

LYON 2003

PREMIER PROBLÈME

PARTIE I : Résultats généraux sur φ et J_n

1. Les fonctions $t \rightarrow \frac{1}{t}$ et $\sin$ sont continues sur $]0, +\infty[$. Par produit φ est continue sur $]0, +\infty[$.
 $\frac{\sin t}{t} \underset{0+}{\sim} \frac{t}{t} = 1$ donc $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t} = 1$. Alors $\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 1 = \varphi(0)$ et φ est continue (à droite) en 0.

φ est continue sur $[0, +\infty[$.

Alors pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ φ^n est continue sur $[0, +\infty[$ donc sur $[0, 1]$, ce qui suffit pour dire que :

$$J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt \text{ existe pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

2. a. $\forall t \in]0, 1]$, $\sin t > 0$ donc $\forall t \in]0, 1]$, $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t} > 0$. De plus $\varphi(0) > 0$. Ainsi :

φ est strictement positive sur $[0, 1]$.

φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall t \in]0, +\infty[$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2} (t \cos t - \sin t)$. Posons $\forall t \in [0, 1]$, $\psi(t) = t \cos t - \sin t$.

ψ est dérivable sur $[0, 1]$ et $\forall t \in [0, 1]$, $\psi'(t) = \cos t - t \sin t - \cos t = -t \sin t$.

Alors ψ est continue sur $[0, 1]$ et $\forall t \in]0, 1]$, $\psi'(t) < 0$ donc ψ est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Comme $\psi(0) = 0$, $\forall t \in]0, 1]$, $\psi(t) < 0$. Par conséquent $\forall t \in]0, 1]$, $\varphi'(t) = \frac{1}{t^2} \psi(t) < 0$.

φ est continue sur $[0, 1]$ et $\forall t \in]0, 1]$, $\varphi'(t) < 0$. Ainsi :

φ est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

- b. • Soit t un élément de $]0, 1]$. Ce qui précède donne $0 < \varphi(t) < \varphi(0) = 1$. Donc $|\varphi(t)| = \varphi(t) < 1$.

- Soit t un élément de $]1, +\infty[$. $|\sin t| \leq 1$ donc $|\varphi(t)| = \frac{|\sin t|}{t} \leq \frac{1}{t} < 1$. Finalement :

$\forall t \in]0, +\infty[, |\varphi(t)| < 1$.

3. a. Posons : $\forall t \in [0, +\infty[, f(t) = \sin t - t + t^2$. f est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

$$\forall t \in [0, +\infty[, f'(t) = \cos t - 1 + 2t \text{ et } f''(t) = -\sin t + 2.$$

f'' est positive sur $[0, +\infty[$ donc f' est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $f'(0) = 0$, f' est positive sur $[0, +\infty[$.

f est alors croissante sur $[0, +\infty[$ et comme $f(0) = 0$, f est positive sur $[0, +\infty[$.

Ainsi : $\forall t \in [0, +\infty[, \sin t - t + t^2 \geq 0$ ou $\forall t \in [0, +\infty[, \sin t \geq t(1 - t)$.

Alors $\forall t \in]0, +\infty[, \varphi(t) = \frac{\sin t}{t} \geq 1 - t$. Comme $\varphi(0) = 1 = 1 - 0$ on a :

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[, \varphi(t) \geq 1 - t.}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in [0, 1], \varphi(t) \geq 1 - t \geq 0$ donc $\forall t \in [0, 1], (\varphi(t))^n \geq (1 - t)^n$.

En intégrant il vient : $J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt \geq \int_0^1 (1 - t)^n dt = \left[-\frac{(1 - t)^{n+1}}{n + 1} \right]_0^1 = \frac{1}{n + 1}$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, J_n \geq \frac{1}{n + 1}.}$$

PARTIE II : Etude de I_1

1. a. Soit x un élément de $[1, +\infty[$.

Une intégration par parties simple (avec $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \sin t$) donne :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1}{t} (-\cos t) \right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2} \right) (-\cos t) dt \text{ ou } \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{(-\cos x)}{x} - \frac{(-\cos 1)}{1} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.}$$

b. $\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, le théorème d'encadrement donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Ainsi $x \rightarrow \cos 1 - \frac{\cos x}{x}$ admet une limite finie en $+\infty$ ce qui permet de dire que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont de même nature. Montrons la convergence de cette dernière intégrale.

