EM LYON 2005 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

PREMIER PROBLÈME

Partie I : Étude de la suite de polynômes $(\mathbf{T_n})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^*}$

1. $T_2 = 2\,X\,T_1 - T_0 = 2X(2X) - 1 = 4\,X^2 - 1$ et $T_3 = 2\,X\,T_2 - T_1 = 2\,X(4\,X^2 - 1) - 2\,X = 8\,X^3 - 4\,X$.

$$\boxed{T_1 = 4\,X^2 - 1 \text{ et } T_2 = 8\,X^3 - 4\,X.}$$

2. a. et b. Observons que, si n appartient à $\mathbb{N}$, pour montrer que T_n a la parité de n il suffit de prouver que $T_n(-X) = (-1)^n\,T_n(X)$.

Dès lors montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, T_n est un polynôme à coefficients réels de degré n qui vérifie $T_n(-X) = (-1)^n\,T_n(X)$.

• Comme $T_0 = 1$ et $T_1 = 2\,X$ la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

• Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$; supposons la propriété vraie pour $n-2$ et pour $n-1$. Montrons la alors pour n.

T_{n-1} est un polynôme à coefficients réels de degré $n-1$ donc $2\,X\,T_{n-1}$ est un polynôme à coefficients réels de degré n. Comme T_{n-2} est un polynôme à coefficients réels de degré $n-2$ (strictement inférieur à n), $T_n = 2\,X\,T_{n-1} - T_{n-2}$ est un polynôme à coefficients réels de degré n. De plus :

$T_n(-X) = 2\,(-X)\,T_{n-1}(-X) - T_{n-2}(-X) = -2\,X\,(-1)^{n-1}\,T_{n-1}(X) - (-1)^{n-2}\,T_{n-2}(X)$.

En observant que $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, on obtient : $T_n(-X) = (-1)^n\big(2\,X\,T_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)\big) = (-1)^n\,T_n(X)$.

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ T_n \text{ est un polynôme à coefficients réels de degré } n \text{ qui a la parité de } n.}$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons a_n le coefficient de X^n dans T_n. $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $a_3 = 8$.

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ T_n = 2\,X\,T_{n-1} - T_{n-2}$ donc $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ a_n = 2\,a_{n-1}$. Ainsi $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $a_1 = 2$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = 2^{n-1}\,a_1 = 2^n$. Notons que ce résultat vaut encore pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ le coefficient du terme de degré } n \text{ de } T_n \text{ est } 2^n.}$$

3. $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ T_n(1) = 2\,T_{n-1}(1) - T_{n-2}(1)$ donc $\forall n \in [\![2, +\infty[\![,\ T_n(1) - T_{n-1}(1) = T_{n-1}(1) - T_{n-2}(1)$. $\big(T_n(1) - T_{n-1}(1)\big)_{n\geqslant 1}$ est donc une suite constante.

Ainsi $\forall n \in [\![1, +\infty[\![,\ T_n(1) - T_{n-1}(1) = T_1(1) - T_0(1) = 2 - 1 = 1$. $\big(T_n(1)\big)_{n\geqslant 0}$ est alors une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $T_0(1) = 1$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = 1 + n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(1) = n + 1.}$$

Remarque *On pouvait également observer que la suite* $\big(T_n(1)\big)_{n\geqslant 0}$ *vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre* 2 *dont l'équation caractéristique admet* 1 *pour unique racine.*

4. a. Soit θ un élément de $]0, \pi[$. Notons que $\sin\theta$ n'est pas nul.

Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2, que $\forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin\big((n+1)\,\theta\big)}{\sin\theta}\cdot$

• $T_0(\cos\theta) = 1 = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\big((0+1)\,\theta\big)}{\sin\theta}\cdot$ La propriété est vraie pour $n = 0$.

$T_1(\cos\theta) = 2\,\cos\theta = \dfrac{2\,\cos\theta\,\sin\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin(2\,\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\big((1+1)\,\theta\big)}{\sin\theta}\cdot$ La propriété est vraie pour $n = 1$.

• Soit n un élément de $[\![2, +\infty[\![$; supposons la propriété vraie pour $n-2$ et pour $n-1$.

$T_n(\cos\theta) = 2\,\cos\theta\,T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta) = 2\,\cos\theta\,\dfrac{\sin\big(n\,\theta\big)}{\sin\theta} - \dfrac{\sin\big((n-1)\,\theta\big)}{\sin\theta}\cdot$

Rappelons que $2\,\cos\theta\,\sin\big(n\theta\big) = 2\,\sin\big(n\theta\big)\,\cos\theta = \sin\big(n\,\theta + \theta\big) + \sin\big(n\,\theta - \theta\big) = \sin\big((n+1)\,\theta\big) + \sin\big((n-1)\,\theta\big)$.

