
PREMIER PROBLÈME

1. a. Montrons par récurrence que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, f_n est une application polynômiale.

- Cela semble relativement clair pour $n = 0$ puisque $\forall x \in I, f_0(x) = 1$.

- Supposons que pour un élément n de $\mathbb{N}$, f_n soit une application polynômiale. Montrons qu'il en est de même pour f_{n+1} .

f_n est une application polynômiale donc $h_n : t \rightarrow f_n(t) + f_n(t^2)$ aussi. Ainsi $x \rightarrow \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2)) dt$ est également une application polynômiale car c'est la primitive de h_n sur l'intervalle I qui prend la valeur 0 en 0.

Alors $f_{n+1} : x \rightarrow 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2)) dt$ est encore une application polynômiale et ainsi s'achève la récurrence.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, f_n est une application polynômiale.

b. $\forall x \in I, f_1(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_0(t) + f_0(t^2)) dt = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x 2 dt = 1 + \frac{1}{2} (2x) = 1 + x$.

$\forall x \in I, f_1(x) = 1 + x$.

$\forall x \in I, f_2(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_1(t) + f_1(t^2)) dt = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (1 + t + 1 + t^2) dt = 1 + \frac{1}{2} \left[2t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right]_0^x$.

$\forall x \in I, f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}$.

$\forall x \in I, f_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}$.

$\forall x \in I, f_3(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_2(t) + f_2(t^2)) dt = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6} + 1 + t^2 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} \right) dt$.

$\forall x \in I, f_3(x) = 1 + \frac{1}{2} \left[2t + \frac{t^2}{2} + \frac{5t^3}{12} + \frac{t^4}{24} + \frac{t^5}{20} + \frac{t^7}{42} \right]_0^x$.

$\forall x \in I, f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^3}{24} + \frac{x^4}{48} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{84}$.

2. Notons que I est un segment et qu'ainsi toute application continue de I dans $\mathbb{R}$, possède un maximum (et un minimum).

Ainsi, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on a encore : $D_n = \max_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$ ($|f_n - f_{n-1}|$ est continue sur $I \dots$).

a. $D_1 = \max_{x \in I} |f_1(x) - f_0(x)| = \max_{x \in I} |1 + x - 1| = \max_{x \in I} |x| = \frac{1}{2}.$

$$D_1 = \frac{1}{2}.$$

$$D_2 = \max_{x \in I} |f_2(x) - f_1(x)| = \max_{x \in I} \left| 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} - 1 - x \right| = \max_{x \in I} \left| \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} \right| = \max_{x \in I} \left| \frac{x^2}{6} \left(x + \frac{3}{2} \right) \right|.$$

Si x est dans I , $\frac{x^2}{6} \left(x + \frac{3}{2} \right)$ est un réel positif ; donc $D_2 = \max_{x \in I} \left[\frac{x^2}{6} \left(x + \frac{3}{2} \right) \right] = \max_{x \in I} \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} \right).$

Dès lors étudions rapidement la fonction u définie par : $\forall x \in I, u(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}.$

u est dérivable sur I et $\forall x \in I, u'(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}(1 + x).$ Donc si x est dans I , $u'(x)$ est du signe de x .

Ainsi u est décroissante sur $[-\frac{1}{2}, 0]$ et croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Remarquons que $u(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$ et $u(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}.$

Ce qui précède donne alors : $\max_{x \in I} u(x) = \frac{1}{12}$ et donc

$$D_2 = \frac{1}{12}.$$

b. Afin de ne pas refaire quatre fois la même démonstration (au niveau de Q2 b, Q4 a, Q4 c et Q7) je propose d'établir le lemme suivant.

Soit g une application continue du segment $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{R}$. Posons $M = \max_{x \in I} |g(x)|.$

$$\forall (x, y) \in I^2, \left| \int_y^x (g(t) + g(t^2)) dt \right| \leq 2M|x - y| \quad (1).$$

$$\forall x \in I, \left| \int_0^x (g(t) + g(t^2)) dt \right| \leq M \quad (2).$$

Démonstration du lemme.

$$\forall t \in I, t^2 \in I. \text{ Donc : } \forall t \in I, |g(t) + g(t^2)| \leq |g(t)| + |g(t^2)| \leq 2M.$$

Soit x et y deux éléments de I .