$\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge. Les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| dt$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente donc convergente.

Ceci achève alors de montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Ainsi $K_1 = \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge. Comme $J_1 = \int_0^1 \varphi(t) dt$ existe alors $I_1 = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.

$$K_1 = \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \text{ et } I_1 = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt \text{ convergent.}$$

2. a. $\forall t \in [0, +\infty[, 1 \geq |\sin t| \geq 0$ donc $\forall t \in [0, +\infty[, |\sin t| \geq |\sin t|^2 = \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$.

$$\forall t \in [0, +\infty[, |\sin t| \geq \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

b. Utilisons une méthode analogue à celle de 1.a. pour obtenir la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt$ ou de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt.$$

Soit x un élément de $[1, +\infty[$. Une intégration par parties simple (avec $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \cos(2t)$) donne :

$$\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt = \left[\frac{1}{t} \left(\frac{\sin(2t)}{2} \right) \right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2} \right) \left(\frac{\sin(2t)}{2} \right) dt$$

$$\text{Alors } \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt = \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{(\sin 2)}{2} + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{2t^2} dt.$$

$$\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\sin(2x)}{2x} \right| \leq \frac{1}{2x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0, \text{ par encadrement il vient } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(2x)}{2x} = 0.$$

Ainsi $x \rightarrow \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin 2}{2}$ admet une limite finie en $+\infty$ ce qui permet de dire que les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{2t^2} dt$ sont de même nature.

Montrons la convergence de cette dernière intégrale.

$\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\sin(2x)}{2x^2} \right| \leq \frac{1}{2x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2} dt$ converge. Les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin(2t)}{2t^2} \right| dt$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{2t^2} dt$ est absolument convergente donc convergente.

Ceci achève alors de montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ converge. Ainsi :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt \text{ converge.}$$

c. $\forall t \in [1, +\infty[, |\varphi(t)| = \frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \geq 0$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t} dt \text{ diverge et } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t} dt \text{ converge donc } \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t} \right) dt \text{ diverge.}$$

Les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la divergence de $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$. $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge alors également.

L'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

PARTIE III : Etude de I_n pour $n \geq 2$

1. a Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

φ^n est continue sur $[1, +\infty[$ et $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq |\varphi(t)^n| = \frac{|\sin t|^n}{t^n} \leq \frac{1}{t^n}$.

La convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$ ($n \geq 2$) et les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} |\varphi(t)^n| dt$.

Ainsi $\int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n dt$ est absolument convergente donc convergente.

Pour tout élément n de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$ l'intégrale K_n est convergente.

b. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

Comme K_n est absolument convergente : $|K_n| = \left| \int_1^{+\infty} \varphi(t)^n dt \right| \leq \int_1^{+\infty} |\varphi(t)^n| dt$.

De plus $\forall t \in [1, +\infty[, 0 \leq |\varphi(t)^n| \leq \frac{1}{t^n}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$ converge donc : $|K_n| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^n} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{(n-1)t^{n-1}} \right]_1^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{1}{n-1}.$$

Par conséquent $|K_n| \leq \frac{1}{n-1}$.

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, |K_n| \leq \frac{1}{n-1}$$

2.a. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \left((\varphi(t))^{n+1} - (\varphi(t))^n \right) dt = \int_0^1 (\varphi(t))^n (\varphi(t) - 1) dt.$$

Or $\forall t \in [0, 1], 0 \leq \sin 1 = \varphi(1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(0) = 1$. Par conséquent : $\forall t \in [0, 1], (\varphi(t))^n \geq 0$ et $\varphi(t) - 1 \leq 0$.

Alors $\forall t \in [0, 1], (\varphi(t))^n (\varphi(t) - 1) \leq 0$ et ainsi : $J_{n+1} - J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n (\varphi(t) - 1) dt \leq 0$.

Finalement : $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, J_{n+1} \leq J_n$.

La suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

b. $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, \forall t \in [0, 1], (\varphi(t))^n \geq 0$ donc $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket, J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt \geq 0$.

La suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et minorée par zéro donc elle converge.

La suite $(J_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

c. Soient a un élément de $]0, 1[$ et n un élément de $\mathbb{N}$.

φ est décroissante, positive et majorée par 1 sur $[0, 1]$.

