un élément de $\{1, \dots, n\}$. $\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta_p)$ est la partie réelle de : $\sum_{k=0}^n e^{i(2k\theta_p)}$. Or $e^{i(2\theta_p)}$ est différent de 1 car $2\theta_p = \frac{2p\pi}{n+1}$ n'est pas un multiple de 2π puisque p appartient à $\{1, \dots, n\}$; ainsi :

$$\sum_{k=0}^n e^{i(2k\theta_p)} = \sum_{k=0}^n \left(e^{i(2\theta_p)} \right)^k = \frac{1 - (e^{i(2\theta_p)})^{n+1}}{1 - e^{i(2\theta_p)}}.$$

Remarquons alors que : $1 - (e^{i(2\theta_p)})^{n+1} = 1 - e^{i(2p\pi)} = 0$. Ainsi : $\sum_{k=0}^n e^{i(2k\theta_p)} = 0$.

$$\text{Finalement } \boxed{\forall p \in \{1, \dots, n\}, \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta_p) = 0}.$$

$$\text{Soit } p \text{ un élément de } \{1, \dots, n\}. \sum_{k=1}^n \sin^2(k\theta_p) = \sum_{k=1}^n \frac{1 - \cos(2k\theta_p)}{2} = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \cos(2k\theta_p).$$

$$\text{Ceci donne encore : } \sum_{k=1}^n \sin^2(k\theta_p) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta_p) + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall p \in \{1, \dots, n\}, \sum_{k=1}^n \sin^2(k\theta_p) = \frac{n+1}{2}}.$$

c. Posons $U_n^2 = (v_{pq})$. Soient p et q deux éléments de $\{1, \dots, n\}$.

$$v_{pq} = \sum_{k=1}^n u_{pk} u_{kq} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{pk\pi}{n+1} \sin \frac{kq\pi}{n+1} = \sum_{k=1}^n \sin k\theta_p \sin k\theta_q.$$

Ainsi v_{pq} vaut 0 si p et q sont distincts et $\frac{n+1}{2}$ s'ils sont égaux. Donc $U_n^2 = \frac{n+1}{2} I_n$.

En particulier : $\left(\frac{2}{n+1} U_n\right) U_n = I_n$ donc $U_n^{-1} = \frac{2}{n+1} U_n$.

Alors $D_n = U_n^{-1} A_n U_n$ donne $A_n = U_n D_n U_n^{-1} = U_n D_n \left(\frac{2}{n+1} U_n\right)$.

Finalement : $A_n = \frac{2}{n+1} U_n D_n U_n$.

Remarque On pourra pour compléter ce problème visiter ou revisiter HEC 90 MI et ESSEC 96 MI.

DEUXIÈME PROBLÈME

1. a. et b. $t \rightarrow 1-t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur $]0, 1[$ et $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$; par composition $t \rightarrow \ln(1-t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$. Comme $t \rightarrow -\frac{1}{t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$, par produit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$.

Montrons que f est continue en 0. $-\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{0}{\sim} -\frac{-t}{t} = 1$ car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$.

Par conséquent : $\lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\ln(1-t)}{t}\right) = 1 = f(0)$. Ainsi f est continue en 0.

$$\forall t \in]0, 1[, f'(t) = -\frac{1}{t^2} \left[\frac{-1}{1-t} \times t - \ln(1-t) \right] \text{ donc } \left[\forall t \in]0, 1[, f'(t) = \frac{1}{t^2} \left[\ln(1-t) + \frac{t}{1-t} \right] \right].$$

$$\text{c. } f'(t) = \frac{1}{t^2(1-t)} [(1-t) \ln(1-t) + t] \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2} [(1-t) \ln(1-t) + t].$$

Cherchons un équivalent en 0 de $t \rightarrow (1-t) \ln(1-t) + t$. Pour cela utilisons des développements limités d'ordre 2 au voisinage de 0.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2). \quad \ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ et } 1-t = 1-t + o(t^2).$$

$$\text{Donc } (1-t) \ln(1-t) = (1-t) \left(-t - \frac{t^2}{2}\right) + o(t^2) = -t - \frac{t^2}{2} + t^2 + o(t^2) = -t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

$$\text{Ceci donne encore : } (1-t) \ln(1-t) + t = \frac{t^2}{2} + o(t^2). \text{ Par conséquent } (1-t) \ln(1-t) + t \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}.$$

$$\text{Finalement : } f'(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2} [(1-t) \ln(1-t) + t] \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2} \times \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi } \left[\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \frac{1}{2} \right].$$

f est continue en 0, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ et f' admet une limite finie en 0. Le théorème de la limite de la dérivée nous permet de dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$. Notons encore que l'on a $f'(0) = \frac{1}{2}$.

d. La fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque sa dérivée seconde est négative. Sa courbe représentative est au-dessous de toutes ses tangentes, en particulier de sa tangente au point d'abscisse 1.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln x \leq (\ln' 1)(x - 1) + \ln 1 = x - 1$.

Ainsi : $\forall t \in]0, 1[, -\ln(1 - t) = \ln \frac{1}{1 - t} \leq \frac{1}{1 - t} - 1 = \frac{t}{1 - t}$.

