EM LYON 2008 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss

Soit m un réel. Posons $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi_m(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}}$.

ψ_m est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres m et σ^2.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1. Par conséquent, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{2\pi}\sigma\,\psi_m(x)\right)\mathrm{d}x$ existe et vaut $\sqrt{2\pi}\,\sigma$.

Notons alors que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{2\pi}\sigma\,\psi_m(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}} = e^{-(x-m)^2}$ et $\sqrt{2\pi}\,\sigma = \sqrt{\pi}$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\sqrt{\pi}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } m,\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2}\,\mathrm{d}x \text{ existe et vaut } \sqrt{\pi}.}$$

Partie I : Un produit scalaire sur E.

---

1. Soient α et β deux réels quelconques ! $\alpha^2+\beta^2-2\,\alpha\,\beta = (\alpha-\beta)^2 \geqslant 0$, donc $\alpha^2+\beta^2 \geqslant 2\,\alpha\,\beta$.

En divisant par 2 il vient $\alpha\,\beta \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(\alpha^2+\beta^2\Big)$.

$$\boxed{\text{Si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels (positifs ou nuls) : } \alpha\,\beta \leqslant \frac{1}{2}\Big(\alpha^2+\beta^2\Big).}$$

$$\boxed{\text{Dans toute la suite } w \text{ est l'application de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par : } \forall x \in \mathbb{R},\ w(x) = e^{-x^2} \text{ (c'est dans II...)}}$$

2. u, v et w sont continues sur $\mathbb{R}$ donc le produit $u\,v\,w$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus la question précédente donne :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |u(x)\,v(x)| = |u(x)|\,|v(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(|u(x)|^2+|v(x)|^2\Big) = \dfrac{1}{2}\Big((u(x))^2+(v(x))^2\Big)$.

En remarquant que w est positive sur $\mathbb{R}$ on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |u(x)\,v(x)\,w(x)| = |u(x)|\,|v(x)|\,w(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\Big((u(x))^2+(v(x))^2\Big)\,w(x)$ ou encore :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |u(x)\,v(x)\,w(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u(x))^2\,w(x) + \dfrac{1}{2}\,(v(x))^2\,w(x) \quad (*)$.

De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(v(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x$ convergent car u et v sont des éléments de E.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\,(u(x))^2\,w(x)+\frac{1}{2}\,(v(x))^2\,w(x)\right)\mathrm{d}x$ converge.

$(*)$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors (en deux temps...) la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)\,v(x)\,w(x)|\,\mathrm{d}x$.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)\,v(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc convergente.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ et } v \text{ sont deux éléments de } E,\ \int_{-\infty}^{+\infty}u(x)\,v(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

3. a. Notons E' le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et montrons que E est un sous-espace vectoriel de E'.

• Par définition de E, E est contenu dans E'.

• Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ \theta(x)=0$. θ est un élément de E' et de toute évidence $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\theta(x)\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

θ est donc un élément de E et ainsi E n'est pas vide.

• Soit λ un réel. Soient u et v deux éléments de E. Montrons que $\lambda\,u+v$ est un élément de E.

$\lambda\,u+v$ est tout d'abord continue sur $\mathbb{R}$ car u et v sont continues sur $\mathbb{R}$.

Observons que $(\lambda\,u+v)^2\,w=\lambda^2\,u^2\,w+2\,\lambda\,u\,v\,w+v^2\,w$.

De plus les trois intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(u(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(v(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)\,v(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x$ convergent d'après la définition de E et la question précédente.

Alors par combinaison linéaire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\lambda\,u(x)+v(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Ceci achève de montrer que $\lambda\,u+v$ appartient à E.

Ceci achève aussi de montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E'.

$$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

b. • Notons d'abord que si u et v sont deux éléments de E, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)\,v(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge donc $(u\,|\,v)$ est un réel !