Par conséquent $\forall t \in [0, a], 0 \leq \varphi(t) \leq 1$ et $\forall t \in [a, 1], 0 \leq \varphi(t) \leq \varphi(a)$.

Ainsi $\forall t \in [0, a], 0 \leq (\varphi(t))^n \leq 1$ et $\forall t \in [a, 1], 0 \leq (\varphi(t))^n \leq (\varphi(a))^n$.

Alors $\int_0^a (\varphi(t))^n dt \leq \int_0^a 1 dt = a$ et $\int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq \int_a^1 (\varphi(a))^n dt = (1-a)(\varphi(a))^n$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in]0, 1[, \int_0^a (\varphi(t))^n dt \leq a \text{ et } \int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq (1-a)(\varphi(a))^n.$$

d. Soit a un élément de $]0, 1[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt = \int_0^a (\varphi(t))^n dt + \int_a^1 (\varphi(t))^n dt \leq a + (1-a)(\varphi(a))^n.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq J_n \leq a + (1-a)(\varphi(a))^n$ (*).

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\varphi(a))^n = 0$ car $|\varphi(a)| < 1$. En passant à la limite dans (*) on obtient $0 \leq \ell \leq a$.

$$\forall a \in]0, 1[, 0 \leq \ell \leq a$$

En faisant tendre a vers 0 dans l'encadrement précédent on obtient $\ell = 0$.

$$\ell = 0, \text{ donc la suite } (J_n)_{n \geq 2} \text{ converge vers } 0$$

3.a. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $J_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n dt$ et $K_n = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^n dt$ convergent donc :

$$\text{pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} (\varphi(t))^n dt \text{ converge.}$$

3.b. $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |I_n| = |J_n + K_n| \leq |J_n| + |K_n| \leq |J_n| + \frac{1}{n-1}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} |J_n| = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ alors, par encadrement on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

PARTIE IV : Etude de la série de terme général I_n

1. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$K_{2p} + K_{2p+1} = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^{2p} dt + \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^{2p+1} dt = \int_1^{+\infty} (\varphi(t))^{2p} (1 + \varphi(t)) dt$$

Or $\forall t \in [1, +\infty[, (\varphi(t))^{2p} \geq 0$ et $\forall t \in [1, +\infty[, 1 + \varphi(t) \geq 0$ car $\forall t \in]0, +\infty[, |\varphi(t)| \leq 1$.

Par conséquent $\forall t \in [1, +\infty[(\varphi(t))^{2p} (1 + \varphi(t)) \geq 0$ donc $\int_1^{+\infty} (\varphi(t))^{2p} (1 + \varphi(t)) dt \geq 0$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, K_{2p} + K_{2p+1} \geq 0.}$$

2. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq K_{2p} + K_{2p+1} = I_{2p} - J_{2p} + I_{2p+1} - J_{2p+1}$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*, I_{2p} + I_{2p+1} \geq J_{2p} + J_{2p+1}$. En sommant de 1 à N on obtient :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1}).}$$

3. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. En utilisant I.3.b et IV 2. on obtient :

$$\sum_{p=2}^{2N+1} I_p = \sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N \left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2} \right) = \sum_{p=3}^{2N+2} \frac{1}{p}$$

La série de terme général $\frac{1}{p}$ est divergente et à terme positifs donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Ce qui suffit pour dire que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=3}^{2N+2} \frac{1}{p} = +\infty$ et ainsi $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=2}^{2N+1} I_p = +\infty$.

Ceci suffit pour dire que la suite des sommes partielles de la série de terme général I_p ne converge pas. Alors

$$\boxed{\text{La série de terme général } I_n \text{ diverge.}}$$

SECOND PROBLÈME

PARTIE I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

1. f est non inversible donc f n'est pas bijective. Comme f est un endomorphisme de E , qui est de dimension finie, f n'est pas injective. Son noyau n'est donc pas réduit à 0_E donc 0 est valeur propre de f .

f est diagonalisable car f est un endomorphisme symétrique. Supposons que 0 soit la seule valeur propre de E . Alors le sous-espace propre de f associé à 0 est E donc $\text{Ker } f = E$ et f est l'endomorphisme nul de E ce qui contredit l'hypothèse.

0 est valeur propre de f et f admet au moins une valeur propre non nulle.