Alors : $T_n(\cos\theta) = \dfrac{2\,\cos\theta\,\sin\big(n\theta\big) - \sin\big((n-1)\,\theta\big)}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\big((n+1)\,\theta\big)}{\sin\theta}\cdot$ Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in]0, \pi[,\ T_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin\big((n+1)\,\theta\big)}{\sin\theta}\cdot}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit θ un élément de $]0, \pi[$.

$T_n(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\sin\big((n+1)\,\theta\big)}{\sin\theta} = 0 \Longleftrightarrow \sin\big((n+1)\,\theta\big) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ (n+1)\theta = k\,\pi.$

$T_n(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{k\,\pi}{n+1}\cdot$ Notons que θ est dans $]0, \pi[$.

Ainsi, $T_n(\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \exists k \in [\![1, n]\!],\ \theta = \dfrac{k\,\pi}{n+1}\cdot$

Posons alors, pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, $\theta_k = \dfrac{k\,\pi}{n+1}$ et $x_k = \cos\theta_k$.

x_1, x_2, ..., x_n sont des racines réelles de T_n.

$0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n < \pi$ et cos est strictement décroissante sur $]0, \pi[$, donc $1 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > -1$.

Alors x_1, x_2, ..., x_n sont n racines réelles deux à deux distinctes de T_n, appartenant à $]-1, 1[$.

Notons que comme T_n est de degré n, T_n n'a pas d'autres racines.

$$\boxed{T_n \text{ admet } n \text{ racines réelles, toutes situées dans }]-1,1[\text{ qui sont : } \cos\frac{\pi}{n+1},\ \cos\frac{2\pi}{n+1},\ ...,\ \cos\frac{n\pi}{n+1}.}$$

c. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. En conservant les notations de b), on peut dire que le polynôme $Q_n = \prod_{k=1}^{n}(X-x_k)$ divise T_n car x_1, x_2, ..., x_n sont n racines deux à deux distinctes de T_n.

Comme Q_n et T_n sont tous les deux de degré n, il existe un réel λ tel que $T_n = \lambda\, Q_n$.

Le coefficient de X^n dans T_n est 2^n et c'est λ dans $\lambda\, Q_n$. Alors $\lambda = 2^n$.

Ainsi $T_n = 2^n\, Q_n = 2^n \prod_{k=1}^{n}(X-x_k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\,\pi}{n+1}\right)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\,\pi}{n+1}\right)\cdot}$$

d. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $T_n(1) = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \cos\frac{k\,\pi}{n+1}\right)$.

Rappelons que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ 1 - \cos\theta = 2\,\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot$

Alors $T_n(1) = 2^n \prod_{k=1}^{n}\left(2\,\sin^2\frac{k\,\pi}{2\,(n+1)}\right) = 2^n\, 2^n \prod_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\,\pi}{2\,(n+1)}\cdot$

Ainsi $n+1 = T_n(1) = \left(2^n \prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\,\pi}{2\,(n+1)}\right)^2$, donc $2^n \left|\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\,\pi}{2\,(n+1)}\right| = \sqrt{n+1}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \frac{k\,\pi}{2\,(n+1)} \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ Donc $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \sin\frac{k\,\pi}{2\,(n+1)} > 0$. Par conséquent $\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\,\pi}{2\,(n+1)} > 0$.

Finalement $2^n \prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\,\pi}{2\,(n+1)} = \sqrt{n+1}$ ou $\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\,\pi}{2\,(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}\cdot$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\,\pi}{2\,(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}\cdot}$$

5. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall \theta \in]0,\pi[,\ T_n(\cos\theta) = \frac{\sin\big((n+1)\,\theta\big)}{\sin\theta}\cdot$

Donc $\forall \theta \in]0,\pi[,\ \sin\theta\, T_n(\cos\theta) - \sin\big((n+1)\,\theta\big) = 0$.

En dérivant on obtient : $\forall \theta \in]0,\pi[,\ \cos\theta\, T_n(\cos\theta) + \sin\theta\,(-\sin\theta)\, T_n'(\cos\theta) - (n+1)\,\cos\big((n+1)\,\theta\big) = 0$.

Ainsi : $\forall \theta \in]0,\pi[,\ \cos\theta\, T_n(\cos\theta) - \sin^2\theta\, T_n'(\cos\theta) - (n+1)\,\cos\big((n+1)\,\theta\big) = 0$.