• Soient λ un réel. Soient u, v et t trois éléments de E.

$$(\lambda\,u+v\,|\,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda\,u+v)(x)\,t(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\lambda\,u(x)\,t(x)\,e^{-x^2}+v(x)\,t(x)\,e^{-x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

Alors $\displaystyle(\lambda\,u+v\,|\,t)=\lambda\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)\,t(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}v(x)\,t(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\lambda\,(u\,|\,t)+(v\,|\,t)$ car toutes les intégrales convergent.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u,v,t) \in E^3,\ (\lambda\, u + v \,|\, t) = \lambda\, (u \,|\, t) + (v \,|\, t).$

• $\forall (u,v) \in E^2,\ (u \,|\, v) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, v(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\, u(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = (v \,|\, u).$

• Soit u un élément de E. $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(u(x)\big)^2 e^{-x^2} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ converge.

Alors $(u \,|\, u) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ est un réel positif ou nul.

$\forall u \in E,\ (u \,|\, u) \geqslant 0.$

• Soit u un élément de E tel que $(u \,|\, u) = 0$. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = 0.$

- ◇ $u^2\, w$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- ◇ $u^2\, w$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$;
- ◇ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 w(x)\, \mathrm{d}x = 0$;
- ◇ $-\infty \neq +\infty$!

Alors plus de doute, $u^2\, w$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \big(u(x)\big)^2 w(x) = 0$ et $w(x) \neq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \big(u(x)\big)^2 = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = 0.\ u = 0_E.$

$\forall u \in E,\ (u \,|\, u) = 0 \Rightarrow u = 0_E.$

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{(.\,|\,.) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

4. Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrons que $x \to x^k$ appartient à E.

Tout d'abord $x \to x^k$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrons maintenant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ converge.

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\left(x^2\right)^{k+1}}{e^{x^2}}\right) = 0$ par croissance comparée.

- ◇ $x \to \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- ◇ $\left(x^k\right)^2 e^{-x^2} =_{x \to +\infty} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;
- ◇ $\forall x \in [1, +\infty[,\ \left(x^k\right)^2 e^{-x^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$;
- ◇ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ donc la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

$x \to \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}$ étant paire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (et vaut $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$).

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x^k\right)^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Ce qui achève de montrer que $x \to x^k$ appartient à E.

Soit alors P un élément de F. Montrons que P appartient à E.

Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et $r+1$ réels a_0, a_1, ..., a_r tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, x^k$.

Or pour tout k dans $\mathbb{N}$, $x \to x^k$ appartient à E ; P est donc combinaison linéaire d'éléments de E. Comme E est un espace vectoriel, P appartient à E.

$$\boxed{F \text{ est contenu dans } E.}$$

Partie II : Polynômes d'Hermite

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ w(x) = e^{-x^2}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ w'(x) = -2\,x\,e^{-x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ w''(x) = -2\,e^{-x^2} + (-2\,x)^2\,e^{-x^2} = (4\,x^2 - 2)\,e^{-x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ w'''(x) = 8\,x\,e^{-x^2} + (4\,x^2 - 2)\,(-2\,x)\,e^{-x^2} = (-8\,x^3 + 12\,x)\,e^{-x^2}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = -e^{x^2}\left(-2\,x\,e^{-x^2}\right) = 2\,x$, $\forall x \in \mathbb{R},\ H_2(x) = e^{x^2}\left((4\,x^2 - 2)\,e^{-x^2}\right) = 4\,x^2 - 2$, $\forall x \in \mathbb{R},\ H_3(x) = -e^{x^2}\left((-8\,x^3 + 12\,x)\,e^{-x^2}\right) = 8\,x^3 - 12\,x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = 2\,x, H_2(x) = 4\,x^2 - 2 \text{ et } H_3(x) = 8\,x^3 - 12\,x.}$$

2. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = (-1)^n\,e^{x^2}\,w^{(n)}(x)$. En dérivant on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n'(x) = (-1)^n\,(2\,x)\,e^{x^2}\,w^{(n)}(x) + (-1)^n\,e^{x^2}\,w^{(n+1)}(x) = 2\,x\,H_n(x) - (-1)^{n+1}\,e^{x^2}\,w^{(n+1)}(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ H_n'(x) = 2\,x\,H_n(x) - H_{n+1}(x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ H_{n+1}(x) = 2\,x\,H_n(x) - H_n'(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : H_{n+1}(x) = 2\,x\,H_n(x) - H_n'(x).}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.

• La propriété est vraie pour n=0 car $\forall x \in \mathbb{R},\ H_0(x) = 1$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$. Montrons la pour $n+1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ H_{n+1}(x) = 2\,x\,H_n(x) - H_n'(x)$ et, $x \to 2\,x$, H_n et H_n' sont des polynômes.