Il vient alors sans difficulté : $\forall t \in]0, 1[, \ln(1 - t) + \frac{t}{1 - t} \geq 0$.

e. Ce qui précède montre que : $\forall t \in]0, 1[, f'(t) = \frac{1}{t^2} \left[\ln(1 - t) + \frac{t}{1 - t} \right] \geq 0$.

Comme $f'(0) = \frac{1}{2} : \forall t \in [0, 1[, f'(t) \geq 0$. f est croissante sur $[0, 1[$.

$\lim_{t \rightarrow 1} -\frac{1}{t} = -1$ et $\lim_{t \rightarrow 1} \ln(1 - t) = -\infty$. Donc $\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = +\infty$.

t	0	1
$f'(t)$	+	
f	1	$+\infty$

Voir l'allure de la courbe représentative de f à la fin de la question 2.

2. a. Si x est un élément de $[0, 1[, f$ est continue sur $[0, x]$ donc $\int_0^x f(t) dt$ existe.

Montrons maintenant que $\int_0^1 f(t) dt$ existe.

f est continue et positive sur $[0, 1[$, et équivalente au voisinage de 1 à $t \rightarrow -\ln(1 - t)$. Ainsi $\int_0^1 f(t) dt$ existe dès que $\int_0^1 \ln(1 - t) dt$ existe. Montrons la convergence de cette dernière intégrale. Soit α un élément de $]0, 1[$.

Une intégration par parties simple ($u'(t) = 1, v(t) = \ln(1 - t), u(t) = t - 1$ et $v'(t) = \frac{-1}{1 - t}$) donne $\int_0^\alpha \ln(1 - t) dt = \left[(t - 1) \ln(1 - t) \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha (t - 1) \frac{-1}{1 - t} dt = (\alpha - 1) \ln(1 - \alpha) - \int_0^\alpha 1 dt$.

$$\int_0^\alpha \ln(1 - t) dt = -(1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) - \alpha.$$

Ainsi $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \int_0^\alpha \ln(1 - t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow 1} \left(-(1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) - \alpha \right) = -1$ car $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \left((1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) \right) = 0$.

Par conséquent $\int_0^1 \ln(1 - t) dt$ existe et vaut -1 ; donc $\int_0^1 f(t) dt$ existe.

Finalement $\int_0^x f(t) dt$ existe pour tout élément x de $[0, 1]$.

b. La restriction de g à $[0, 1[$ est la primitive sur l'intervalle $[0, 1[$ de la fonction continue f , qui prend la valeur 0 en 0.

Ainsi g est dérivable sur $]0, 1[$ et $\boxed{\forall x \in [0, 1[, g'(x) = f(x)}$.

f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, il en est de même pour g' . Alors $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0, 1]}$.

Montrons que g est continue en 1. $\int_0^1 f(t) dt$ converge, donc par définition :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = g(1).$$

Ainsi $\boxed{g \text{ est continue en } 1}$.

c. Soit x un élément de $]0, 1[$. $\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \left[\int_0^x f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt \right] = -\frac{1}{x - 1} \int_x^1 f(t) dt$.

$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{1}{1 - x} \int_x^1 f(t) dt$. Minorons cette dernière intégrale.

Soit α un élément de $]x, 1[$. $\forall t \in [x, \alpha]$, $-\ln(1 - t) \geq 0$ et $\frac{1}{t} \geq 1$; donc $\forall t \in [x, \alpha]$, $f(t) \geq -\ln(1 - t)$.

Comme $\alpha > x$ il vient en intégrant entre α et x : $\int_x^\alpha f(t) dt \geq \int_x^\alpha [-\ln(1 - t)] dt$. Calculons cette dernière intégrale en faisant une intégration par parties analogue à celle faite dans a).

$$\int_x^\alpha [-\ln(1 - t)] dt = \left[-(t-1) \ln(1-t) \right]_x^\alpha - \int_x^\alpha -(t-1) \frac{-1}{1-t} dt = -(\alpha-1) \ln(1-\alpha) + (x-1) \ln(1-x) + (\alpha-x).$$

Ainsi : $\int_x^\alpha f(t) dt \geq \int_x^\alpha [-\ln(1 - t)] dt = (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha) + (x - 1) \ln(1 - x) + (\alpha - x)$

En faisant tendre α vers 1 il vient : $\int_x^1 f(t) dt \geq (x - 1) \ln(1 - x) + 1 - x$.

En divisant par $1 - x$, qui est strictement positif, on obtient : $\frac{1}{1 - x} \int_x^1 f(t) dt \geq -\ln(1 - x) + 1$.

Ainsi : $\frac{g(x) - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x} \int_x^1 f(t) dt \geq -\ln(1 - x) + 1$ pour tout élément x de $]0, 1[$.

Or $\lim_{x \rightarrow 1} (-\ln(1 - x) + 1) = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = +\infty}$. Par conséquent g n'est pas dérivable en 1.

