PREMIER PROBLÈME

Partie I

1. a. S est une matrice symétrique et réelle donc $\boxed{S \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

b. Faisons simple. ${}^tPP = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0\\ 1 & 1 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}$.

$${}^tPP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}3+3 & \sqrt{3}-\sqrt{3} & \sqrt{6}-\sqrt{6}\\ \sqrt{3}-\sqrt{3} & 1+1+4 & \sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}\\ \sqrt{6}-\sqrt{6} & \sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2} & 2+2+2\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ (P est une matrice orthogonale).

• Supposons que D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.

$D = I_3DI_3 = {}^tPPD{}^tPP = {}^tPSP$. D'où l'unicité de D.

• Dès lors posons $D = {}^tPSP$ et vérifions que D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.

$$D = {}^tPSP = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0\\ 1 & 1 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ 2 & 5 & 2\\ 2 & 2 & 5\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2}\\ 0 & -2 & \sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

$$D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0\\ 1 & 1 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\sqrt{3} & 3 & 9\sqrt{2}\\ -3\sqrt{3} & 3 & 9\sqrt{2}\\ 0 & -6 & 9\sqrt{2}\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}18 & 0 & 0\\ 0 & 18 & 0\\ 0 & 0 & 54\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}.$$

$D = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$. $D = {}^tPSP$ est bien une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

De plus $PD{}^tP = P{}^tPSP{}^tP = I_3SI_3 = S$.

$$\boxed{\text{Il existe une matrice diagonale } D \text{ de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et une seule telle que } S = PD{}^tP.\ D = {}^tPSP = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}}.$$

<u>Remarque</u> *On peut encore obtenir le résultat demandé en posant* $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\ -\sqrt{3}\\ 0\end{pmatrix}$, $X_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$, $X_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$ *et en vérifiant que* (X_1, X_2, X_3) *est une base orthonormale de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *constituée de vecteurs propres de* S *respectivement associés aux valeurs propres* 3, 3 *et* 9.

2. a. $M - 2I_3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. $(M-2I_3)^2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

$(M-2I_3)^3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I_3$. $\boxed{(M-2I_3)^3 = I_3}$.

b. Raisonnons par l'absurde. Supposons que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Remarquons alors que $H = (X-2)^3 - 1 = (X-3)(X^2-3X+3)$ est un polynôme annulateur de M ayant pour unique racine réelle 3. Alors 3 est la seule valeur propre réelle possible de M. Mais M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc 3 est la seule valeur propre réelle de M et le sous-espace propre associé est égal à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La dimension de ce sous-espace propre est donc 3 et aussi $3 - \text{rg}(M - 3I_3)$ non ? Ainsi $\text{rg}(M-3I_3) = 0$; $M - 3I_3$ est alors la matrice nulle. M vaut donc $3I_3$ ce qui contrarie légèrement la définition initiale de M.

$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

<u>Remarque</u> *Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 3 est la droite vectorielle engendrée par* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Notons que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (il est aisé de vérifier qu'elle possède trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$: 3, $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$).*

c. $^tMM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. $\boxed{^tMM = S}$.

<u>Remarque</u> *Dès lors il n'est pas très surprenant que S soit symétrique et à valeurs propres positives ou nulles...*

Partie II

1. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$ de matrices X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

$g(y)$ et $f(x)$ ont pour matrices ^tAY et AX dans la base $\mathcal{B}$.

Alors $< g(y), x >= {}^t({}^tAY)X = {}^tY{}^t({}^tA)X = {}^tYAX =< y, f(x) >$.

$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ < g(y), x >=< y, f(x) >}$.

Reprenons un élément x dans $\mathbb{R}^n$ et appliquons ce qui précède avec $y = f(x)$.

Il vient : $< g(f(x)), x >=< f(x), f(x) >= \|f(x)\|^2$. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < (g \circ f)(x), x >= \|f(x)\|^2}$.

2. $g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ comme composée de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Appliquons deux fois Q1.

$< (g \circ f)(x), y >=< g(f(x)), y >=< f(x), f(y) >$.

$< x, (g \circ f)(y) >=< g(f(y)), x >=< f(y), f(x) >=< f(x), f(y) >$.

Ainsi : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ < (g \circ f)(x), y >=< x, (g \circ f)(y) >$.

$\boxed{g \circ f \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathbb{R}^n}$.