2. a. Tout cela est du cours. Soit x un élément de $E_f(\lambda)$ et y un élément de $E_f(\mu)$. $f(x) = \lambda x$ et $f(y) = \mu y$.

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle \quad (f \text{ est symétrique}).$$

$$\forall x \in E_f(\lambda), \forall y \in E_f(\mu), \lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

- b. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f .

$$\forall x \in E_f(\lambda), \forall y \in E_f(\mu), \lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle \text{ donc } \forall x \in E_f(\lambda), \forall y \in E_f(\mu), (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0.$$

Comme $\lambda - \mu$ n'est pas nul : $\forall x \in E_f(\lambda), \forall y \in E_f(\mu), \langle x, y \rangle = 0$. $E_f(\lambda)$ et $E_f(\mu)$ sont donc orthogonaux.

Les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3. Soient x un élément de $\text{Ker } f$ et y un élément de $\text{Im } f$. $f(x) = 0_E$ et il existe un élément t de E tel que $y = f(t)$.

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(t) \rangle = \langle f(x), t \rangle = \langle 0_E, t \rangle = 0.$$

$\forall x \in \text{Ker } f, \forall y \in \text{Im } f, \langle x, y \rangle = 0$ donc $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont orthogonaux. En particulier leur intersection est $\{0_E\}$.

Or, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$. Comme E est de dimension finie ceci achève de prouver que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires.

$\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E .

Remarque $(\text{Ker } f)^\perp = \text{Im } f$ et $(\text{Im } f)^\perp = \text{Ker } f$.

4. a. f est diagonalisable et admet $k + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Par conséquent : $E = E_f(\lambda_0) \oplus E_f(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E_f(\lambda_k)$. Ce qui signifie que :

pour tout élément x de E , il existe un unique $(k + 1)$ -uplet $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \dots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \dots + x_k$.

b. Soit j un élément de $\llbracket 0, k \rrbracket$ et soit x un élément de E .

$(x_0, x_1, \dots, x_k)$ est l'unique $(k + 1)$ -uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \dots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \sum_{\ell=0}^k x_\ell$.

$$p_j(x) = p_j\left(\sum_{\ell=0}^k x_\ell\right) = \sum_{\ell=0}^k p_j(x_\ell).$$

x_j appartient à $E_f(\lambda_j)$ donc $p_j(x_j) = x_j$. Soit ℓ un élément de $\llbracket 0, k \rrbracket$ distinct de j .

x_ℓ appartient à $E_f(\lambda_\ell)$ qui est orthogonal à $E_f(\lambda_j)$ donc qui est contenu dans l'orthogonal de $E_f(\lambda_j)$. Alors $p_j(x_\ell) = 0_E$.

Finalement $p_j(x) = \sum_{\ell=0}^k p_j(x_\ell) = x_j$.

Si j est dans $\llbracket 0, k \rrbracket$, si x est dans E et si $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ est l'unique $(k + 1)$ -uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \dots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \dots + x_k$ alors : $p_j(x) = x_j$.

En reprenant les notations précédentes on a : $\text{Id}_E(x) = x = \sum_{\ell=0}^k x_\ell = \sum_{\ell=0}^k p_\ell(x) = (p_0 + p_1 + \dots + p_k)(x)$ et ceci pour tout x dans E . Par conséquent :

$$\text{Id}_E = p_0 + p_1 + \dots + p_k.$$

5 .a. Soient i et j deux éléments distincts de $\llbracket 0, k \rrbracket$. Soit x un élément de E .

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ l'unique $(k + 1)$ -uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \dots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \sum_{\ell=0}^k x_\ell$.

$(p_i \circ p_j)(x) = p_i(p_j(x)) = p_i(x_j)$. j étant différent de i , $p_i(x_j) = 0_E$ car x_j appartient à l'orthogonal de $E_f(\lambda_i)$.