Exercice Retrouver ce résultat en utilisant $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ et le théorème des accroissements finis.

d.

x	0	1
$g'(x)$		+
g	0	$\nearrow g(1)$

e. $\forall x \in [0, 1[, g''(x) = (g')'(x) = f'(x) \geq 0$. g'' est positive sur $[0, 1[$ donc $\boxed{g \text{ est convexe sur } [0, 1]}$... et même sur $[0, 1]$.

Courbe...

Courbe...

3. a. Ceci est un résultat de cours. Si t appartient à $[0, 1[$, $|t| < 1$ et : la série de terme général t^n converge.

De plus $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$.

$$\text{b. } \forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1[, R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1[, R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{1-t}}.$$

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, R_n est continue sur $[0, 1[$ comme quotient de fonctions continues sur $[0, 1[$.

c. Soit x un élément de $[0, 1[$ et n un élément de $\mathbb{N}$.

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^k \right) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n t^k + R_n(t) \right) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^x t^k dt + \int_0^x R_n(t) dt.$$

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x + \int_0^x R_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt.}$$

d. Reprenons n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0, 1[$.

$$\forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} \text{ et } t^{n+1} \geq 0. \text{ Donc } \forall t \in [0, x], 0 \leq \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} t^{n+1}.$$

En intégrant entre 0 et x ($0 \leq x$) il vient :

$$0 \leq \int_0^x R_n(t) dt \leq \frac{1}{1-x} \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^x = \frac{x}{(1-x)(n+2)} \times x^{n+1} \leq \frac{x}{(1-x)(n+2)} \times 1.$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, 0 \leq \int_0^x R_n(t) dt \leq \frac{x}{(n+2)(1-x)}}.$$

$$\text{e. Soit } x \text{ un élément de } [0, 1[. \text{ c) donne : } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x R_n(t) dt.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{(n+2)(1-x)} = 0, \text{ l'encadrement de d) donne alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x R_n(t) dt = 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \left[-\ln(1-t) \right]_0^x = -\ln(1-x).$$

$$\text{Donc, } \boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } [0, 1[, \text{ la série de terme général } \frac{x^{k+1}}{k+1} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x)}.$$

$$\text{En divisant par } x \text{ élément de }]0, 1[\text{ on obtient : } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} = -\frac{\ln(1-x)}{x} = f(x).$$

$$\text{Ainsi : } \forall x \in]0, 1[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}. \text{ Ceci vaut encore pour } x = 0 \text{ car } f(0) = 1.$$

$$\text{Donc } \boxed{\forall x \in [0, 1[, f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}}.$$

4. a. Soit x un élément de $[0, 1]$. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{x^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. De plus la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente. Les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $\frac{x^n}{n^2}$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } [0, 1] \text{ la série de terme général } \frac{x^n}{n^2} \text{ converge}}.$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t \in [0, 1[, \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1} - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k+1} = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k+1}.$

f est continue sur $[0, 1[$ et $t \rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k+1}$ également. Par différence : $\boxed{\rho_n \text{ est continue sur } [0, 1[}$ et ceci pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

c. Soit x un élément de $[0, 1[$ et n un élément de $\mathbb{N}$.

$$g(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1} dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k+1} + \rho_n(t) \right) dt = \sum_{k=0}^n \int_0^x \frac{t^k}{k+1} dt + \int_0^x \rho_n(t) dt.$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \left[\frac{t^{k+1}}{(k+1)^2} \right]_0^x + \int_0^x \rho_n(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t) dt.$$

$$\boxed{\forall x \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t) dt}.$$

d. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et soit t un élément de $[0, 1[$.

Observons que : $\forall k \in \llbracket n+1, +\infty \rrbracket, \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{n+2}$. Ainsi avons-nous :

$$0 \leq \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1} \leq \frac{1}{n+2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k = \frac{1}{n+2} R_n(t) = \frac{1}{n+2} \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{1}{(n+2)(1-t)}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1[, 0 \leq \rho_n(t) \leq \frac{1}{(n+2)(1-t)}}.$$

Remarque On peut encore retrouver ce résultat en utilisant 3 d).

e. Soit n un élément de $\mathbb{N}$ et x un élément de $[0, 1[$. $\forall t \in [0, x], 0 \leq \rho_n(t) \leq \frac{1}{(n+2)(1-t)}$.

En intégrant entre 0 et x ($0 \leq x$) il vient : $0 \leq \int_0^x \rho_n(t) dt \leq \frac{1}{n+2} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \frac{1}{n+2} \left[-\ln(1-t) \right]_0^x.$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1[, 0 \leq \int_0^x \rho_n(t) dt \leq \frac{-\ln(1-x)}{n+2}}.$

f. Soit x un élément de $[0, 1[$. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^x \rho_n(t) dt = g(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} \leq -\frac{\ln(1-x)}{n+2}.$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln(1-x)}{n+2} \right) = 0$ il vient par encadrement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} = g(x).$

Ou : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k^2} = g(x)$ c'est à dire : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} = g(x).$

Ainsi $\boxed{\forall x \in [0, 1[, g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}}.$

Exercice Montrer que ceci vaut encore pour $x = 1$

(on pourra en utilisant la définition prouver que $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$).