<u>Remarque</u> *On peut aussi obtenir ce résultat par des considérations matricielles. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de $g \circ f$ dans cette base est ^tAA donc est une matrice symétrique car $^t({}^tAA) = {}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA$. Ceci suffit pour conclure.*

3. $g \circ f$ étant un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, $\boxed{g \circ f \text{ est diagonalisable}}$.

Soit λ une valeur propre de $g \circ f$. Il existe un élément non nul x de $\mathbb{R}^n$ tel que $(g \circ f)(x) = \lambda x$.

$\|f(x)\|^2 =< (g \circ f)(x), x >=< \lambda x, x >= \lambda < x, x >= \lambda\ \|x\|^2$. Alors $\lambda = \dfrac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}$ puisque x n'est pas nul.

λ est positif ou nul comme quotient d'un réel positif ou nul par un réel strictement positif.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } g \circ f \text{ sont positives ou nulles}}$.

4. $g \circ f$ étant un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, le cours permet de dire que :

$\boxed{\text{il existe une base orthonormale } \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ constituée de vecteurs propres de } g \circ f}$.

5. Soit λ_1, λ_2, ..., λ_n les valeurs propres de $g \circ f$ associées aux vecteurs propres e'_1, e'_2, ..., e'_n.

Q est la matrice de passage de la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ à la base orthonormale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ donc $Q^{-1} = {}^tQ$. Notons encore que ${}^tAA$ est la matrice de $g \circ f$ dans $\mathcal{B}$.

Alors la matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}'$ est : $Q^{-1}\,{}^tAAQ = {}^tQ\,{}^tAAQ$.

Mais, pour tout élément i de $\in [\![1, n]\!]$, $(g \circ f)(e'_i) = \lambda_i\ e'_i$.

Alors ${}^tQ\,{}^tAAQ$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Il est grand temps de traiter le problème... dans toute sa plénitude.

Soient μ_1, μ_2, ..., μ_n n réels positifs ou nuls et Δ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$.

${}^tAA = Q(\Delta^2)\,{}^tQ \Longleftrightarrow {}^tQ\,{}^tAAQ = {}^tQQ(\Delta^2)\,{}^tQQ \Longleftrightarrow {}^tQ\,{}^tAAQ = \Delta^2$.

$${}^tAA = Q(\Delta^2)\,{}^tQ \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} {\mu_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\mu_2}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {\mu_n}^2 \end{pmatrix}$$

${}^tAA = Q(\Delta^2)\,{}^tQ \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i^2 = \lambda_i$.

λ_1, ..., λ_n, μ_1, ..., μ_n étant des réels positifs ou nuls on a : ${}^tAA = Q(\Delta^2)\,{}^tQ \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Il existe un **unique** n-uplet $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ de réels positifs ou nuls tel que la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tAA = Q(\Delta^2)\,{}^tQ$. $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i = \sqrt{\lambda_i}}$.

6. Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. $<(g\circ f)(e'_i), e'_j>=<f(e'_i), f(e'_j)>$.

Donc $<f(e'_i), f(e'_j)>=<(g\circ f)(e'_i), e'_j>=<\lambda_i\ e'_i, e'_j>=\lambda_i\ <e'_i, e'_j>$.

Rappelons que $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Donc si i n'est pas égal à j : $<f(e'_i), f(e'_j)>=\lambda_i\ <e'_i, e'_j>=0$.

De plus : $\|f(e'_j)\|^2=<f(e'_j), f(e'_j)>=\lambda_j\ <e'_j, e'_j>=\lambda_j\ \|e'_j\|^2=\lambda_j$. Alors $\|f(e'_j)\|=\sqrt{\lambda_j}=\mu_j$.

$\boxed{\Big(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n)\Big) \text{ est une famille orthogonale et pour tout élément } j \text{ de } [\![1,n]\!],\ \|f(e'_j)\|=\mu_j}$.

7. a. A est inversible donc ${}^tA$ également. ${}^tAA$ est alors inversible comme produit de deux matrices inversibles. Par conséquent les valeurs propres de ${}^tAA$ donc de $g\circ f$ sont non nulles. Ainsi λ_1, ..., λ_n sont des réels non nuls.