Finalement $\forall x \in E$, $(p_i \circ p_j)(x) = 0_E$. Par conséquent :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, k \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

b. Soit x un élément de E et soit $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ l'unique $(k+1)$ -uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \dots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \sum_{\ell=0}^k x_\ell$.

$$f(x) = f\left(\sum_{\ell=0}^k x_\ell\right) = \sum_{\ell=0}^k f(x_\ell) = \sum_{\ell=0}^k \lambda_\ell x_\ell = \sum_{\ell=0}^k \lambda_\ell p_\ell(x) = \left(\sum_{\ell=0}^k \lambda_\ell p_\ell\right)(x) = \left(\sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell p_\ell\right)(x) \quad (\lambda_0 = 0).$$

Donc : $\forall x \in E, f(x) = \left(\sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell p_\ell\right)(x)$. Alors :

$$f = \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell p_\ell = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_k p_k.$$

Remarque Il est aisé de montrer que : $\forall r \in \mathbb{N}^*, f^r = \sum_{\ell=1}^k \lambda_\ell p_\ell^r = \lambda_1 p_1^r + \lambda_2 p_2^r + \dots + \lambda_k p_k^r$.

c. Soit x un élément de E et soit $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ l'unique $(k+1)$ -uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \dots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \sum_{\ell=0}^k x_\ell$.

x_0 appartient à $E_f(\lambda_0)$ donc à $\text{Ker } f$. Posons $y = \sum_{\ell=1}^k x_\ell$ et montrons que y appartient à $\text{Im } f$.

$$\forall \ell \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_\ell \neq 0 \text{ donc } y = \sum_{\ell=1}^k x_\ell = \sum_{\ell=1}^k \left(\frac{1}{\lambda_\ell} \lambda_\ell x_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^k \left(\frac{1}{\lambda_\ell} f(x_\ell)\right) = f\left(\sum_{\ell=1}^k \frac{1}{\lambda_\ell} x_\ell\right).$$

Ainsi y appartient à l'image de f .

On a donc $x = x_0 + y$ avec x_0 dans $\text{Ker } f$ et y dans $\text{Im } f$. Ceci suffit pour dire que $p(x) = y$.

Donc $p(x) = \sum_{\ell=1}^k x_\ell = \sum_{\ell=1}^k p_\ell(x) = \left(\sum_{\ell=1}^k p_\ell\right)(x)$ et ceci pour tout élément x de E . Alors :

$$p = \sum_{\ell=1}^k p_\ell = p_1 + p_2 + \dots + p_k.$$

Remarque Notons que nous avons montré que $E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E_f(\lambda_k)$ est contenu dans $\text{Im } f$. En fait il n'est pas difficile de voir que $E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E_f(\lambda_k) = \text{Im } f$.

6. a. $f = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$ et $f^\sharp = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} p_j$.

$$f \circ f^\sharp = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j} p_j\right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left((\lambda_i p_i) \circ \left(\frac{1}{\lambda_j} p_j\right)\right) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} p_i \circ p_j\right).$$

Rappelons que $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, p_i \circ p_i = p_i$ et que $\forall (i, j) \in \llbracket 0, k \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$$\text{Alors : } f \circ f^\sharp = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i} p_i\right) = \sum_{i=1}^k p_i = p.$$

$$f \circ f^\sharp = \sum_{i=1}^k p_i = p.$$

b. Soient x et y deux éléments de E .

$$f(x) - p(y) = f(x) - (f \circ f^\sharp)(y) = f(x) - f(f^\sharp(y)) = f(x - f^\sharp(y)).$$

Ainsi on a $f(x) = p(y)$ si et seulement si $f(x - f^\sharp(y)) = 0_E$, ou si et seulement si $x - f^\sharp(y)$ appartient au noyau de f .

$$\forall (x, y) \in E^2, f(x) = p(y) \iff x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f.$$

7. a. Soit y un élément de E . $\text{Im } f$ étant un sous-espace vectoriel de E le cours sur les projections orthogonales montre que $\min_{z' \in \text{Im } f} \|z' - y\|$ existe et que la projection orthogonale $p(y)$ de y sur $\text{Im } f$ est le seul élément de ce sous-espace tel que $\|p(y) - y\| = \min_{z' \in \text{Im } f} \|z' - y\|$.

Alors $\min_{x \in E} \|f(x) - y\|$ existe et la projection orthogonale $p(y)$ de y sur $\text{Im } f$ est le seul élément de ce sous-espace tel que $\|p(y) - y\| = \min_{x \in E} \|f(x) - y\|$.

Dès lors soit x un élément de E . $f(x)$ est de tout évidence un élément de $\text{Im } f$.