Si $y \leq x$: $\left| \int_y^x (g(t) + g(t^2)) dt \right| \leq \int_y^x |g(t) + g(t^2)| dt \leq \int_y^x 2M dt \leq 2M(x - y) = 2M|x - y|.$

Si $y > x$: $\left| \int_y^x (g(t) + g(t^2)) dt \right| = \left| - \int_x^y (g(t) + g(t^2)) dt \right| = \left| \int_x^y (g(t) + g(t^2)) dt \right|$ et nous sommes ramenés au cas précédent et (1) est alors prouvé.

Soit x un élément de I . (1) donne sans difficulté : $\left| \int_0^x (g(t) + g(t^2)) dt \right| \leq 2M|x - 0| = 2M|x|.$

Comme x est dans I : $2|x| \leq 1$. Par conséquent : $\left| \int_0^x (g(t) + g(t^2)) dt \right| \leq M.$

Ceci achève la démonstration du lemme.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit x un élément de I .

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \left| 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2)) dt - 1 - \frac{1}{2} \int_0^x (f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)) dt \right|.$$

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \frac{1}{2} \left| \int_0^x [(f_n - f_{n-1})(t) + (f_n - f_{n-1})(t^2)] dt \right|.$$

Rappelons que $f_n - f_{n-1}$ est continue sur I et que $\max_{x \in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)| = D_n$.

En appliquant le point 2 du lemme à $|f_n - f_{n-1}|$ il vient : $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n.}$$

c. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Nous venons de voir que : $\forall x \in I, |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n$.

Par conséquent $D_{n+1} = \max_{x \in I} |f_{n+1} - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} D_n$.

Résumons : $D_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, D_{n+1} \leq \frac{1}{2} D_n$. Une récurrence des plus banales donne alors :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, D_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

d. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq D_n \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

La convergence de la série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ($|\frac{1}{2}| < 1$!) et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } D_n \text{ converge.}}$$

Soit x un élément de I . $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq D_n$.

La convergence de la série de terme général D_n et les règles de comparaison des séries à termes positifs montrent que la série de terme général $|f_n(x) - f_{n-1}(x)|$ converge.

Pour tout élément x de I , la série de terme général $f_n(x) - f_{n-1}(x)$ est absolument convergente donc convergente.

3. Soit x un élément de I .

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_{k-1}(x)) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x) - 1.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_{k-1}(x)) + 1.$$

Comme la série de terme général $f_n(x) - f_{n-1}(x)$ converge, la suite de terme général $\sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_{k-1}(x))$ converge également. Il est alors clair que :

$$\boxed{\text{la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

4. Ici encore si n est dans $\mathbb{N}$, $M_n = \max_{x \in I} |f_n(x)|$ (car $|f_n|$ est continue sur le segment I).

a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\forall x \in I, |f_n(x)| = \left| 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)) dt \right| \leq 1 + \frac{1}{2} \left| \int_0^x (f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)) dt \right|.$$

En appliquant le point 2 du lemme à f_{n-1} il vient alors : $\forall x \in I, |f_n(x)| \leq 1 + \frac{1}{2} M_{n-1}$.

Alors $M_n = \max_{x \in I} |f_n(x)| \leq 1 + \frac{1}{2} M_{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \leq 1 + \frac{1}{2} M_{n-1}.$$

b. Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $M_n \leq 2$.

- La propriété est vraie pour $n = 0$ car M_0 vaut 1 puisque $f_0 = 1$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n + 1$. $M_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2} M_n$.
Comme, par hypothèse $M_n \leq 2$: $M_{n+1} \leq 1 + \frac{1}{2} \times 2 = 2$ et ainsi s'achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, M_n \leq 2.}$$

c. Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$, x et y deux éléments de I .

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &= \left| 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)) dt - 1 - \frac{1}{2} \int_0^y (f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)) dt \right| \\ |f_n(x) - f_n(y)| &= \frac{1}{2} \left| \int_y^x (f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)) dt \right|. \end{aligned}$$

En appliquant le point 1 du lemme à f_{n-1} il vient : $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{2} 2M_{n-1}|x - y| = M_{n-1}|x - y|$.

Or $M_{n-1} \leq 2$ donc $|f_n(x) - f_n(y)| \leq 2|x - y|$.

Notons que cette dernière inégalité vaut encore pour $n = 0$ car $f_0 = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in I^2, |f_n(x) - f_n(y)| \leq 2|x - y|.$$

5. a. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in I^2, |f_n(x) - f_n(y)| \leq 2|x - y|$. En faisant tendre n vers l'infini on obtient sans difficulté :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|.$$

b. Soit a un élément de I . $\forall x \in I, |f(x) - f(a)| \leq 2|x - a|$.

