EM LYON 2006 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

PROBLÈME I

Préliminaires

1. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$\forall t \in]0,+\infty[,\ \dfrac{t^n\, e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2}\, e^{-t^2} = (t^2)^{\frac{n+2}{2}}\, e^{-t^2}$.

Or par croissance comparée $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty} \left(x^\alpha\, e^{-x}\right) = 0$ donc $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \lim_{t\to+\infty} \left((t^2)^\alpha\, e^{-t^2}\right) = 0$.

Alors $\lim_{t\to+\infty} \left((t^2)^{\frac{n+2}{2}}\, e^{-t^2}\right) = 0$. Ainsi $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{t^n\, e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ t^n\, e^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{t^2}\right).}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $f_n : t \to t^n\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- $f_n(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}} \left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
- $\forall t \in [1,+\infty[, f_n(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge car $2 > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge également puisque f_n est continue sur $[0,1]$.

Soit A un réel strictement négatif.

Le changement de variable $u = -t$ donne sans difficulté : $\displaystyle\int_A^0 f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-A}^0 f_n(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{-A} f_n(-u)\,\mathrm{d}u$.

Observons que $\forall u \in \mathbb{R},\ f_n(-u) = (-u)^n\, e^{-u^2} = (-1)^n\, u^n\, e^{-u^2} = (-1)^n\, f_n(u)$ (f_n a la parité de n).

Alors $\displaystyle\int_A^0 f_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{-A} f_n(u)\,\mathrm{d}u$.

Or $\lim_{A\to-\infty} (-A) = +\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $(-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\Big(1+(-1)^n\Big)\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

Remarque *Si n est un élément pair de $\mathbb{N}$,* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Si n est un élément impair de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

2. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$.

Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{r} a_n\,X^n$.

Pour tout élément n de $[\![0, r]\!]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{r} a_n\,(t^n\,e^{-t^2})\right)\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{r} a_n\,t^n\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } P \text{ de } \mathbb{R}[X],\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

3. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Soient A et B deux réels.

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = t^{n+1}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ v(t) = -\dfrac{1}{2}\,e^{-t^2}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = (n+1)\,t^n$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ v'(t) = t\,e^{-t^2}$.

Une intégration par parties simple donne alors :

$$\int_A^B t^{n+2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_A^B u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)\,v(t)\Big]_A^B - \int_A^B u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_A^B t^{n+2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[t^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\,e^{-t^2}\right)\right]_A^B - \int_A^B (n+1)\,t^n\left(-\frac{1}{2}\,e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\int_A^B t^{n+2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,A^{n+1}\,e^{-A^2} - \frac{1}{2}\,B^{n+1}\,e^{-B^2} + \frac{n+1}{2}\int_A^B t^n\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'après **1.a.**, $B^{n+1}\,e^{-B^2} \underset{B\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{B^2}\right)$. Or $\displaystyle\lim_{B\to+\infty}\frac{1}{B^2} = 0$. Ainsi $\displaystyle\lim_{B\to+\infty}\Big(B^{n+1}\,e^{-B^2}\Big) = 0$.

$\displaystyle\lim_{A\to-\infty}(-A) = +\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\Big((-A)^{n+1}\,e^{-(-A)^2}\Big) = 0$ d'après ce que nous venons de voir.

Ainsi $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\Big((-1)^{n+1}\,\Big(A^{n+1}\,e^{-A^2}\Big)\Big) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\Big(A^{n+1}\,e^{-A^2}\Big) = 0$.

Alors $\displaystyle\int_A^B t^{n+2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,A^{n+1}\,e^{-A^2} - \frac{1}{2}\,B^{n+1}\,e^{-B^2} + \frac{n+1}{2}\int_A^B t^n\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\lim_{A\to-\infty}\Big(A^{n+1}\,e^{-A^2}\Big) = 0$,

$\displaystyle\lim_{B\to+\infty}\Big(B^{n+1}\,e^{-B^2}\Big) = 0$, $I_{n+1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+1}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors en faisant tendre A vers $-\infty$, puis B vers $+\infty$ dans l'égalité précédente on obtient : $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}\, I_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{n+1}{2}\, I_n.}$$

b. Nous avons vu plus haut que si n est un élément impair de $\mathbb{N}$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = 0}.$$

c. Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\, p!}\, \sqrt{\pi}$.

• $I_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$. Oublions le résultat proposé... pour tester le théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées.

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$. φ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t = 1$. Ce qui donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2\,\pi}$.

$h : u \to e^{-u^2}$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$, $\psi : t \to \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, +\infty[$, strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$ et définit une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, \mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\big(\psi(t)\big)\, \psi'(t)\, \mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence sont égales.