Comme $\mu_i=\sqrt{\lambda_i}$, pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, $\boxed{\text{les nombres réels } \mu_1,\ \mu_2,\ ...,\ \mu_n \text{ sont tous non nuls}}$.

7. b. Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. $<\dfrac{1}{\mu_i}\ f(e'_i), \dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j)>=\dfrac{1}{\mu_i\mu_j}<f(e'_i), f(e'_j)>$.

Si i et j sont distincts, $<\dfrac{1}{\mu_i}\ f(e'_i), \dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j)>=0$ car la famille $\Big(f(e'_1), f(e'_2), \dots, f(e'_n)\Big)$ est orthogonale.

$<\dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j), \dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j)>=\dfrac{1}{\mu_j^2}<f(e'_j), f(e'_j)>=\dfrac{1}{\mu_j^2}\ \|f(e'_j)\|^2=1$ car $\|f(e'_j)\|=\mu_j$.

Finalement la famille $\Big(\dfrac{1}{\mu_1}\ f(e'_1), \dfrac{1}{\mu_2}\ f(e'_2), \dots, \dfrac{1}{\mu_n}\ f(e'_n)\Big)$ est orthonormale. Elle est donc libre.

$\Big(\dfrac{1}{\mu_1}\ f(e'_1), \dfrac{1}{\mu_2}\ f(e'_2), \dots, \dfrac{1}{\mu_n}\ f(e'_n)\Big)$ est une famille libre de n éléments de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension n.
C'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\boxed{\mathcal{C}=\Big(\dfrac{1}{\mu_1}\ f(e'_1), \dfrac{1}{\mu_2}\ f(e'_2), \dots, \dfrac{1}{\mu_n}\ f(e'_n)\Big) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^n}$.

7. c. C'est très simple pourvu que l'on sache son cours. Un petit rappel s'impose.

E est un espace vectoriel de dimension non nulle p. $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_1$ sont deux bases de E et $\mathrm{Pas}(\mathcal{U},\mathcal{U}_1)$ est la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}_1$.
E' est un espace vectoriel de dimension non nulle n. $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}'_1$ sont deux bases de E' et $\mathrm{Pas}(\mathcal{U}',\mathcal{U}'_1)$ est la matrice de passage de $\mathcal{U}'$ à $\mathcal{U}'_1$.
f est une application linéaire de E dans E'. Alors :

$$\boxed{M(f,\mathcal{U}_1,\mathcal{U}'_1)=(\mathrm{Pas}(\mathcal{U}',\mathcal{U}'_1))^{-1}\ M(f,\mathcal{U},\mathcal{U}')\ \mathrm{Pas}(\mathcal{U},\mathcal{U}_1)}.$$

Appliquons. $A=M(f,\mathcal{B},\mathcal{B})=(\mathrm{Pas}(\mathcal{C},\mathcal{B}))^{-1}\ M(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})\ \mathrm{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

Or $(\mathrm{Pas}(\mathcal{C},\mathcal{B}))^{-1}=\mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{C})=R$ et $\mathrm{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B})=(\mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}'))^{-1}=Q^{-1}={}^tQ$. Alors $A=R\ M(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})\ {}^tQ$.

Cherchons : $M(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})$. Observons que : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ f(e'_i)=\mu_i\Big(\dfrac{1}{\mu_i}\ f(e'_i)\Big)$.

Ainsi la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ est : $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$.

Finalement $\boxed{A = R\Delta^t Q}$.

Partie III

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice ${}^tM$ dans $\mathcal{B}$. La matrice de $g \circ f$ dans $\mathcal{B}$ est ${}^tMM = S$.

Posons $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\big(\sqrt{3}\, e_1 - \sqrt{3}\, e_2\big)$, $e'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\big(e_1 + e_2 - 2e_3\big)$ et $e'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\big(\sqrt{2}\, e_1 + \sqrt{2}\, e_2 + \sqrt{2}\, e_3\big)$.

Des calculs élémentaires montrent que (e'_1, e'_2, e'_3) est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$. C'est donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Alors $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Notons que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'est autre que la matrice P. Or nous avons vu que :

$S = PD^tP = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Alors $D = P^{-1}SP$ n'est autre que la matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}'$ et ainsi $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de $g \circ f$ respectivement associés aux valeurs propres 3, 3 et 9.

Nous pouvons alors appliquer la partie II car la matrice M est inversible (3 est sa seule valeur propre réelle).