$\lim_{x \rightarrow a} |x - a| = 0$ donne alors $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)| = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

f est continue en a et ceci pour tout élément a de I .

f est continue sur I .

6. a. Soient x un élément de I , n et p deux éléments de $\mathbb{N}^*$.

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (f_k(x) - f_{k-1}(x)) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x) - f_{k-1}(x)|.$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} D_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^p}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right).$$

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right).$$

b. $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. En faisant tendre p vers l'infini on obtient sans difficulté :

$$\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}^*, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

7. Soit x un élément de I .

Rappelons que : $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2)) dt$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_{n+1}(x) = f(x)$.

Ainsi pour montrer que $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt$ il suffit de prouver que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2)) dt \right) = \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt.$$

Montrons pour cela que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x [(f_n - f)(t) + (f_n - f)(t^2)] dt \right) = 0$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $f_n - f$ est continue sur I .

Le point 2 du lemme appliqué à cette application donne alors :

$$\left| \int_0^x [(f_n - f)(t) + (f_n - f)(t^2)] dt \right| \leq \max_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \max_{x \in I} |f(x) - f_n(x)|.$$

Or $\forall x \in I, |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$. Donc $\left| \int_0^x [(f_n - f)(t) + (f_n - f)(t^2)] dt \right| \leq \frac{1}{2^n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ fournit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x [(f_n - f)(t) + (f_n - f)(t^2)] dt \right) = 0$ et achève de montrer que :

$$\forall x \in I, f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie I : Etude d'un exemple

1. E est de dimension 3 donc pour montrer que la famille de trois vecteurs $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est une base de E il suffit de montrer que c'est une famille libre.

$$f(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3, \quad f^2(e_1) = f(f(e_1)) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3 \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soient α, β et γ trois éléments de $\mathbb{C}$ tels que : $\alpha e_1 + \beta f(e_1) + \gamma f^2(e_1) = 0_E$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$$\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2 - 2e_3) + \gamma(-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = 0_E \quad \text{donc} \quad (\alpha + \beta - \gamma)e_1 + (\beta - 2\gamma)e_2 + (-2\beta + 2\gamma)e_3 = 0_E.$$

La liberté de (e_1, e_2, e_3) donne alors $\alpha + \beta - \gamma = \beta - 2\gamma = -2\beta + 2\gamma = 0$.

Ainsi $\gamma = \beta = 2\gamma$ et $\alpha + \beta - \gamma = 0$. Nécessairement $\beta = \gamma = 0$ et $\alpha = -\beta + \gamma = 0$. Finalement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ceci achève de montrer que :

$(e_1, f(e_1), f^2(e_1)) \text{ est une base de } E.$

Cherchons la matrice de f dans cette base.

$$f(e_1) = 0.e_1 + 1.f(e_1) + 0.f^2(e_1) \quad \text{et} \quad f^2(e_1) = 0.e_1 + 0.f(e_1) + 1.f^2(e_1).$$

$$f(f^2(e_1)) = f(-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = -e_1 + e_2 \quad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(f^2(e_1)) = -e_1 + e_2 = -e_1 - (e_1 + e_2 - 2e_3) - (-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = -e_1 - f(e_1) - f^2(e_1).$$

La matrice de f dans la base $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

2. Montrons que f est cyclique d'ordre 4.

- $f^3(e_1) = -e_1 + e_2$; alors $f^4(e_1) = -f(e_1) + f(e_2) = -(e_1 + e_2 - 2e_3) + (2e_1 + e_2 - 2e_3) = e_1$.

- $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est une famille génératrice de E comme sur-famille de la famille génératrice

$(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ de E . En effet $E = \text{Vect}(e_1, f(e_1), f^2(e_1)) \subset \text{Vect}(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)) \subset E$ donne $\text{Vect}(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)) = E$ n'est-il pas ?

- $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)) = (e_1, e_1 + e_2 - 2e_3, -e_1 - 2e_2 + 2e_3, -e_1 + e_2)$;

la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est donc constituée d'éléments deux à deux distincts.