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, \mathrm{d}u = I_0$ existe donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\big(\psi(t)\big)\, \psi'(t)\, \mathrm{d}t$ existe et vaut I_0.

Ainsi $I_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\big(\psi(t)\big)\, \psi'(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\,\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$.

Alors $I_0 = \sqrt{\pi} = \dfrac{(2 \times 0)!}{2^{2\times 0}\, 0!}\, \sqrt{\pi}$ et la propriété est vraie pour $p = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément p de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2}\, I_{2p} = \dfrac{(2p+2)\,(2p+1)}{2^2(p+1)}\, I_{2p} = \dfrac{(2p+2)\,(2p+1)}{2^2(p+1)}\, \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\, p!}\, \sqrt{\pi} = \dfrac{\big(2(p+1)\big)!}{2^{2(p+1)}\, (p+1)!}\, \sqrt{\pi}$.

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\, p!}\, \sqrt{\pi}.}$$

I Recherche d'extremums locaux pour une fonction de deux variables réelles

1. Soit x et y deux réels.

$t \to (t-x)^2\,(t-y)^2$ est une fonction polynôme donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2}\,dt$ est convergente d'après le préliminaire.

Par conséquent $F(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe.

$\forall t \in \mathbb{R},\ (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2} = (t^2 - 2\,x\,t + x^2)\,(t^2 - 2\,y\,t + y^2)\,e^{-t^2}$. Alors :

$\forall t \in \mathbb{R},\ (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2} = \Big(t^4 - 2\,(x+y)\,t^3 + (x^2 + 4x\,y + y^2)\,t^2 - 2\,(x\,y^2 + y\,x^2)\,t + x^2\,y^2\Big)\,e^{-t^2}$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2} = t^4\,e^{-t^2} - 2\,(x+y)\,t^3\,e^{-t^2} + (x^2 + 4x\,y + y^2)\,t^2\,e^{-t^2} - 2\,(x\,y^2 + y\,x^2)\,t\,e^{-t^2} + x^2\,y^2\,e^{-t^2}$.

Rappelons que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Alors, par linéarité, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = I_4 - 2\,(x+y)\,I_3 + (x^2 + 4x\,y + y^2)\,I_2 - 2\,(x\,y^2 + y\,x^2)\,I_1 + x^2\,y^2\,I_0.$$

Or $I_3 = I_1 = 0$. $I_0 = \sqrt{\pi}$, $I_2 = \dfrac{0+1}{2}\,I_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$ et $I_4 = \dfrac{2+1}{2}\,I_2 = \dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \Big(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,\big(x^2 + 4xy + y^2\big) + x^2\,y^2\Big)\sqrt{\pi}$.

Ainsi $F(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,\big(x^2 + 4xy + y^2\big) + x^2\,y^2$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\,\big(x^2 + 4xy + y^2\big) + x^2\,y^2.}$$

2. F est une application polynômiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donc F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. En particulier F possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{2}\,\big(2x + 4y\big) + 2x\,y^2 = x + 2y + 2x\,y^2$.

De même $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{2}\,\big(4x + 2y\big) + 2x^2\,y = 2x + y + 2x^2\,y$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x + 2y + 2x\,y^2 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x + y + 2x^2\,y.}$$

Soit $X = (x,y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} x + 2y + 2x\,y^2 = 0 \\ 2x + y + 2x^2\,y = 0 \end{cases}.$$

En rempaçant la seconde ligne par la seconde moins la première et en factorisant par $x - y$ il vient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2x\,y^2 = 0 \\ (x-y)\,(1+2xy) = 0 \end{cases}. \text{ Alors :}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x\,(3+2\,x^2) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2xy = -1 \\ x + 2y + (-1)\,y = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = y \\ x\,(3+2\,x^2) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

$$\begin{cases} 2xy = -1 \\ x + 2y + (-1)\,y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \Longleftrightarrow X = (0,0) \text{ ou } X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } X = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$\boxed{F \text{ possède exactement trois points critiques : } O = (0,0),\ A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).}$

3. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ donc si F possède un extremum en un point X de $\mathbb{R}^2$ alors son gradient s'annule en X et ainsi $\dfrac{\partial F}{\partial x}(X) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(X) = 0$.

Alors F ne peut admettre un extremum local qu'en O, A ou B.

Nous avons vu que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Rappelons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x + 2y + 2x\,y^2$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x + y + 2x^2\,y$.

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 1 + 2y^2,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 1 + 2x^2$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = 2 + 4xy$.