Ainsi $\|f(x) - y\| = \min_{x \in E} \|f(x) - y\|$ si et seulement si $f(x) = p(y)$ donc si et seulement si $x - f^\sharp(y)$ est un élément de $\text{Ker } f$.

Si x et y sont deux éléments de E :

- $\min_{z \in E} \|f(z) - y\|$ existe ;
- $\|f(x) - y\| = \min_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f$.

b. $f^\sharp(y) - f^\sharp(y) = 0_E$ donc $f^\sharp(y) - f^\sharp(y)$ appartient alors à $\text{Ker } f$ et ainsi : $\|f(f^\sharp(y)) - y\| = \min_{z \in E} \|f(z) - y\|$.

Montrons alors $f^\sharp(y)$ est LE vecteur x de E de plus petite norme vérifiant $\|f(x) - y\| = \min_{z \in E} \|f(z) - y\|$.

Version 1 Soit x un autre élément de E tel que $\|f(x) - y\| = \min_{z \in E} \|f(z) - y\|$. Alors $x - f^\sharp(y)$ appartient à $\text{Ker } f$.

Montrons que $f^\sharp(y)$ appartient à $\text{Im } f$. $\forall \ell \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $p_\ell(y) \in E_f(\lambda_\ell)$ donc $\forall \ell \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\frac{1}{\lambda_\ell} p_\ell(y) \in E_f(\lambda_\ell)$.

Alors $f^\sharp(y)$ appartient à $E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \dots \oplus E_f(\lambda_k)$ qui est contenu dans $\text{Im } f$. $f^\sharp(y) \in \text{Im } f$.

$x - f^\sharp(y)$ appartient à $\text{Ker } f$, $f^\sharp(y)$ appartient à $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont orthogonaux donc $x - f^\sharp(y)$ et $f^\sharp(y)$ sont orthogonaux.

Le théorème de pythagore donne $\|x - f^\sharp(y)\|^2 + \|f^\sharp(y)\|^2 = \|(x - f^\sharp(y)) + f^\sharp(y)\|^2 = \|x\|^2$.

Alors $\|f^\sharp(y)\|^2 \leq \|x - f^\sharp(y)\|^2 + \|f^\sharp(y)\|^2 = \|x\|^2$. Donc $\|f^\sharp(y)\| \leq \|x\|$. Mieux $\|f^\sharp(y)\| < \|x\|$ si x est différent de $f^\sharp(y)$.

Si y est dans E , $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant $\|f(x) - y\| = \min_{z \in E} \|f(z) - y\|$.

Version 2 Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments x de E tels que $\|f(x) - y\| = \min_{z \in E} \|f(z) - y\|$.

$\mathcal{S} = \{x \in E \mid x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f\} = \{f^\sharp(y) + t; t \in \text{Ker } f\} = \{f^\sharp(y) - t; t \in \text{Ker } f\}$ non ?

On cherche x_0 dans $\mathcal{S}$ tel que $\|x_0\| = \min_{x \in \mathcal{S}} \|x\|$. Cela revient à chercher t_0 dans $\text{Ker } f$ tel que $\|f^\sharp(y) - t_0\| = \min_{t \in \text{Ker } f} \|f^\sharp(y) - t\|$.

Le cours sur les projections orthogonales montre que la projection orthogonale u de $f^\sharp(y)$ sur $\text{Ker } f$ est l'unique élément de $\text{Ker } f$ tel que $\|f^\sharp(y) - u\| = \min_{t \in \text{Ker } f} \|f^\sharp(y) - t\|$.

Donc $f^\sharp(y) - u$ est l'unique élément de $\mathcal{S}$ tel $\|f^\sharp(y) - u\| = \min_{x \in \mathcal{S}} \|x\|$.

Comme $f^\sharp(y)$ appartient à $\text{Im } f$ qui est l'orthogonale de $\text{Ker } f$, sa projection orthogonale u sur $\text{Ker } f$ est nulle. Ainsi

$f^\sharp(y) = f^\sharp(y) - u$ est l'unique élément de $\mathcal{S}$ tel $\|f^\sharp(y)\| = \|f^\sharp(y) - u\| = \min_{x \in \mathcal{S}} \|x\|$.