Les trois points précédents permettent de dire que :

$$f \text{ est cyclique d'ordre 4 et } (e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)) \text{ est un cycle de } f.$$

3. Pour montrer que $f^4 = \text{id}_E$ il suffit de prouver que ces deux endomorphismes de E coïncident sur la base $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ de E . Pour cela il suffit de prouver que $f^4(e_1) = e_1$, $f^5(e_1) = f(e_1)$ et $f^6(e_1) = f^2(e_1)$.
 $f^4(e_1) = e_1$ résulte de Q1 et permet d'écrire que : $f(f^4(e_1)) = f(e_1)$ et $f^2(f^4(e_1)) = f^2(e_1)$; alors $f^5(e_1) = f(e_1)$ et $f^6(e_1) = f^2(e_1)$. Ainsi :

$$f^4 = \text{id}_E.$$

4. Observons que $f^4 - \text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de f dont l'ensemble des racines est $\{1, -1, i, -i\}$.

Les seules valeurs propres possibles de f sont 1, -1 , i et $-i$.

Notons $\mathcal{B}'$ la base $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ de E et A' la matrice de f dans cette base. $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit x un élément de E de coordonnées (α, β, γ) dans $\mathcal{B}'$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = \alpha \\ \alpha - \gamma = \beta \\ \beta - \gamma = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = 2\alpha \\ 2\alpha + \alpha = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow x = 0_E.$$

Donc 1 n'est pas valeur propre de f .

$$f(x) = -x \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = -\alpha \\ \alpha - \gamma = -\beta \\ \beta - \gamma = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

Alors -1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est $\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(e_1 + f^2(e_1))$.

Observons que $\text{Vect}(e_1 + f^2(e_1)) = \text{Vect}(e_1 - e_1 - 2e_2 + 2e_3) = \text{Vect}(-2e_2 + 2e_3) = \text{Vect}(e_2 - e_3)$.

$$f(x) = ix \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = i\alpha \\ \alpha - \gamma = i\beta \\ \beta - \gamma = i\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -i\alpha \\ \beta = \frac{1}{i}(\alpha - \gamma) = -i(\alpha + i\alpha) = (1 - i)\alpha \\ (1 - i)\alpha + i\alpha = i(-i\alpha) = \alpha \end{cases}$$

$$f(x) = ix \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -i\alpha \\ \beta = (1 - i)\alpha \\ \alpha = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -i\alpha \\ \beta = (1 - i)\alpha \end{cases}.$$

Alors i est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est $\text{SEP}(f, i) = \text{Vect}(e_1 + (1 - i)f(e_1) - if^2(e_1))$.

Or $e_1 + (1 - i)f(e_1) - if^2(e_1) = e_1 + (1 - i)(e_1 + e_2 - 2e_3) - i(-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = 2e_1 + (1 + i)e_2 - 2e_3$.

Par conséquent $\text{SEP}(f, i) = \text{Vect}(2e_1 + (1 + i)e_2 - 2e_3)$.

Remarquons alors que si X est un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, $A'X = -iX \Leftrightarrow A'\overline{X} = i\overline{X}$ puisque A' est à coefficients réels.

Ainsi $f(x) = -ix \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{\gamma} = -i\bar{\alpha} \\ \bar{\beta} = (1-i)\bar{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = i\alpha \\ \beta = (1+i)\alpha \end{cases}$. Alors $-i$ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est $\text{SEP}(f, -i) = \text{Vect}(e_1 + (1+i)f(e_1) + if^2(e_1)) = \text{Vect}(2e_1 + (1-i)e_2 - 2e_3)$.

f admet trois valeurs propres distinctes et E est de dimension 3 donc :

f est diagonalisable.

Comme $\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(e_2 - e_3)$, $\text{SEP}(f, i) = \text{Vect}(2e_1 + (1+i)e_2 - 2e_3)$ et $\text{SEP}(f, -i) = \text{Vect}(2e_1 + (1-i)e_2 - 2e_3)$:

$(e_2 - e_3, 2e_1 + (1+i)e_2 - 2e_3, 2e_1 + (1-i)e_2 - 2e_3)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $1, i$ et $-i$.

Partie II Cas général

1. $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est un cycle de f donc c'est une famille génératrice de E . Cette famille génératrice est de cardinal p et E est de dimension n , par conséquent :

$$p \geq n.$$

2. Soit x un élément de E . $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille génératrice de E donc il existe un élément $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1})$ de $\mathbb{C}^p$ tel que : $x = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0)$.

$$f^p(x) = f^p\left(\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0)\right) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^p(f^k(x_0)) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^{p+k}(x_0) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(f^p(x_0)).$$

Or $f^p(x_0) = x_0$. Ainsi $f^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k f^k(x_0) = x$.