En utilisant les notations de Monge on obtient en $O = (0,0)$: $rt - s^2 = 1 \times 1 - 2^2 = -3 < 0$. F ne possède pas d'extremum local en $O = (0,0)$.

En $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ on obtient : $rt - s^2 = 2 \times 2 - 0^2 = 4 > 0$ et $r = 2 > 0$.

F possède en $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un minimum local.

Notons encore que $F(A) = F(B) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - 4\,\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

En $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ F possède un minimum local qui vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$ De plus ce sont les seuls points de $\mathbb{R}^2$ où F possède un extremum local.

Remarque Vous avez dit local ? Mouais ?

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + 2\,xy\right) + (xy)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,(x+y)^2 + (xy)^2 + (xy) + \frac{1}{4}\cdot$$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ F(x,y)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\,(x+y)^2+\left(xy+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant 0.$

Ainsi F admet un minimum global qui vaut $\dfrac{1}{2}$ atteint en les seuls points A et B.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

---

1. Soit x un réel. $\varphi_x : x \to \sin(xt)\,e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant|\varphi_x(t)|=|\sin(xt)|\,e^{-t^2}\leqslant e^{-t^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $I_0=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\varphi_x(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

$\psi_x : x\to t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant|\psi_x(t)|=|\cos(xt)|\,t\,e^{-t^2}\leqslant t\,e^{-t^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $I_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\psi_x(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\sin(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ convergent.}}$$

2. Soit a et λ deux réels. sin est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-lagrange appliquée à sin à l'ordre 1 donne :

$|\sin(a+\lambda)-\sin(a)-(a+\lambda-a)\,\sin'(a)|\leqslant\dfrac{|a+\lambda-a|^2}{2}\displaystyle\operatorname*{Max}_{u\in[\mathrm{Min}(a,a+\lambda),\mathrm{Max}(a,a+\lambda)]}|\sin''(u)|.$

Ainsi $|\sin(a+\lambda)-\sin(a)-\lambda\,\cos(a)|\leqslant\dfrac{\lambda^2}{2}\displaystyle\operatorname*{Max}_{u\in[\mathrm{Min}(a,a+\lambda),\mathrm{Max}(a,a+\lambda)]}|-\sin(u)|\leqslant\dfrac{\lambda^2}{2}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R},\forall\lambda\in\mathbb{R},\ |\sin(a+\lambda)-\sin(a)-\lambda\,\cos(a)|\leqslant\frac{\lambda^2}{2}\cdot}$$

3. a. Soit x un réel et h un réel non nul. Posons $\Delta_x(h)=\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)$.

$\Delta_x(h)=\dfrac{1}{h}\big(S(x+h)-S(x)-h\,C(x)\big).$

$\Delta_x(h)=\dfrac{1}{h}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\big((x+h)\,t\big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\sin(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-h\int_0^{+\infty}t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right).$

$\Delta_x(h)=\dfrac{1}{h}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\sin(xt+ht)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right).$

Soit A un réel strictement positif.

$$\left|\int_0^A \Big(\sin\big((x+h)\,t\big)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^A \Big|\sin\big((x+h)\,t\big)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big|\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant le résultat de **2.** (avec $a=xt$ et $\lambda=ht$) il vient :

$$\left|\int_0^A \Big(\sin\big((x+h)\,t\big)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^A \frac{(ht)^2}{2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{h^2}{2}\int_0^A t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sin\big((x+h)\,t\big)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existent.

En faisant tendre A ver $+\infty$ on obtient alors :

$$\left|\int_0^{+\infty} \Big(\sin\big((x+h)\,t\big)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{|h|^2}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Alors $\displaystyle|\Delta_x(h)| = \frac{1}{|h|}\left|\int_0^{+\infty} \Big(\sin(xt+ht)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Ainsi $\displaystyle|\Delta_x(h)| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout réel h non nul.

En faisant tendre h vers zéro il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\Delta_x(h)=0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)\right)=0.$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : \lim_{h\to 0}\left(\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)\right)=0.}$$

b. Soit x un élément de $\mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)\right)=0$ donc $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=C(x)$.

Alors S est dérivable en x et $S'(x)=C(x)$.

$$\boxed{S \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R},\ S'(x)=C(x).}$$

4. a. Soit x un élément de $\mathbb{R}$.

Soit A un réel strictement positif. Posons ici $\forall t\in\mathbb{R},\ u(t)=\cos(xt)$ et $\forall t\in\mathbb{R},\ v(t)=-\dfrac{1}{2}\,e^{-t^2}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall t\in\mathbb{R},\ u'(t)=-x\,\sin(xt)$ et $\forall t\in\mathbb{R},\ v'(t)=t\,e^{-t^2}$.