Ainsi $M = R\Delta^tQ$ où Q est matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (donc $Q = P$), $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et R est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C} = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, f(e'_1), \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, f(e'_2), \dfrac{1}{3}\, f(e'_3)\Big)$.

Déterminons R.

$e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\big(\sqrt{3}\, e_1 - \sqrt{3}\, e_2\big)$ et $M \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{3}/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{3}/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{6} \\ -2\sqrt{3}/\sqrt{6} \\ \sqrt{3}/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Donc $f(e'_1) = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\,(e_1 - 2e_2 + e_3)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, f(e'_1) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,(e_1 - 2e_2 + e_3)$

On obtient de la même manière $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, f(e'_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3)$ et $\dfrac{1}{3}\, f(e'_3) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(e_1 + e_2 + e_3)$.

Ainsi $\mathcal{C} = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\,(e_1 - 2e_2 + e_3), \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3), \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(e_1 + e_2 + e_3)\Big)$ et $R = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Finalement

$$\boxed{M = R\Delta^tQ \text{ avec } R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

I Calcul d'une somme et d'une intégrale.

1. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et x un élément de $[0,\pi]$.

$1+2\,C_n(x) = 1+\sum\limits_{k=1}^{n} 2\cos(kx) = 1+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right) = 1+\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}+\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-ikx}.$

Or $1=e^{i0x}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-ikx} = \sum\limits_{k=-n}^{-1} e^{ikx}$. Donc $1+2\,C_n(x) = e^{i0x}+\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}+\sum\limits_{k=-n}^{-1} e^{ikx} = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,\pi],\ 1+2\,C_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}}.$$

b. Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$ et z un élément de $\mathbb{C}$ différent de 1 **et de 0**.

$\sum\limits_{k=-n}^{n} z^k$ est la somme de $2n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison z le premier étant z^{-n}.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{-n}\,\frac{1-z^{2n+1}}{1-z}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall z\in\mathbb{C}-\{0,1\},\ \sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{-n}\,\frac{1-z^{2n+1}}{1-z}}.$$

c. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et x un élément de $]0,\pi]$. e^{ix} est un élément de $\mathbb{C}$ différent de 1 et 0 donc :

$$1+2\,C_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\left(e^{ix}\right)^k = \left(e^{ix}\right)^{-n}\,\frac{1-\left(e^{ix}\right)^{2n+1}}{1-e^{ix}} = e^{-inx}\,\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}.$$

$$1+2\,C_n(x) = e^{-inx}\,\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\,\frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x}-e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}} = e^{ix(-n+\frac{2n+1}{2}-\frac{1}{2})}\,\frac{-2i\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

$1+2\,C_n(x) = e^{ix0}\,\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. En divisant par 2 il vient : $\dfrac{1}{2}+C_n(x) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]0,\pi],\ \frac{1}{2}+C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}.$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall x\in]0,\pi],\ f_n(x) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

f_n coïncide sur $]0,\pi]$ avec $\dfrac{1}{2}+C_n$ qui est continue sur $[0,\pi]$. f_n est donc continue sur $]0,\pi]$ et prolongeable par continuité en 0. Ceci suffit pour obtenir la convergence de $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

De plus $J_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \Big(\frac{1}{2} + C_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\cdot$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ J_n = \int_0^\pi \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin\big(\frac{t}{2}\big)}\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } \frac{\pi}{2}}.$$

3. $x \to \cos(ax) - 1$ et $x \to \sin\dfrac{x}{2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus cette dernière fonction ne s'annule pas sur $]0,\pi]$. Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

$$\frac{\cos(ax)-1}{\sin\frac{x}{2}} = -\frac{1-\cos(ax)}{\sin\frac{x}{2}} \underset{0}{\sim} -\frac{\frac{(ax)^2}{2}}{\frac{x}{2}} = -a^2 x.$$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(ax)-1}{\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}(-a^2x) = 0 = \varphi(0)$. Ainsi φ est continue en 0.