Ainsi H_{n+1} est un polynôme.

De plus H_n est un polynôme de degré n donc $x \to 2\,x\,H_n(x)$ est un polynôme de degré n+1 et H'_n est un polynôme de degré strictement inférieur à n.

Par conséquent H_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ H_n \text{ est un polynôme de degré } n.}$$

c. Soit x un réel. $H_0(x) = 1$. Alors $H_1(x) = 2\,x\,H_0(x) - H'_0(x) = 2\,x$.

$H_2(x) = 2\,x\,H_1(x) - H'_1(x) = 2\,x\,(2\,x) - 2 = 4\,x^2 - 2$.

$H_3(x) = 2\,x\,H_2(x) - H'_2(x) = 2\,x\,(4\,x^2 - 2) - 8\,x = 8\,x^3 - 12\,x$.

$H_4(x) = 2\,x\,H_3(x) - H'_3(x) = 2\,x\,(8\,x^3 - 12\,x) - (24\,x^2 - 12) = 16\,x^4 - 48\,x^2 + 12$.

Nous avons ainsi retouvé les résultats de **II.1**. De plus :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H_4(x) = 16\,x^4 - 48\,x^2 + 12\ .}$$

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons α_n le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.

$\alpha_0 = 1$ car $H_0 = 1$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Le terme de plus haut degré de H_n est " $\alpha_n\,x^n$ ". Ainsi le terme de plus haut degré de $x \to 2\,x\,H_n$ est " $2\,\alpha\,x^{n+1}$ ". De plus H'_n est un polynôme de degré strictement inférieur à n.

Le terme de plus haut degré de $x \to 2\,x\,H_n - H'_n$, donc de H_{n+1}, est alors " $2\,\alpha_n\,x^{n+1}$ ". Ainsi $\alpha_{n+1} = 2\,\alpha_n$.

$(\alpha_n)_{n \geqslant n}$ est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = 2^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ le coefficient du terme de plus haut degré de } H_n \text{ est } 2^n.}$$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, w(-x) = w(x)$. Une récurence simple donne alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (-1)^n\,w^{(n)}(-x) = w^{(n)}(x)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (-1)^n\,(-1)^n\,e^{x^2}\,w^{(n)}(-x) = (-1)^n\,e^{x^2}\,w^{(n)}(x)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (-1)^n\,H_n(-x) = H_n(x)$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(-x) = (-1)^{2n}\,H_n(-x) = (-1)^n\,H_n(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : H_n(-x) = (-1)^n\,H_n(x).}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

Si n est pair $\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(-x) = H_n(x)$ et H_n est pair(e).

Si n est impair $\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(-x) = -H_n(x)$ et H_n est impair(e).

$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ H_n \text{ a la parité de } n.}$

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. a. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et soit P un élément de F. Montrons que $(P' \,|\, H_{n-1}) = (P \,|\, H_n)$.

Il suffit de montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)\, H_{n-1}(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

Soit α et β deux réels. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_n(x) = H_{n-1}(x)\, e^{-x^2}$. P et ℓ_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Notons aussi que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_n'(x) = H_{n-1}'(x)\, e^{-x^2} + H_{n-1}(x)\,(-2\,x)\, e^{-x^2} = -\big(2\,x\, H_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x)\big)\, e^{-x^2} = -H_n(x)\, e^{-x^2}$.

Une intégration par parties donne alors :

$\displaystyle\int_\alpha^\beta P'(x)\, H_{n-1}\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \Big[P(x)\, H_{n-1}(x)\, e^{-x^2}\Big]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta P(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$. Ainsi :

$\displaystyle\int_\alpha^\beta P'(x)\, H_{n-1}(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = P(\beta)\, H_{n-1}(\beta)\, e^{-\beta^2} - P(\alpha)\, H_{n-1}(\alpha)\, e^{-\alpha^2} + \int_\alpha^\beta P(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x \quad (**)$.

Ne reste plus qu'à faire tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$. Mais pour cela un petit résultat intermédiaire s'impose.