De plus $\displaystyle\int_0^A t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^A u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties il vient alors :

$$\int_0^A t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\left[\cos(xt)\,\left(-\frac{1}{2}\,e^{-t^2}\right)\right]_0^A-\int_0^A\big(-x\,\sin(xt)\big)\left(-\frac{1}{2}\,e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\cos(xA)\,e^{-A^2}-\frac{x}{2}\int_0^A \sin(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad (\bigstar).$$

Notons que $\left|\cos(xA)\,e^{-A^2}\right|=|\cos(xA)|\,e^{-A^2}\leqslant e^{-A^2}$ donc, par encadrement $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\big(\cos(xA)\,e^{-A^2}\big)=0$ car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}e^{-A^2}=0$.

De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge donc en faisant tendre A vers $+\infty$ dans ($\bigstar$) il vient :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$; soit encore : $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\,S(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\,S(x).}$$

b. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell(x) = 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) - \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

$x \to 2\,e^{\frac{x^2}{4}}$ et S sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $x \to 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \to e^{\frac{x^2}{4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors $x \to \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}$. Ainsi $x \to \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

ℓ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell'(x) = 2\left(\dfrac{x}{2}\right) e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) + 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S'(x) - e^{\frac{x^2}{4}} = 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\left(\dfrac{x}{2}\,S(x) - \dfrac{1}{2} + S'(x)\right)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell'(x) = 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\big(-C(x) + S'(x)\big) = 0$.

Par conséquent ℓ est constante sur $\mathbb{R}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell(x) = \ell(0)$.

Or $\ell(0) = 2\,e^{\frac{0^2}{4}}\,S(0) - \displaystyle\int_0^0 e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t = 2\,S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(0\times t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) - \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t = \ell(x) = 0$. Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t.}$$

c. $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \dfrac{1}{2\,e^{\frac{x^2}{4}}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\,S(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{2}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t \text{ et } S'(x) = C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t.}$$

III Obtention d'un développement limité

---

1. Soit x un réel. $t \to \dfrac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2\,t^2} \leqslant 1$ et $0 \leqslant e^{-t^2}$. Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2} \leqslant e^{-t^2}$.

La convergence de $I_0=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. a. Soit u un réel positif ou nul. $1-u+u^2-\dfrac{1}{1+u}=\dfrac{(1-u+u^2)\,(1+u)-1}{1+u}=\dfrac{(1+u^3)-1}{1+u}=\dfrac{u^3}{1+u}\cdot$

Or $0\leqslant\dfrac{1}{1+u}\leqslant 1$ et $0\leqslant u^3$ donc $0\leqslant\dfrac{u^3}{1+u}\leqslant u^3$. Ainsi $0\leqslant 1-u+u^2-\dfrac{1}{1+u}\leqslant u^3$.

$$\boxed{\forall u\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant 1-u+u^2-\frac{1}{1+u}\leqslant u^3.}$$

b. Soit x un réel. $t\rightarrow 1-x^2\,t^2+x^4\,t^4$ est une fonction polynôme donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4-\frac{1}{1+x^2\,t^2}\right)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

$\forall t\in\mathbb{R},\ x^2\,t^2\in[0,+\infty[$ donc d'après ce qui précède : $\forall t\in\mathbb{R},\ 0\leqslant 1-x^2\,t^2+x^4\,t^4-\dfrac{1}{1+x^2\,t^2}\leqslant (x^2\,t^2)^3$.

Comme $\forall t\in\mathbb{R},\ e^{-t^2}\geqslant 0 : 0\leqslant\big(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\big)\,e^{-t^2}-\dfrac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2}\leqslant x^6\,t^6\,e^{-t^2}$ pour tout réel t.

Alors $0\leqslant\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}x^6\,t^6\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ car toutes les intégrales convergent.

Ainsi $0\leqslant\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-g(x)\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}x^6\,t^6\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Remarquons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^6\,t^6\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=x^6\,I_6=x^6\,\frac{4+1}{2}\,I_4=x^6\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{4}\,\sqrt{\pi}=\frac{15\,\sqrt{\pi}}{8}\,x^6.$ Finalement :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\big(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-g(x)\leqslant\frac{15\,\sqrt{\pi}}{8}\,x^6.}$$

3. $\forall x\in\mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=I_0-x^2\,I_2+x^4\,I_4=\sqrt{\pi}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,x^2+\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\,x^4.$

Posons $Q=\sqrt{\pi}-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,X^2+\dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}\,X^4$. Q est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré 4 donc de degré inférieur ou égal à 5.