PARTIE II : Application à un exemple

1. La matrice A de f dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est symétrique donc f est symétrique.

La somme de la deuxième colonne et de la quatrième colonne de A est nulle donc $f(e_2) + f(e_4) = 0_E$ ou $f(e_2 + e_4) = 0_E$. Ainsi $e_2 + e_4$ est un élément non nul de $\text{Ker } f$. f n'est pas injective donc pas inversible.

La matrice A n'étant pas la matrice nulle, f n'est pas l'endomorphisme nul de E .

f est un endomorphisme non nul et non inversible de E .

2. Soit λ un élément de $\mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$. Les opérations $L_1 \leftrightarrow L_3$ et $L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\text{transforme } A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \\ 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les opérations $L_3 \leftarrow L_3 + (3-\lambda)L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + (1-\lambda)L_2$ transforme cette dernière matrice en

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (3-\lambda)^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est à dire si et seulement si B_λ n'est pas inversible.

B_λ étant triangulaire supérieure elle est non inversible si et seulement si l'un des coefficients de sa diagonale est nul.

Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $(3 - \lambda)^2 - 1 = 0$ ou $(1 - \lambda)^2 - 1 = 0$; c'est à dire si et seulement si $3 - \lambda = 1$ ou $3 - \lambda = -1$ ou $1 - \lambda = 1$ ou $1 - \lambda = -1$.

Les valeurs propres de A sont donc 0, 2 et 4.

f admet exactement 3 valeurs propres distinctes : $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$.

3. D'après la première partie : $f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 2 p_1 + 4 p_2$. Alors :

$$A = 2 M_1 + 4 M_2.$$

4. a. Soit x un élément de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$$u \in E_f(\lambda_2) \iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x_1 - x_3 = 0 \\ -3x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 - 3x_4 = 0 \end{cases}.$$

$$u \in E_f(\lambda_2) \iff \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ x_4 = -3x_2 = -\frac{1}{3}x_2 \end{cases} \iff x_3 = -x_1 \text{ et } x_2 = x_4 = 0$$

$E_f(\lambda_2)$ est donc la droite vectorielle engendrée par $v'_2 = e_1 - e_3$.

$v_2 = \frac{1}{\|v'_2\|} v'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$ est un vecteur unitaire de $E_f(\lambda_2)$.

$E_f(\lambda_2)$ est de dimension 1 et $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$ est un élément de $E_f(\lambda_2)$ tel que $\|v_2\| = 1$.

b. Soit x un élément de E . $p_2(x) \in E_f(\lambda_2)$ donc il existe un réel γ tel que $p_2(x) = \gamma v_2$.

$x - p_2(x)$ appartient à l'orthogonal de $E_f(\lambda_2)$ donc est orthogonal à v_2 .

Ainsi $0 = \langle x - p_2(x), v_2 \rangle = \langle x, v_2 \rangle - \langle p_2(x), v_2 \rangle = \langle x, v_2 \rangle - \langle \gamma v_2, v_2 \rangle = \langle x, v_2 \rangle - \gamma \|v_2\|^2$.

$0 = \langle x, v_2 \rangle - \gamma$. Ainsi $\gamma = \langle x, v_2 \rangle$ et $p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2$.

$$\forall x \in E, p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2.$$

c. Soit x un élément de E de coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$$\langle x, v_2 \rangle = \langle x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_3)$$

$$p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2 = \frac{1}{2} (x_1 - x_3) (e_1 - e_3).$$

Alors $p_2(e_1) = \frac{1}{2} (e_1 - e_3)$, $p_2(e_2) = 0_E$, $p_2(e_3) = -\frac{1}{2} (e_1 - e_3)$ et $p_2(e_4) = 0_E$. Donc :

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Soit $A^\sharp$ la matrice de $f^\sharp$ dans la base $\mathcal{B}$. $f^\sharp = \frac{1}{\lambda_1} p_1 + \frac{1}{\lambda_2} p_2 = \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{4} p_2$. Donc $A^\sharp = \frac{1}{2} M_1 + \frac{1}{4} M_2$.

$A = 2 M_1 + 4 M_2$ donne $\frac{1}{2} M_1 = \frac{1}{4} A - M_2$ et ainsi $A^\sharp = \frac{1}{4} A - \frac{3}{4} M_2$.

$$A^\sharp = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Finalement :}$$

$$\text{La matrice de } f^\sharp \text{ relativement à la base } \mathcal{B} \text{ est : } A^\sharp = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