En dérivant encore une fois il vient pour tout élément θ de $]0,\pi[$: $-\sin\theta\, T_n(\cos\theta) + \cos\theta\,(-\sin\theta)\, T_n'(\cos\theta) - 2\,\cos\theta\,\sin\theta\, T_n'(\cos\theta) - \sin^2\theta\,(-\sin\theta)\, T_n''(\cos\theta) + (n+1)^2\,\sin\big((n+1)\,\theta\big) = 0$.

Alors : $\forall \theta \in]0,\pi[,\ -\sin\theta\, T_n(\cos\theta) - 3\sin\theta\, \cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + \sin^3\theta\, T_n''(\cos\theta) + (n+1)^2 \sin\big((n+1)\,\theta\big) = 0.$

En remarquant que $\forall \theta \in]0,\pi[,\ \sin\big((n+1)\,\theta\big) = \sin\theta\, T_n(\cos\theta)$ on obtient :

$\forall \theta \in]0,\pi[,\ -\sin\theta\, T_n(\cos\theta) - 3\sin\theta\, \cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + \sin^3\theta\, T_n''(\cos\theta) + (n+1)^2 \sin\theta\, T_n(\cos\theta) = 0.$

En divisant par $\sin\theta$ (qui n'est pas nul pour $\theta \in]0,\pi[$) on obtient :

$\forall \theta \in]0,\pi[,\ -T_n(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + \sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) + (n+1)^2\, T_n(\cos\theta) = 0.$

Ou encore : $\forall \theta \in]0,\pi[,\ \sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + \big((n+1)^2 - 1\big)\, T_n(\cos\theta) = 0.$ Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in]0,\pi[,\ \sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + (n^2 + 2\,n)\, T_n(\cos\theta) = 0.}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Posons $H_n = (X^2-1)\, T_n'' + 3X\, T_n' - (n^2+2\,n)\, T_n$.

$\forall \theta \in]0,\pi[,\ \sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + (n^2 + 2\,n)\, T_n(\cos\theta) = 0.$

Donc $\forall \theta \in]0,\pi[,\ -(\cos^2\theta - 1)\, T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + (n^2 + 2\,n)\, T_n(\cos\theta) = 0.$

Ceci donne : $\forall \theta \in]0,\pi[,\ -H_n(\cos\theta) = 0.$

Ainsi $\forall \theta \in]0,\pi[,\ H_n(\cos\theta) = 0$ ou $\forall x \in]-1,1[,\ H_n(x) = 0$. Par conséquent le polynôme H_n admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Alors : $(X^2-1)\, T_n'' + 3X\, T_n' - (n^2+2\,n)\, T_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)\, T_n'' + 3X\, T_n' - (n^2+2\,n)\, T_n = 0_{\mathbb{R}[X]}.}$$

Partie II : Étude de l'endomorphisme L

1. • Soit P un élément de E.

P'(resp. P'') est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus $n-1$ (resp. $n-2$) donc $3\,X\,P'$ (resp. $(X^2-1)\,P''$) est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. Par conséquent $L(P) = (X^2-1)\,P'' + 3\,X\,P'$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. $L(P)$ appartient à E.

Ainsi L est une application de E dans E.

• Soient P et Q deux éléments de E et soit λ un réel.

$L(\lambda\,P+Q) = (X^2-1)\,(\lambda\,P+Q)'' + 3\,X\,(\lambda\,P+Q)' = (X^2-1)\,(\lambda\,P''+Q'') + 3\,X\,(\lambda\,P'+Q').$

$L(\lambda\,P+Q) = \lambda\big((X^2-1)\,P'' + 3\,X\,P'\big) + (X^2-1)\,Q'' + 3\,X\,Q' = \lambda\,L(P) + L(Q).$

Ainsi L est une application linéaire. Finalement :

$$\boxed{L \text{ est un endomorphisme de l'espace vectoriel } E.}$$

2. a. Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$.

T_k est un élément de E et $L(T_k) = (X^2-1)\,T_k'' + 3\,X\,T_k' = (k^2+2\,k)\,T_k$ d'après **I 5. b.**

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ L(T_k) = (k^2+2\,k)\,T_k.}$$

b. $\forall k \in [\![0,n]\!],\ L(T_k) = (k^2+2\,k)\,T_k$ et $T_k \neq 0_E$. Ainsi pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, $k^2+2\,k$ est une valeur propre de L et T_k est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

Posons $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \lambda_k = k^2+2\,k$. $\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \lambda_{k+1}-\lambda_k = (k+1)^2+2\,(k+1)-k^2-2\,k = 2\,k+3 > 0$.

Ainsi : $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. λ_0, λ_1, ..., λ_n sont donc $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes de L qui est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$. Par conséquent :

- λ_0, λ_1, ..., λ_n sont LES valeurs propres de L ;
- les sous-espaces propres de L sont des droites vectorielles.