Montrons que $g(x)=Q(x)+\mathrm{o}(x^5)$ au voisinage de 0. Nous pourrons alors dire que g possède un développement limité à l'ordre 5 en 0 de partie régulière Q.

Pour cela il suffit de montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-Q(x)}{x^5}=0$ ou que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{Q(x)-g(x)}{x^5}=0$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant Q(x) - g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - x^2\, t^2 + x^4\, t^4\right) e^{-t^2}\, \mathrm{d}t - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8}\, x^6.$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |Q(x) - g(x)| = Q(x) - g(x) \leqslant \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}\, x^6 \leqslant \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}\, |x|^6.$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{Q(x) - g(x)}{x^5}\right| \leqslant \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}\, |x|.$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{15\sqrt{\pi}}{8}\, |x| = 0$ donc par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{Q(x) - g(x)}{x^5} = 0.$

Ceci achève de montrer que $g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^5)$ au voisinage de 0 avec $Q = \sqrt{\pi} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\, X^2 + \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}\, X^4$. Ainsi :

$\boxed{g \text{ admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 qui est : } g(x) = \sqrt{\pi} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\, x^2 + \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}\, x^4 + \mathrm{o}(x^5).}$

IV Nature d'une série

---

1. Soit p un élément de $\mathbb{N}$. $t \to \dfrac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \dfrac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{(2p)!}\, t^{2p}\, e^{-t^2}$ et $\dfrac{1}{(2p)!}\, I_{2p} = \dfrac{1}{(2p)!} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$

$\boxed{\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \text{ converge.}}$

2. Soit p un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \dfrac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{(2p)!}\, t^{2p}\, e^{-t^2}.$

Ainsi $0 \leqslant u_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2p)!}\, I_{2p}$ car ces intégrales convergent.

$\boxed{\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}.}$

$\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\, p!}\, \sqrt{\pi}$ donc $\forall p \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_{2p}}{(2p)!} = \sqrt{\pi}\, \dfrac{(1/4)^p}{p!}\cdot$ Ainsi $\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_p \leqslant \sqrt{\pi}\, \dfrac{(1/4)^p}{p!}\cdot$

La convergence de la série de terme général $\dfrac{(1/4)^p}{p!}$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général u_p.

$\boxed{\text{La série de terme général } u_p \text{ converge.}}$

PROBLÈME II

1. a. Par définition même de la matrice C on a,

$$\boxed{\text{pour tout élément } i \text{ de } [\![1, n-1]\!] : f(e_i) = e_{i+1}.}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout élément j de $[\![\mathbf{0}, n-1]\!]$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$.

La propriété est vraie pour $j = 0$ car $f^0 = \mathrm{id}$.

Supposons la propriété vraie pour un élément j de $[\![0, n-2]\!]$ et montrons la pour $j+1$.

Par hypothèse $f^j(e_1) = e_{j+1}$. Alors $f^{j+1}(e_1) = f\big(f^j(e_1)\big) = f(e_{j+1}) = f(e_{j+1+1})$ d'après **a.**.

Ainsi s'achève la récurrence. Donc $\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ f(e_1) = e_{j+1}$. En particulier :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ f^j(e_1) = e_{j+1}.}$$

Remarque On a alors $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n) = \big(e_1, f(e_1), \ldots, f^{n-1}(e_1)\big)$.

Par définition de la matrice C : $f(e_n) = -a_0\, e_1 - a_1\, e_2 - \cdots - a_{n-2}\, e_{n-1} - a_{n-1}\, e_n$.

Donc $f^n(e_1) = f\big(f^{n-1}(e_1)\big) = f(e_{n-1+1}) = f(e_n) = -\big(a_0\, e_1 + a_1\, e_2 + \cdots + a_{n-2}\, e_{n-1} + a_{n-1}\, e_n\big)$.

$$\boxed{f^n(e_1) = -\big(a_0\, e_1 + a_1\, e_2 + \cdots + a_{n-2}\, e_{n-1} + a_{n-1}\, e_n\big) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j\, e_{j+1}.}$$

2. a. $g(e_1) = f^n(e_1) + a_{n-1}\, f^{n-1}(e_1) + \cdots + a_1\, f(e_1) + a_0\, \mathrm{id}(e_1) = f^n(e_1) + \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j\, f^j(e_1)$.

En utilisant **1.** on obtient : $g(e_1) = -\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j\, e_{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, e_{j+1} = 0_{\mathbb{C}^n}$.

$$\boxed{g(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

b. Soit i un élément de $\mathbb{N}$. $g \circ f^i = \left(f^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^k\right) \circ f^i = f^{n+i} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^{k+i}$.