Finalement $\forall x \in E, f^p(x) = x = \text{id}_E(x)$ donc :

$$f^p = \text{id}_E.$$

$f \circ f^{p-1} = f^p = \text{id}_E$. De même $f^{p-1} \circ f = f^p = \text{id}_E$. Ainsi :

$$f \text{ est bijective et } f^{-1} = f^{p-1}.$$

3. a. Par définition de m , $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre et $(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$ est liée.

Par conséquent il existe un élément non nul $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de $\mathbb{C}^{m+1}$ tel que : $\sum_{k=0}^m \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$.

Supposons $\lambda_m = 0$. Alors $\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$. La liberté de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ donne $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{m-1} = 0$.

Ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ ce qui induit une légère contradiction.

On peut donc affirmer que λ_m n'est pas nul et écrire : $f^m(x_0) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\right) f^k(x_0)$.

$$\boxed{f^m(x_0) \text{ est combinaison linéaire de } (x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)).}$$

b. Montrons par récurrence que, pour tout élément k de $\llbracket m, +\infty \rrbracket$, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.

- Nous venons de montrer que la propriété est vraie pour $k = m$.
- Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\llbracket m, +\infty \rrbracket$ et montrons la pour $k + 1$.

L'hypothèse de récurrence permet de dire que $f^k(x_0)$ appartient à $\text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

Alors : $f^{k+1}(x_0) \in f(\text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))) = \text{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0))$.

De toute évidence $f^i(x_0)$ appartient à $\text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ si i appartient à $\llbracket 1, m-1 \rrbracket$. $f^m(x_0)$ appartient également à $\text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ d'après a.

Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $f^i(x_0) \in \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

Alors $\text{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0)) \subset \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$. Comme $f^{k+1}(x_0)$ appartient à $\text{Vect}(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0))$, $f^{k+1}(x_0)$ appartient à $\text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

$f^{k+1}(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$ et ainsi s'achève la récurrence.

Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m , le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.

c. Nous venons de voir que pour tout élément k de $\llbracket m, +\infty \rrbracket$ le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$. Ceci vaut également pour k dans $\llbracket 0, m-1 \rrbracket$.

Ainsi tous les éléments de la famille génératrice $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ sont combinaisons linéaires de la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$.

Alors $E = \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)) \subset \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)) \subset E$.

Ainsi $\text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)) = E$.

La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est donc une famille génératrice de E . Rappelons que par définition de m elle est libre.

$(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est donc une base de E de cardinal m . Comme E est de dimension n :

$$\boxed{m = n \text{ et } (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)) \text{ est une base de } E.}$$

4. a. Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$$g(f^k(x_0)) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell f^\ell(f^k(x_0)) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell f^{\ell+k}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell f^k(f^\ell(x_0)) = f^k\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell f^\ell(x_0)\right).$$

Rappelons que, par hypothèse, $f^n(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell f^\ell(x_0)$.

$$\text{Ainsi } g(f^k(x_0)) = f^k(f^n(x_0)) = f^{k+n}(x_0) = f^{n+k}(x_0) = f^n(f^k(x_0)).$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, g(f^k(x_0)) = f^{n+k}(x_0) = f^n(f^k(x_0)).}$$

Ceci permet en particulier de dire que les deux endomorphismes g et f^n coïncident sur les éléments de la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ de E . Alors $g = f^n$.

$$\boxed{f^n = a_0 \text{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_{n-1} f^{n-1}.}$$

$$\text{b. } \forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, f(f^i(x_0)) = 0.x_0 + 0.f(x_0) + \dots + 0.f^i(x_0) + 1.f^{i+1}(x_0) + 0.f^{i+2}(x_0) + \dots + 0.f^{n-1}(x_0).$$

$$\text{On a également : } f(f^{n-1}(x_0)) = f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)) \text{ est donc : } \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.}$$

c. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$. Posons pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $e_k = f^k(x_0)$.

$(e_0, e_1, \dots, e_{n-1}) = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . De plus $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f(e_k) = e_{k+1}$.

Alors $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $(f - \lambda \text{id}_E)(e_k) = (f - \lambda \text{id}_E)(f^k(x_0)) = f^{k+1}(x_0) - \lambda f^k(x_0) = e_{k+1} - \lambda e_k$.

$(e_1 - \lambda e_0, e_2 - \lambda e_1, \dots, e_{n-1} - \lambda e_{n-2}, e_n - \lambda e_{n-1})$ est donc une famille d'éléments de $\text{Im}(f - \lambda \text{id}_E)$.