Notons alors que pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, le sous-espace propre de L associé à la valeur propre $k^2+2\,k$ est la droite vectorielle engendrée par T_k.

$\{k^2+2\,k ; k \in [\![0,n]\!]\}$ est l'ensemble des valeurs propres de L. Pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$, (T_k) est une base du sous-espace propre de L associé à la valeur propre $k^2+2\,k$.

Partie III : Étude d'un produit scalaire

1. *Remarque Si P et Q sont deux éléments de E, $x \to \sqrt{1-x^2}\,P(x)\,Q(x)$ est une fonction continue sur $[-1,1]$ donc $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$ existe. Ainsi φ est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.*

Soient P, Q, R trois éléments de E et soit λ un réel.

• $\varphi(\lambda\,P+Q,R) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\big(\lambda\,P(x)+Q(x)\big)\,R(x)\,\mathrm{d}x.$

$\varphi(\lambda\,P+Q,R) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big(\lambda\,\sqrt{1-x^2}\,P(x)\,R(x) + \sqrt{1-x^2}\,Q(x)\,R(x)\big)\,\mathrm{d}x.$

$\varphi(\lambda\,P+Q,R) = \lambda \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,P(x)\,R(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,Q(x)\,R(x)\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale.

Par conséquent $\varphi(\lambda\,P+Q,R) = \lambda\,\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$ (1).

• $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,P(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,Q(x)\,P(x)\,\mathrm{d}x$ donc $\varphi(P,Q) = \varphi(Q,P)$ (2).

• $\forall x \in [-1,1],\ \sqrt{1-x^2}\,\big(P(x)\big)^2 \geqslant 0$ donc $\varphi(P,P) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\big(P(x)\big)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ car $-1 \leqslant 1$.

Ainsi $\varphi(P,P) \geqslant 0$ (3).

• Supposons $\varphi(P,P) = 0$.

Alors $x \to \sqrt{1-x^2}\,\big(P(x)\big)^2$ est continue et positive sur $[-1,1]$, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\big(P(x)\big)^2\,\mathrm{d}x = 0$ et $-1 \neq 1$.

Ainsi $x \to \sqrt{1-x^2}\,\big(P(x)\big)^2$ est nulle sur $[-1,1]$. Ce qui donne sans difficulté $\forall x \in]-1,1[,\ \big(P(x)\big)^2 = 0$ puis $\forall x \in]-1,1[,\ P(x) = 0$.

P est donc un polynôme qui admet une infinité de racines donc P est le polynôme nul.

Par conséquent $\varphi(P,P) = 0$ donne $P = 0_E \quad (4)$.

(1), (2), (3) et (4) montrent que $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$

2. Soient P et Q deux éléments de E.

Posons $\forall x \in [-1,1],\ u(x) = -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,P'(x)$.

$x \to -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ car $\frac{3}{2} \geqslant 1$. Il en est de même pour P'. Ainsi u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. De plus $\forall x \in [-1,1],\ u'(x) = -\dfrac{3}{2}\,(-2\,x)\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,P'(x) - (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,P''(x)$.

Donc $\forall x \in [-1,1],\ u'(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\big(3\,x\,P'(x) - (1-x^2)\,P''(x)\big) = \sqrt{1-x^2}\,\big((x^2-1)\,P''(x) + 3\,x\,P'(x)\big)$.

Finalement $\forall x \in [-1,1],\ u'(x) = \sqrt{1-x^2}\,L(P)(x)$. Alors $\varphi\big(L(P),Q\big) = \displaystyle\int_{-1}^{1} u'(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x$.

u et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$. Une intégration par parties simple donne alors :

$\varphi\big(L(P),Q\big) = \displaystyle\int_{-1}^{1} u'(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)\,Q(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u(x)\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$.

Or $u(1) = u(-1) = 0$ donc $\varphi\big(L(P),Q\big) = -\displaystyle\int_{-1}^{1} u(x)\,Q'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,P'(x)\,Q'(x)\,\mathrm{d}x$.

En échangeant les rôles de P et Q on a également $\varphi\big(L(Q),P\big) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,Q'(x)\,P'(x)\,\mathrm{d}x$.

Ainsi $\varphi\big(L(P),Q\big) = \varphi\big(L(Q),P\big)$ ou $\varphi\big(L(P),Q\big) = \varphi\big(P,L(Q)\big)$.

$$\boxed{\forall (P,Q) \in E^2,\ \varphi\big(L(P),Q\big) = \varphi\big(P,L(Q)\big).}$$

3. Ce qui précède montre que L est un endomorphisme symétrique de E. Par conséquent deux vecteurs propres de L associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Ainsi, si k et k' sont deux éléments distincts de $[\![0,n]\!]$, T_k et $T_{k'}$ sont orthogonaux.