Alors : $g \circ f^i = f^{i+n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^{i+k} = f^i \circ \left(f^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^k\right) = f^i \circ g$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ g \circ f^i = f^i \circ g.}$$

c. Soit i un élément de $[\![0, n-1]\!]$.

$f^i(e_1) = e_{i+1}$. Donc $g(e_{i+1}) = g\big(f^i(e_1)\big) = \big(g \circ f^i\big)(e_1) = \big(f^i \circ g\big)(e_1) = \big(f^i(g(e_1)\big) = f^i(0_{\mathbb{C}^n}) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Alors $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ g(e_{i+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$. Ou :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ g(e_i) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Remarque *P est également un polynôme annulateur de C donc de sa matrice compagnon.*

d. Ainsi l'endomorphisme g coïncide avec l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$ sur la base $\mathcal{B}_0$.

Ces deux endomorphismes sont donc égaux. Par conséquent $g = 0_{\mathcal{L}(C^n)}$.

Or $g = f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \,\mathrm{id} = P(f)$. Finalement $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$.

$$\boxed{P = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

Application 1 : Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A est la matrice compagnon du polynôme $P_A = X^5 + (-0)\, X^4 + (-1)\, X^3 + (-2)\, X^2 + (-0)\, X + (-1)$!

$P_A = X^5 - X^3 - 2\, X^2 - 1$ et P_A est un polynôme annulateur de A. Alors $A^5 - A^3 - 2\, A^2 - I_5 = 0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{C})}$.

Par conséquent $A^5 = A^3 + 2\, A^2 + I_5$.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_5(\mathbb{C}) \text{ telle que } A^5 = A^3 + 2\, A^2 + I_5.}$$

e. P est un polynôme annulateur de f donc les valeurs propres de f sont des racines de P. Or l'ensemble des valeurs propres de f est aussi l'ensemble des valeurs propres de C. Ainsi

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } C \text{ sont des racines de } P.}$$

3. a. $Q(f)(e_1) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j\, f^j(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j\, e_{j+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1}\, e_i$.

$$\boxed{Q(f)(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j\, e_{j+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1}\, e_i.}$$

b. Reprenons le polynôme Q de la question précédente. Observons que c'est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ **quelconque** .

Supposons que Q est un polynôme annulateur de f. Alors $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$. En particulier $Q(f)(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1}\, e_i = 0_{\mathbb{C}^n}$. Comme la famille $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_{i-1} = 0$.

Alors $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, X^k$ est le polynôme nul ce qui contredit l'hypothèse.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à } n-1 \text{ et annulateur de } f.}$$

c. Soit λ une racine de P.

$P(f) = \big((X-\lambda)\, R\big)(f) = \big(X-\lambda\big)(f) \circ R(f) = (f - \lambda\,\mathrm{Id}) \circ R(f)$. Comme $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$:

$$\boxed{(f - \lambda\,\mathrm{Id}) \circ R(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}.}$$

d. Reprenons les hypothèses du **c.**

$P = (X-\lambda)\, R$ et P est de degré n donc R est un polynôme de degré $n-1$.

En particulier R est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$. Alors R n'est pas un polynôme annulateur de f.

Ainsi $R(f) \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ donc **il existe** un élément a de $\mathbb{C}^n$ tel que $R(f)(a)$ ne soit pas le vecteur nul.

Posons $b = R(f)(a)$. b est non nul.

De plus : $\big(f - \lambda\,\mathrm{id}\big)(b) = \big(f - \lambda\,\mathrm{id}\big)\big(R(f)(a)\big) = \big((f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ R(f)\big)(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}(a) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

b n'est pas le vecteur nul et $\big(f - \lambda\,\mathrm{id}\big)(b) = 0_{\mathbb{C}^n}$ donc λ est une valeur propre de f donc également de C.

$$\boxed{\text{Toutes les racines de } P \text{ sont des valeurs propres de } C.}$$

Remarques 1. On pouvait également raisonner par l'absurde. On supposant que λ n'est pas valeur propre de f on obtient l'existence de $(f - \lambda\, id)^{-1}$ qui permet d'obtenir (par composition) $R(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ donc une contradiction.

2. Notons que **2. e.** *et* **3. d.** *montrent que l'ensemble des valeurs propres de C est l'ensemble des racines de P.*

4. a. Soit x un élément de $\mathbb{C}$. Pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$ notons H_k la $k^{\text{ème}}$ colonne de $C - x\, I_n$.

Pour montrer que $C - x\, I_n$ est de rang au moins $n-1$ il suffit de montrer que la famille $(H_1, H_2, \ldots, H_{n-1})$ est libre non ?