$(e_1 - \lambda e_0, e_2 - \lambda e_1, \dots, e_{n-1} - \lambda e_{n-2})$ également. Pour prouver que la dimension de $\text{Im}(f - \lambda \text{id}_E)$ est supérieure ou égale à $n-1$, montrons que cette dernière famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ un élément de $\mathbb{C}^{n-1}$ tel que : $\lambda_1 (e_1 - \lambda e_0) + \lambda_2 (e_2 - \lambda e_1) + \dots + \lambda_{n-1} (e_{n-1} - \lambda e_{n-2}) = 0_E$.

$$-\lambda_1 \lambda e_0 + (\lambda_1 - \lambda_2 \lambda) e_1 + (\lambda_2 - \lambda_3 \lambda) e_2 + \dots + (\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} \lambda) e_{n-2} + \lambda_{n-1} e_{n-1} = 0_E.$$

La famille $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est libre il vient donc :

$$-\lambda_1 \lambda = \lambda_1 - \lambda_2 \lambda = \lambda_2 - \lambda_3 \lambda = \dots = \lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} \lambda = \lambda_{n-1} = 0.$$

Ceci donne sans difficulté $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.

Ainsi $(e_1 - \lambda e_0, e_2 - \lambda e_1, \dots, e_{n-1} - \lambda e_{n-2})$ est une famille libre de $\text{Im}(f - \lambda \text{id}_E)$, de cardinal $n - 1$.

Par conséquent $\dim \text{Im}(f - \lambda \text{id}_E) \geq n - 1$.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \geq n - 1.}$$

Soit λ une valeur propre de f et $\text{SEP}(f, \lambda)$ le sous-espace propre associé.

$\dim \text{SEP}(f, \lambda) = \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$. En appliquant le théorème du rang on obtient :

$$\dim \text{SEP}(f, \lambda) = \dim E - \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) = n - \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E).$$

$$\text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \geq n - 1 \text{ donne alors } \dim \text{SEP}(f, \lambda) \leq n - (n - 1) = 1.$$

Ainsi $\text{SEP}(f, \lambda)$ est de dimension au plus 1.

Or par définition $\text{SEP}(f, \lambda)$ est de dimension au moins 1. Alors $\dim \text{SEP}(f, \lambda) = 1$.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } f \text{ sont de dimension 1.}}$$

5. a. f est cyclique d'ordre n donc $f^n = \text{id}_E$ (d'après Q2). $X^n - 1$ est alors un polynôme annulateur de f .

Toute valeur propre de f est alors une racine de ce polynôme. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si un nombre complexe } \lambda \text{ est valeur propre de } f, \text{ alors } \lambda^n = 1.}$$

b. $f^n(x_0) = x_0$, $f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \dots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0)$ et $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E . Alors $a_0 = 1$ et $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)) \text{ est donc : } \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .}$$

c. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ tel que $\lambda^n = 1$.

Soit x un élément de E de coordonnées $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ dans la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} .$$

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \alpha_{n-1} = \lambda \alpha_0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \alpha_k = \lambda \alpha_{k+1} .$$

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \alpha_{n-1} = \lambda \alpha_0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, \alpha_{k+1} = \frac{1}{\lambda} \alpha_k.$$

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \alpha_{n-1} = \lambda \alpha_0 \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \alpha_k = \frac{1}{\lambda^k} \alpha_0.$$

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \alpha_k = \frac{1}{\lambda^k} \alpha_0 \text{ et } \alpha_0 = \frac{1}{\lambda} \alpha_{n-1} = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\lambda^{n-1}} \alpha_0 = \frac{1}{\lambda^n} \alpha_0 = \alpha_0 !$$

$$f(x) = \lambda x \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \alpha_k = \frac{1}{\lambda^k} \alpha_0.$$

Alors λ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par

$$x_0 + \frac{1}{\lambda} f(x_0) + \frac{1}{\lambda^2} f^2(x_0) + \cdots + \frac{1}{\lambda^{n-1}} f^{n-1}(x_0).$$

$$\text{Posons } \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \text{ et } t_k = x_0 + \frac{1}{\lambda_k} f(x_0) + \frac{1}{\lambda_k^2} f^2(x_0) + \cdots + \frac{1}{\lambda_k^{n-1}} f^{n-1}(x_0).$$

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ sont les n solutions de l'équation $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda^n = 1$.

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ sont (les) n valeurs propres distinctes de f et $(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ est une famille d'éléments de E constituée de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes.

$(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ est alors une famille libre de cardinal n de l'espace vectoriel E dont la dimension est n .

$(t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ est donc une base de E constituée de vecteurs propres de f . Ainsi

f est diagonalisable.