$(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est donc une famille orthogonale d'éléments non nuls de E. C'est donc une famille libre de cardinal $n+1$ de E qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$. $(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est alors une base de E et une famille orthogonale. Finalement :

$$\boxed{(T_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthogonale de } E}.$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

Les fonctions $u_1 : t \to \dfrac{t^2}{2\,\pi} - t$ et $v_1 : t \to \dfrac{\sin(n\,t)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall t \in \mathbb{R},\ u_1' t) = \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ v_1' t) = \cos(n\,t)$.

Une première intégration par parties donne alors :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right) \cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = \left[\left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right) \frac{\sin(n\,t)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{\sin(n\,t)}{n}\,\mathrm{d}t = -\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \frac{\sin(n\,t)}{n}\,\mathrm{d}t$$

car $\sin(n\,\pi) = \sin(n \times 0) = 0$.

Les fonctions $u_2 : t \to \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $v_2 : t \to -\dfrac{\cos(n\,t)}{n^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall t \in \mathbb{R},\ u_2'(t) = \dfrac{1}{\pi}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ v_2'(t) = \dfrac{\sin(n\,t)}{n}\cdot$

Une seconde intégration par parties donne alors :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right) \cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = -\left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\left(-\frac{\cos(n\,t)}{n^2}\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n\,t)}{n^2}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right) \cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = -\left(0 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{\pi n^2}\left[\frac{\sin(n\,t)}{n}\right]_0^\pi = \frac{1}{n^2} - 0 = \frac{1}{n^2}\cdot$$ Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right) \cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\cdot}$$

2. Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$ et t un élément de $]0,\pi]$. Notons que $e^{i\,t}$ est différent de 1.

$$\frac{1 - e^{i\,m\,t}}{1 - e^{i\,t}}\, e^{i\,t} = \frac{e^{i\,\frac{m\,t}{2}}\,(e^{-i\,\frac{m\,t}{2}} - e^{i\,\frac{m\,t}{2}})}{e^{i\,\frac{t}{2}}\,(e^{-i\,\frac{t}{2}} - e^{i\,\frac{t}{2}})}\, e^{i\,t} = \frac{-2\,i\,\sin\frac{m\,t}{2}}{-2\,i\,\sin\frac{t}{2}}\, e^{i\left(\frac{m\,t}{2} - \frac{t}{2} + t\right)} = \frac{\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\, e^{i\,\frac{(m+1)\,t}{2}}.$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,\pi],\ \frac{1 - e^{i\,m\,t}}{1 - e^{i\,t}}\, e^{i\,t} = \frac{\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\, e^{i\,\frac{(m+1)\,t}{2}}.}$$

Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$ et t un élément de $]0,\pi]$.

Observons que $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} e^{i\,n\,t} = \frac{1 - e^{i\,m\,t}}{1 - e^{i\,t}}\, e^{i\,t}$ car $e^{it} \neq 1$. Alors :

$$\sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = \sum_{n=1}^{m} \Re e\left(e^{i\,n\,t}\right) = \Re e\left(\sum_{n=1}^{m} e^{i\,n\,t}\right) = \Re e\left(\frac{1 - e^{i\,m\,t}}{1 - e^{i\,t}}\, e^{i\,t}\right) = \Re e\left(\frac{\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\, e^{i\,\frac{(m+1)\,t}{2}}\right).$$

$$\sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = \frac{\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\ \Re e\left(e^{i\,\frac{(m+1)\,t}{2}}\right) = \frac{\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\ \cos\frac{(m+1)\,t}{2} = \frac{\cos\frac{(m+1)\,t}{2}\ \sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,\pi],\ \sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = \frac{\cos\frac{(m+1)\,t}{2}\ \sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.}$$

3. Une question de cours ! Le lemme de Riemann-Lebesgue ! Soit λ un réel strictement positif.

Les fonctions u et $v_3 : t \to -\dfrac{\cos(\lambda\,t)}{\lambda}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. De plus $\forall t \in [0,\pi],\ v_3'(t) = \sin(\lambda\,t)$.