φ est donc continue sur $[0,\pi]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. Pour montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème "de la limite de la dérivée" nous indique alors qu'il suffit de prouver que la restriction de φ' à $]0,\pi]$ admet une limite finie en 0.

$$\forall x \in]0,\pi],\ \varphi'(x) = \frac{1}{(\sin\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\cos(ax)-1)\cos\frac{x}{2}\right]\cdot$$

$$\frac{1}{(\sin\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\cos(ax)-1)\cos\frac{x}{2}\right] \underset{0}{\sim} \frac{1}{(\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\cos(ax)-1)\cos\frac{x}{2}\right]\cdot$$

Conditionnons le second membre pour en trouver plus simplement sa limite en 0.

$$\frac{1}{(\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\cos(ax)-1)\cos\frac{x}{2}\right] = -2a^2\ \frac{\sin(ax)}{ax}\ \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} + 2a^2\cos\frac{x}{2}\ \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}\cdot$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$. De plus $\dfrac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{(ax)^2}{2}}{(ax)^2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[-2a^2\ \frac{\sin(ax)}{ax}\ \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} + 2a^2\cos\frac{x}{2}\ \frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}\right] = -2a^2\times 1\times 1 + 2a^2\times 1\times\frac{1}{2} = -a^2.$

Ou $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\cos(ax)-1)\cos\frac{x}{2}\right]\right) = -a^2.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sin\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}(\cos(ax)-1)\cos\frac{x}{2}\right] = -a^2 \quad (*).$

Ceci achève de montrer que $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$ et donne également $\boxed{\varphi'(0) = -a^2}$.

<u>Remarque</u> *On peut aisément trouver la limite* $(*)$ *en utilisant des développements limités.*

4. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Une intégration par parties simple donne :

$I_n = \displaystyle\int_0^\pi \varphi(t)\ \sin\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)\,\mathrm{d}t = \left[\varphi(t)\Big(-\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}\Big)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \varphi'(t)\ \Big(-\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}\Big)\,\mathrm{d}t$ car les fonctions φ et $t \to -\dfrac{\cos\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{n+\frac{1}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Notons que $\varphi(0) = 0$ et que $\cos\big((n+\frac{1}{2})\pi\big) = 0$.

On obtient alors : $I_n = \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^\pi \varphi'(t)\ \cos\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)\,\mathrm{d}t.$

$|I_n| = \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}} \left| \displaystyle\int_0^\pi \varphi'(t)\ \cos\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^\pi |\varphi'(t)|\ |\cos\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)|\,\mathrm{d}t.$

$|I_n| \leqslant \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^\pi |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$. Par encadrement il vient sans difficulté $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

<u>Remarque</u> *Il n'aura échappé à personne que nous venons de (re)démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue ou presque...*

II Calcul de la somme d'une série

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(at)\ \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(at)\ \sum_{k=1}^n \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(at)\ C_n(t)\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k = \int_0^\pi \cos(at)\ \Big(-\frac{1}{2} + C_n(t) + \frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(at)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \cos(at)\Big(C_n(t)+\frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(at)}{a}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \big(\cos(at)-1\big)\Big(C_n(t)+\frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \Big(C_n(t)+\frac{1}{2}\Big)\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \int_0^\pi \big(\cos(at)-1\big)\ \frac{\sin\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{\sin\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$

$\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(t)\ \sin\left(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t\right)\,\mathrm{d}t + J_n$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}\,I_n + J_n}.$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\dfrac{1}{2}\ I_n\Big) = 0$ (d'après I.4.) et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \dfrac{\pi}{2}$ (d'après I.2.).

Ainsi : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{\pi}{2}\cdot$

Par conséquent $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge et : } \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}}$.

3. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos(at)\ \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi \Big(\cos(at+nt)+\cos(at-nt)\Big)\,\mathrm{d}t.$

$u_n = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin(at+nt)}{a+n} + \dfrac{\sin(at-nt)}{a-n}\right]_0^\pi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin(a\pi+n\pi)}{n+a} - \dfrac{\sin(a\pi-n\pi)}{n-a}\right).$

Or $\sin(a\pi+n\pi) = (-1)^n\sin(\pi a)$ et $\sin(a\pi-n\pi) = (-1)^n\sin(\pi a)$. Par conséquent :

$u_n = \dfrac{1}{2}\ (-1)^n\ \sin(\pi a)\ \left(\dfrac{1}{n+a} - \dfrac{1}{n-a}\right) = \dfrac{1}{2}\ (-1)^n\ \sin(\pi a)\ \dfrac{(-2a)}{n^2-a^2}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(-1)^{n-1}a\sin(\pi a)}{n^2-a^2}}.$$

4. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\sin(\pi a)}{2a}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}a\sin(\pi a)}{n^2-a^2}=\frac{\sin(\pi a)}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2}\cdot$

En divisant par $\dfrac{\sin(\pi a)}{2}$ qui n'est pas nul, car a est un réel de l'intervalle $]0,1[$, il vient :

$\dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}-\dfrac{1}{a}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2}=\frac{\pi}{\sin(\pi a)}-\frac{1}{a}}.$$

III Calcul d'une intégrale

1. Posons : $\forall t\in]0,+\infty[,\ f(t)=\dfrac{1}{1+t^\alpha}$. f est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

$\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{1}{1+t^\alpha}=1$; f est donc prolongeable par continuité en 0 et ainsi $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe.

$f(t)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{t^\alpha}$ et f est positive, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Comme α est strictement supérieur à 1, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe et $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ également. Finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\text{ existe.}}$$

2.a. Ici, pour être dans l'esprit du texte, nous considérerons que $t\to t^\alpha$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Soit t un élément de $[0,1]$ et soit n un élément de $\mathbb{N}$. Observons que $-t^\alpha$ est différent de 1.

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,t^{k\alpha}+(-1)^{n+1}\,\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}=\sum_{k=0}^{n}(-t^\alpha)^k+(-1)^{n+1}\,\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}=\frac{1-(-t^\alpha)^{n+1}}{1-(-t^\alpha)}+\frac{(-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha}=\frac{1}{1+t^\alpha}\cdot$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[0,1],\ \frac{1}{1+t^\alpha}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,t^{k\alpha}+(-1)^{n+1}\,\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}}.$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t\in[0,1],\ 0\leqslant\dfrac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\leqslant t^{(n+1)\alpha}$.

En intégrant entre 0 et 1 il vient : $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^{(n+1)\alpha}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{(n+1)\alpha+1}}{(n+1)\alpha+1}\right]_0^1=\frac{1}{(n+1)\alpha+1}\cdot$

$\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{(n+1)\alpha+1}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)\alpha+1}=0$, on obtient par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t=0}.$$

c. En intégrant l'égalité de Q2. a. on obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{k\alpha}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{t^{k\alpha+1}}{k\alpha+1}\right]_0^1 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k\alpha+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

$\displaystyle\left|(-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$; Q2. b. donne alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left((-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right) = 0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = G(\alpha)$.

Donc $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{(-1)^k}{k\alpha+1} \text{ converge et } G(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\alpha+1}}$.

3. a. Soit A un réel strictement positif. Dans $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ effectuons le changement de variable $u = t^{1-\alpha}$

$\left(t = u^{\frac{1}{1-\alpha}}\right.$ et $\displaystyle\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}\,u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{1-\alpha}\,u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mathrm{d}u\Big)$.

Alors $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^{A^{1-\alpha}} \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,\frac{1}{1-\alpha}\,u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1-\alpha}\int_1^{A^{1-\alpha}} \frac{1}{u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}+1}\,\mathrm{d}u$.

$$\int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\int_{A^{1-\alpha}}^1 \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\,\mathrm{d}u \quad (**).$$

Comme $1-\alpha$ est strictement négatif : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = 0$. De plus $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\,\mathrm{d}u$ existe et vaut $G\Big(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\Big)$ car $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} > 1$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans $(**)$ on obtient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\,G\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)$. Finalement :

$$\boxed{H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\,G\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)}.$$

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\,G\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big) = \frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\frac{\alpha}{\alpha-1}+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k\alpha+\alpha-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k\alpha-1}.$$

$$\boxed{H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}}.$$

b. $\displaystyle F(\alpha) = G(\alpha)+H(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\alpha+1} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^{n-1}\Big(\frac{1}{n\alpha-1} - \frac{1}{n\alpha+1}\Big)\right]$.

Il vient alors sans difficulté :

$$\boxed{F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}}.$$

4. α appartient à $]1,+\infty[$ donc $\dfrac{1}{\alpha}$ appartient à $]0,1[$. Alors II Q4. donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha}}{n^2-\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}} - \alpha$.

Ou encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}\ \alpha}{n^2\alpha^2-1} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}} - \alpha$. En divisant par α on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}} - 1$.

Alors $F(\alpha) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}}.$$