Lemme 1 : $\boxed{\text{Pour tout élément } Q \text{ de } F : \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \Big(Q(x)\, e^{-x^2}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(Q(x)\, e^{-x^2}\Big) = 0.}$

Montrons le lemme. Dans cette preuve $\displaystyle\lim_{x\to\infty}$ voudra dire indifférement $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}$ ou $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}$.

Soit Q un élément de F. Si Q est le polynôme nul le résultat est clair. Supposons $Q \neq 0_F$.

Soit " $a\,x^r$ " le terme de plus haut degré de Q. $Q(x) \underset{x\to\infty}{\sim} a\,x^r$ donc $|Q(x)| \underset{x\to\infty}{\sim} |a\,x^r|$.

Alors $|Q(x)\, e^{-x^2}| = |Q(x)|\, e^{-x^2} \underset{x\to\infty}{\sim} |a\,x^r|\, e^{-x^2} = |a|\, \dfrac{(x^2)^{\frac{r}{2}}}{e^{x^2}}$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(|Q(x)\, e^{-x^2}|\Big) = \lim_{x\to\infty} \left(|a|\, \frac{(x^2)^{\frac{r}{2}}}{e^{x^2}}\right) = 0$ par croissance comparée. Donc $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(Q(x)\, e^{-x^2}\Big) = 0$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

$P\, H_{n-1}$ est un élément de F. Le lemme donne alors $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} \Big(P(\alpha)\, H_{n-1}(\alpha)\, e^{-\alpha^2}\Big) = 0$ et

$\displaystyle\lim_{\beta\to+\infty} \Big(P(\beta)\, H_{n-1}(\beta)\, e^{-\beta^2}\Big) = 0$.

En faisant successivement tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$ dans $(**)$ on obtient :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)\, H_{n-1}(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ (ces deux intégrales convergent).

En multipliant par $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ on obtient : $(P' \mid H_{n-1}) = (P \mid H_n)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } P \text{ dans } F : (P' \mid H_{n-1}) = (P \mid H_n).}$$

b. Montrons le lemme suivant.

Lemme 2 : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall P \in F,\ (P \mid H_n) = (P^{(k)} \mid H_{n-k}).}$

Soit P un élément de F et n un élément de $\mathbb{N}$.

Montons par récurrrence que $\forall k \in [\![0, n]\!],\ (P \mid H_n) = (P^{(k)} \mid H_{n-k})$.

• La propriété est vraie pour $k = 0$!

• Supposons la propriété vraie pour un élément k de $[\![0, n-1]\!]$. Montrons la pour $k+1$.

En appliquant le résultat de la question précédente il vient :

$(P^{(k)} \mid H_{n-k}) = \big((P^{(k)})' \mid H_{(n-k)-1}\big) = (P^{(k+1)} \mid H_{n-(k+1)})$.

Ceci qui achève la récurrence.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et P un élément de F_{n-1}.

Le lemme 2 donne en particulier $(P \mid H_n) = (P^{(n)} \mid H_{n-n}) = (P^{(n)} \mid H_0)$. Or $P^{(n)}$ est le polynôme nul car P appartient à F_{n-1}. Donc $(P \mid H_n) = (P^{(n)} \mid H_0) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } P \text{ dans } F_{n-1} : (P \mid H_n) = 0.}$$

c. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrons que $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une famille orthogonale. C'est vrai si $n = 0$! Supposons n non nul.

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![0, n]\!]$. Montrons que $(H_i \mid H_j) = 0$. Comme $(H_i \mid H_j) = (H_i \mid H_j)$ on peut supposer pour ce faire que $i < j$.

Alors $H_i \in F_i$ (car $\deg H_i = i$), $H_j \in F_j$ (car $\deg H_j = j$) et $H_i \subset F_{j-1}$ (car $i \leqslant j-1$).

Le résultat préédent appliqué pour $n = j$ ($j \in \mathbb{N}^*$ car $i < j$) et $P = H_i$ permet de dire que $(H_i \mid H_j) = 0$.

H_i et H_j sont orthogonaux.