Notons encore $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ H_k = -x\, E_k + E_{k+1}$.

Soit $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ un élément de $\mathbb{C}^{n-1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} z_k\, H_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} = \sum_{k=1}^{n-1} z_k\, H_k = \sum_{k=1}^{n-1} \big(z_k\,(-x)\, E_k + z_k\, E_{k+1}\big) = -\sum_{k=1}^{n-1} \big(z_k\, x\, E_k\big) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(z_k\, E_{k+1}\big).$$

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} = -\sum_{k=1}^{n-1} \big(z_k\, x\, E_k\big) + \sum_{k=2}^{n} \big(z_{k-1}\, E_k\big) = -z_1\, x\, E_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \big((-z_k\, x + z_{k-1})\, E_k\big) + z_{n-1}\, E_n.$$

$(E_1, E_2, \dots, E_n)$ étant une famille libre on obtient : $-z_1\, x = 0$, $\forall k \in [\![2, n-1]\!], -z_k\, x + z_{k-1} = 0$ et $z_{n-1} = 0$.

Ne reste plus qu'à démontrer par une petite récurrence descendante que $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ z_k = 0$.

La propriété est vraie pour $n-1$. Supposons la vraie pour k dans $[\![2, n-1]\!]$ et montrons la pour $k-1$.

Par hypothèse $z_k = 0$. Or $-z_k\, x + z_{k-1} = 0$ donc $z_{k-1} = 0$. Ce qui achève la récurrence !

Ainsi $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ z_k = 0$. La famille $(H_1, H_2, \dots, H_{n-1})$ est donc libre et $C - x\, I_n$ est au moins de rang $n-1$.

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } x, \text{ la matrice } C - x\, I_n \text{ est de rang supérieur ou égal à } n-1.}$$

Soit λ une valeur propre de C donc de f. La dimension du sous-espace propre SEP (C, λ) de C associé à λ est la même que la dimension du sous-espace propre SEP (f, λ) de f associé à λ.

Ainsi $\dim \text{SEP } (C, \lambda) = \dim \text{SEP } (f, \lambda) = \dim \text{Ker}(f - \lambda\, \text{id}) = \dim \mathbb{C}^n - \text{rg}(f - \lambda\, \text{id}) = n - \text{rg}(C - \lambda\, I_n)$.

Or $\text{rg}(C - \lambda\, I_n) \geqslant n-1$ donc $n - \text{rg}(C - \lambda\, I_n) \leqslant 1$ Ainsi $\dim \text{SEP } (C, \lambda) \leqslant 1$. Or la dimension d'un sous–espace propre est toujours supérieure ou égale à 1. Par conséquent SEP (C, λ) est de dimension 1.

$$\boxed{\text{Chaque sous espace propre de } C \text{ est de dimension } 1.}$$

b. Les sous-espaces propres de C étant de dimension 1, la somme des dimensions des sous-espaces propres de C est égale au nombre de valeurs propres distinctes de C c'est à dire au nombre de racines distinctes de P.

Rappelons que C est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n. Alors :

$$\boxed{C \text{ est diagonalisable si et seulement si } P \text{ admet } n \text{ racines deux à deux distinctes.}}$$

5. a. *Application 2 :* Notons que A_1 est la matrice compagnon du polynôme $P_{A_1} = X^4 - 1$.

Or P_{A_1} admet quatre racines distinctes dans $\mathbb{C}$: 1, -1, i et $-i$. Ainsi :

$$\boxed{A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable.}}$$

b. *Application 3 :* Notons que A_2 est la matrice compagnon du polynôme $P_{A_2} = X^4 - 2\,X^3 - 3\,X^2 + 8\,X - 4$.

1 est racine de P_{A_2}. De plus $P_{A_2} = (X-1)(X^3 - X^2 - 4\,X + 4) = (X-1)\big(X^2(X-1) - 4(X-1)\big)$.

Alors $P_{A_2} = (X-1)^2\,(X^2-4) = (X-1)^2\,(X-2)\,(X+2)$.

P_{A_2} n'a que trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$: 1, 2 et -2 donc

$$\boxed{A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

6. a. Le cours indique que si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alors ${}^tM$ est inversible si et seulement si M est inversible.

Pour tout nombre complexe $t : B - t\,I_n = {}^tC - t\,{}^tI_n = {}^t(C - t\,I_n)$.

Ainsi $B - t\,I_n$ est inversible si et seulement si $C - t\,I_n$ est inversible.