Un intégration par parties donne alors :

$$\int_0^{\pi} u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)\ \left(-\frac{\cos(\lambda\,t)}{\lambda}\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u'(t)\ \left(-\frac{\cos(\lambda\,t)}{\lambda}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^{\pi} u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\ \left[u(0) - u(\pi)\ \cos(\lambda\,\pi) + \int_0^{\pi} u'(t)\ \cos(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right].$$

$$\left|\int_0^{\pi} u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{\lambda}\ \left|u(0) - u(\pi)\ \cos(\lambda\,\pi) + \int_0^{\pi} u'(t)\ \cos(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

$$\left|\int_0^{\pi} u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\ \left(|u(0)| + |u(\pi)|\,|\cos(\lambda\,\pi)| + \left|\int_0^{\pi} u'(t)\ \cos(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right|\right).$$

$$\left|\int_0^{\pi} u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\ \left(|u(0)| + |u(\pi)|\,|\cos(\lambda\,\pi)| + \int_0^{\pi} |u'(t)|\,|\cos(\lambda\,t)|\,\mathrm{d}t\right)\ \text{car } 0 \leqslant \pi.$$

Or $\forall t \in [0,\pi],\ |\cos(\lambda\,t)| \leqslant 1$ donc : $0 \leqslant \left|\displaystyle\int_0^{\pi} u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\ \left(|u(0)| + |u(\pi)| + \displaystyle\int_0^{\pi} |u'(t)|\,\mathrm{d}t\right)$.

Remarquons que $|u(0)| + |u(\pi)| + \displaystyle\int_0^{\pi} |u'(t)|\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de λ.

Par conséquent $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\ \left(|u(0)| + |u(\pi)| + \int_0^{\pi} |u'(t)|\,\mathrm{d}t\right) = 0$. On obtient alors par encadrement :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\pi} u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

4. Pour utiliser pleinement le résultat du programme sur le prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ posons : $\forall t \in]0,\pi],\ g(t) = f(t)$ et montrons que g se prolonge sur $[0,\pi]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui n'est autre que f ! !

Remarque *En utilisant un corollaire usuel du théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ on peut se contenter de montrer que f est continue sur $[0,\pi]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et que f' admet une limite finie en 0^+. On peut également n'utiliser aucun de ces résultats et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$, dérivable en 0 et de dérivée continue en 0.*

$t \to \dfrac{t^2}{2\,\pi} - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. $t \to 2\,\sin\dfrac{t}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et ne s'y annule pas.

Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

$$\forall t \in]0,\pi],\ g'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\ \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\ \sin\frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right)\ \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right].$$

$g'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\left[\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}\right].$

Donc $g'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2}{t^2}\left[\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}\right].$

Cherchons alors un équivalent de $t \to \left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}$ en 0.

Pour cela utilisons des développements limités usuels d'ordre 2 au voisinage de 0.

$\dfrac{t}{\pi}-1=-1+\dfrac{t}{\pi}+\mathrm{o}(t^2)$ et $\sin\dfrac{t}{2}=\dfrac{t}{2}+\mathrm{o}(t^2)$. Par produit : $\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{2\,\pi}+\mathrm{o}(t^2)$.

$\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t=-t+\dfrac{t^2}{2\,\pi}+\mathrm{o}(t^2)$ et $\dfrac{1}{2}\,\cos\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{2}\,\left(1-\dfrac{(t/2)^2}{2}\right)+\mathrm{o}(t^2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{t^2}{16}+\mathrm{o}(t^2)$.

Par produit $\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{4\,\pi}+\mathrm{o}(t^2)$.

Alors, par différence, $\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{2\,\pi}+\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{4\,\pi}+\mathrm{o}(t^2)=\dfrac{t^2}{4\,\pi}+\mathrm{o}(t^2)$.

Par conséquent : $\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{t^2}{4\,\pi}\cdot$

Alors $g'(t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{2}{t^2}\,\left(\dfrac{t^2}{4\,\pi}\right)=\dfrac{1}{2\,\pi}\cdot$ Ainsi $\lim\limits_{t\to 0} g'(t)=\dfrac{1}{2\,\pi}\cdot$

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et g' admet une limite finie en 0 donc, d'après le cours, g admet un prolongement $\widehat{g}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Notons que f coïncide avec $\widehat{g}$ sur $]0,\pi]$. Montrons que $f(0)=\widehat{g}(0)$ ce qui revient à montrer que $\widehat{g}(0)=-1$.

$g(t)=\dfrac{\frac{t^2}{2\,\pi}-t}{2\,\sin\frac{t}{2}}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{-t}{2\times\frac{t}{2}}=-1$. Alors $\lim\limits_{t\to 0} g(t)=-1$.

Alors $\widehat{g}(0)=\lim\limits_{t\to 0}\widehat{g}(t)=\lim\limits_{t\to 0} g(t)=-1=f(0)$. Ceci achève de montrer que $f=\widehat{g}$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi].}$$

Remarque $\quad f'(0)=\dfrac{1}{2\,\pi}\cdot$

5. a. Soit m un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{m}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\cos(n\,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\sum_{n=1}^{m}\cos(n\,t)\right]\mathrm{d}t.$$

$\forall t\in]0,\pi],\ \left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\cos(n\,t)=\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{\cos\frac{(m+1)\,t}{2}\,\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\cdot$

Alors $\forall t\in]0,\pi],\ \left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\cos(n\,t)=2\,f(t)\,\cos\dfrac{(m+1)\,t}{2}\,\sin\dfrac{m\,t}{2}\cdot$

Or cette égalité vaut également pour $t=0$ ($0=0$!). Nous pouvons alors écrire que :

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\sum_{n=1}^{m}\cos(n\,t)\right]\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}f(t)\,\left(2\,\cos\frac{(m+1)\,t}{2}\,\sin\frac{m\,t}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} f(t) \left(\sin\left(\frac{(m+1)\,t}{2} + \frac{m\,t}{2} \right) - \sin\left(\frac{(m+1)\,t}{2} - \frac{m\,t}{2} \right) \right) \mathrm{d}t.$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{(2\,m+1)\,t}{2}\, \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{t}{2}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\,\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^3}{6\,\pi} - \frac{\pi^2}{2} \right) = -\frac{\pi^2}{6}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin \left(\frac{(2\,m+1)\,t}{2} \right) \mathrm{d}t.}$$

b. f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, **I 3.** donne alors $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin(\lambda\,t)\, \mathrm{d}t = 0.$

Comme $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{2\,m+1}{2} = +\infty$ il vient : $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin \left(\frac{(2\,m+1)\,t}{2} \right) \mathrm{d}t = 0.$

Donc $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Finalement :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{n^2} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot}$$

Partie II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1. a. Soient x et y deux éléments de $[0, +\infty[$.

- $\displaystyle\frac{1}{(n+x)\,(n+y)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\frac{1}{(n+x)^2\,(n+y)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}\cdot$
- Les séries de termes généraux $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^3}$ convergent et sont à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que les séries de termes généraux $\dfrac{1}{(n+x)\,(n+y)}$ et $\dfrac{1}{(n+x)^2\,(n+y)}$ convergent.

> Si x et y sont deux éléments de $[0, +\infty[$, les séries de termes généraux $\dfrac{1}{(n+x)\,(n+y)}$ et $\dfrac{1}{(n+x)^2\,(n+y)}$ convergent.

b. $\forall x \in [0, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = x\,\dfrac{1}{(n+x)(n+0)}\cdot$

Ce que nous venons de voir permet de dire, en faisant $y = 0$, que :

> pour tout élément x de $[0, +\infty[$, la série de terme général $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$ converge.

2. $\displaystyle S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+0} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) = 0.$

$$S(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)=1.$$

$$\boxed{S(0)=0 \text{ et } S(1)=1.}$$

3. a. Soient x et y deux éléments de $[0,+\infty[$.

$$S(y)-S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+y}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+x}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+y}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+y-n-x}{(n+x)\,(n+y)}\cdot$$

$$S(y)-S(x)=(y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\cdot$$

$$\boxed{\forall (x,y)\in\big([0,+\infty[\big)^2,\ S(y)-S(x)=(y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\cdot}$$

b. Soient x et y deux éléments de $[0,+\infty[$.

$$|S(y)-S(x)|=|y-x|\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\right|=|y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\cdot$$

x et y étant positifs : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+x)\,(n+y)\geqslant n^2>0$; donc $\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\leqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\cdot$

En faisant tendre m vers $+\infty$ on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ car les deux séries convergent.

Alors :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\big([0,+\infty[\big)^2,\ \big|S(y)-S(x)\big|\leqslant\frac{\pi^2}{6}\,|y-x|.}$$

c. Soit x un élément de $[0,+\infty[$.

$\forall y\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant\big|S(y)-S(x)\big|\leqslant\dfrac{\pi^2}{6}\,|y-x|$ et $\displaystyle\lim_{y\to x}\frac{\pi^2}{6}\,|y-x|=0$.

On obtient alors par encadrement $\displaystyle\lim_{y\to x}S(y)=S(x)$ et ainsi S est continue en x.

$$\boxed{S \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

4. a. soient x et y deux éléments distincts de $[0,+\infty[$.

Rappelons que $S(y)-S(x)=(y-x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\cdot$ Donc $\dfrac{S(y)-S(x)}{y-x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\cdot$

Notons également que la série de terme général $\dfrac{1}{(n+x)^2}$ converge d'après **1 . a.** ($y=x$...).