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } t,\ B - t\,I_n \text{ est inversible si et seulement si } C - t\,I_n \text{ est inversible.}}$$

b. Soit λ un complexe. Ce qui précède permet de dire que $B - \lambda\,I_n$ n'est pas inversible si et seulement si $C - \lambda\,I_n$ est n'est pas inversible.

Alors λ est valeur propre de B si et seulement si λ est valeur propre de C.

$$\boxed{B \text{ et } C \text{ ont les mêmes valeurs propres.}}$$

c. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ et soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Notons que $B - \lambda\,I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$.

$$U \in \text{SEP }(B,\lambda) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$U \in \text{SEP }(B,\lambda) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ -\lambda\, u_k + u_{k+1} = 0$ et $-a_0\, u_1 - a_1\, u_2 - \cdots - a_{n-2}\, u_{n-1} - (\lambda + a_{n-1})\, u_n = 0.$

$U \in \text{SEP }(B,\lambda) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_{k+1} = \lambda\, u_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, u_{k+1} + \lambda\, u_n = 0.$

$U \in \text{SEP }(B,\lambda) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ u_k = \lambda^{k-1}\, u_1$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k\, \lambda^k\, u_1) + \lambda\, \lambda^{n-1}\, u_1 = 0.$

$U \in \text{SEP }(B,\lambda) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ u_k = \lambda^{k-1}\, u_1$ et $\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, \lambda^k + \lambda^n\right) u_1 = 0.$

$U \in \text{SEP }(B,\lambda) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ u_k = \lambda^{k-1}\, u_1$ et $P(\lambda)\, u_1 = 0.$

Or $P(\lambda) = 0$. Donc $U \in \text{SEP }(B,\lambda) \Longleftrightarrow \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k = \lambda^{k-1}\, u_1 \Longleftrightarrow U \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right).$

$$\boxed{\text{Une base du sous-espace propre de } B \text{ associé à la valeur propre } \lambda \text{ est : } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right).}$$

d. P admet n racines distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n. Or les valeurs propres de B sont les valeurs propres de C qui sont les racines de P.

Ainsi B admet n valeurs propres deux à deux distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n. B est alors diagonalisable.

Posons pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix}$.

Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, (U_k) est une base du sous-espace propre de B associé à la valeur propre λ_k.

Comme B est diagonalisable, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme directe des sous-espaces propres de B donc $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Notons V la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

V est inversible comme matrice de passage et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ par définition même de U_1, U_2, ..., U_n.

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable et la matrice } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \text{ est inversible.}}$$

7. a. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ u(\varepsilon_i) = \mu_i\, \varepsilon_i$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall k \in \mathbb{N},\ u^k(\varepsilon_i) = \mu_i^k\, \varepsilon_i$. Alors :

$\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(a) = u^k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n) = u^k(\varepsilon_1) + u^k(\varepsilon_2) + \cdots + u^k(\varepsilon_n) = \mu_1^k\, \varepsilon_1 + \mu_2^k\, \varepsilon_2 \cdots + \mu_n^k\, \varepsilon_n$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, la matrice de $u^k(a)$ dans la base $\mathcal{E}$ est $S_k = \begin{pmatrix} \mu_1^k \\ \mu_2^k \\ \vdots \\ \mu_n^k \end{pmatrix}$.

E étant de dimension n, la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ est une base de E si et seulement si elle est de rang n ou si et seulement si la famille $(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$ est de rang n.

$(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$ est de rang n si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est de rang n.

Or cette matrice est $W = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \cdots & \mu_1^{n-1} \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \mu_n & \mu_n^2 & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}$ et sa transposée est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Comme les complexes μ_1, μ_2, ..., μ_n sont deux à deux distincts, d'après **6. d.** cette dernière matrice est inversible. Alors W est inversible donc W est de rang n.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}_a$ est une base de E.

$$\boxed{\text{Si } a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n \text{ alors } \mathcal{B}_a = (a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)) \text{ est une base de } E.}$$

b. Déterminons la matrice de u dans $\mathcal{B}_a$. Constatons que $\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ u\big(u^k(a)\big) = u^{k+1}(a)$!

De plus $u\big(u^{n-1}(a)\big) = u^n(a)$. Soit $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ la famille des coordonnées de $u^n(a)$ dans la base $\mathcal{B}_a$.

Posons $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ b_k = -c_k$. Alors $u\big(u^{n-1}(a)\big) = u^n(a) = -b_0\, a - b_1\, u(a) - \cdots - b_{n-1}\, u^{n-1}(a)$.

Ainsi la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_a$ est : $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -b_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -b_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$.

C'est la matrice compagnon du polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + b_1\, X + b_0$.

Il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + b_1\, X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.