Alors $\displaystyle\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}-\frac{1}{(n+x)^2}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+x)-(n+y)}{(n+x)^2(n+y)}\cdot$

$$\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}=(x-y)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}\cdot$$

$$\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| = |x-y|\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}\right| = |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}.$$

Montrons alors que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

x et y sont positifs donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+x)^2\,(n+y)\geqslant n^3>0$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{(n+x)^2\,(n+y)}\leqslant\dfrac{1}{n^3}$.

Finalement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ car les deux séries convergent.

Donc $\displaystyle\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| = |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leqslant |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

$$\boxed{\forall (x,y)\in\big([0,+\infty[\big)^2,\ x\neq y \Longrightarrow \left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right| \leqslant |y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.}$$

b. Soit x un élément de $[0,+\infty[$.

$\displaystyle\forall y\in[0,+\infty[,\ y\neq x\Longrightarrow 0\leqslant\left|\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}\right|\leqslant|y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ et $\displaystyle\lim_{y\to x}\left(|y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\right)=0$.

Il vient alors par encadrement $\displaystyle\lim_{y\to x}\frac{S(y)-S(x)}{y-x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$.

Ainsi S est dérivable en x et $\displaystyle S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$.

$$\boxed{S \text{ est dérivable sur } [0,+\infty[\text{ et } \forall x\in[0,+\infty[,\ S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}.}$$

c. $\displaystyle S'(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle S'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}-1$.

$$\boxed{S'(0)=\frac{\pi^2}{6} \text{ et } S'(1)=\frac{\pi^2}{6}-1.}$$

5. $\displaystyle\forall x\in[0,+\infty[,\ S''(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+x)^3}$. Donc S'' est négative sur $[0,+\infty[$. Alors :

$$\boxed{S \text{ est concave sur } [0,+\infty[.}$$

6. a. φ est continue sur $[1,+\infty[$.

$\displaystyle\forall A\in[1,+\infty[,\ \int_1^A\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^A\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+x}\right)\mathrm{d}t=\Big[\ln|t|-\ln|t+x|\Big]_1^A=\left[\ln\left|\frac{t}{t+x}\right|\right]_1^A$.

$\displaystyle\forall A\in[1,+\infty[,\ \int_1^A\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\ln\left|\frac{A}{A+x}\right|-\ln\left|\frac{1}{1+x}\right|=\ln\frac{A}{A+x}-\ln\frac{1}{1+x}$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{A}{A+x} = 1$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \ln \dfrac{A}{A+x} = 0$ et ainsi $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_1^A \varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\ln \dfrac{1}{1+x} = \ln(1+x)$.

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \ln(1+x).}$$

b. φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall t \in [1,+\infty[,\ \varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{(t+x)^2} \leqslant 0$ (car $0 < t \leqslant t+x$).

φ est donc décroissante sur $[1,+\infty[$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [n, n+1],\ \varphi(n+1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(n)$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n+1) = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(n)\,\mathrm{d}t = \varphi(n)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(n).}$$

Alors $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \varphi(n+1) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{m} \varphi(n)$.

Donc $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=2}^{m+1} \varphi(n) \leqslant \int_1^{m+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{m} \varphi(n)$ (*).

Or $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \varphi(n)$ existe et vaut $S(x) - \varphi(1)$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)$ existe et vaut $S(x)$; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

En faisant tendre m vers $+\infty$ dans $(*)$, il vient :

$S(x) - \varphi(1) \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x)$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(1)$.

Or $\varphi(1) = 1 - \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + 1$. Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.}$$

c. Supposons x dans $]1,+\infty[$. $\ln(1+x) \leqslant S(x) \leqslant 1 + \ln(1+x)$ car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \ln(1+x)$.

Comme $\ln x$ est strictement positif on a encore : $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} \leqslant \dfrac{S(x)}{\ln x} \leqslant \dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$ $(**)$.

$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} = \dfrac{1}{\ln x}\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right) + \ln x\right) = 1 + \dfrac{1}{\ln x}\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + 0 \times 0 = 1$.

On a également : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) = 0 + 1 = 1$.

L'encadrement $(**)$ donne alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{\ln x} = 1$. Finalement :

$$\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x.}$$

7. Donnons les résultats importants pour bien tracer l'allure de la courbe représentative de S.

- S est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ car $\forall x \in [0,+\infty[,\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} > 0$.
- $S(0) = 0,\ S(1) = 1,\ S'(0) = \dfrac{\pi^2}{6} \approx 1,6$ et $S'(1) = \dfrac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0,6$.
- S est concave donc sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes.
- $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

La courbe représentative de S admet en $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de $(x'x)$.

Désolé pour l'allure de la courbe...