Ainsi les éléments de la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ sont dans F et sont deux à deux orthogonaux.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ la famille } (H_0, H_1, \ldots, H_n) \text{ est orthogonale dans } F.}$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est famille orthogonale d'éléments **non nuls** de F_n. C'est donc une famille libre d'éléments de F_n de cardinal $n+1$. Comme F_n est de dimension $n+1$, $(H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de F_n.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ la famille } (H_0, H_1, \dots, H_n) \text{ est une base (orthogonale) de } F_n.}$$

3. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Le lemme 2 donne $\|H_n\|^2 = (H_n \mid H_n) = (H_n^{(n)} \mid H_{n-n}) = (H_n^{(n)} \mid H_0)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ \|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} \mid H_0).}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$$\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} \mid H_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(n)}\, H_0\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n\, n!\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{2^n\, n!}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Le préliminaire donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Alors $\|H_n\|^2 = 2^n\, n!$ donc $\|H_n\| = \sqrt{2^n\, n!}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ \|H_n\| = \sqrt{2^n\, n!}.}$$

Partie IV : Un endomorphisme symétrique

---

1. • Soit P un élément de F. $-P'' + 2\,X\,P' + P$ est encore un élément de F ! $f(P)$ appartient à F.

f est une application de F dans F.

• Soit λ un réel. Soient P et Q deux éléments de F.

$f(\lambda\,P + Q) = -(\lambda\,P + Q)'' + 2\,X\,(\lambda\,P + Q)' + \lambda\,P + Q = -\lambda\,P'' - Q'' + 2\,X\,(\lambda\,P' + Q') + \lambda\,P + Q.$

$f(\lambda\,P + Q) = \lambda(-P'' + 2\,X\,P' + P) + (-Q'' + 2\,X\,Q' + Q) = \lambda\,f(P) + f(Q).$

f est une application linéaire. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } F.}$$

2. a. Soit P un élément de F.

$(g \circ h)(P) = g\big(h(P)\big) = g(P') = 2\,X\,P' - (P')' = -P'' + 2\,X\,P' + P - P = f(P) - P = (f - \mathrm{Id}_F)(P).$

$(h \circ g)(P) = \big(g(P)\big)' = \big(2\,X\,P - P'\big)' = 2\,P + 2\,X\,P' - P'' = f(P) + P = (f + \mathrm{Id}_F)(P).$

$\forall P \in F,\ (g \circ h)(P) = (f - \mathrm{Id}_F)(P)$ et $(h \circ g)(P) = (f + \mathrm{Id}_F)(P)$. Donc

$$\boxed{g \circ h = f - \mathrm{Id}_F \text{ et } h \circ g = f + \mathrm{Id}_F.}$$

b. $g \circ h = f - \mathrm{Id}_F$. En composant à droite par g il vient : $g \circ h \circ g = f \circ g - g$.

$h \circ g = f + \mathrm{Id}_F$ donc en composant à gauche par g il vient : $g \circ h \circ g = g \circ f + g$.

Alors $f \circ g - g = g \circ f + g$. Donc $f \circ g - g \circ f = 2\, g$.

$$\boxed{f \circ g - g \circ f = 2\, g.}$$

3. Soit λ un réels et P un élément de F tels que $f(P) = \lambda\, P$.

$2\, g(P) = (f \circ g)(P) - (g \circ f)(P) = f\big(g(P)\big) - g\big(f(P) = f\big(g(P)\big) - g(\lambda\, P) = f\big(g(P)\big) - \lambda\, g(P)$.

Ainsi $f\big(g(P)\big) = (\lambda + 2)\, g(P)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda \text{ et pour tout élément } P \text{ de } F, \text{ si } f(P) = \lambda\, P \text{ alors } f\big(g(P)\big) = (\lambda + 2)\, g(P).}$$

4. a. $f(H_0) = -H_0'' + 2\, X\, H_0' + H_0 = H_0$ car $H_0'' = H_0' = 0_F$ puisque $H_0 = 1$.

$$\boxed{f(H_0) = H_0.}$$

b. Soit k un élément de $\mathbb{N}$. $g(H_k) = 2\, X\, H_k - H_k' = H_{k+1}$ d'après **II 2.a.**.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N} : g(H_k) = H_{k+1}.}$$

Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ f(H_k) = (2k+1)\, H_k$.

• $f(H_0) = H_0 = (2 \times 0 + 1)\, H_0$; la propriété est vraie pour $k = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$. Alors $f(H_k) = (2k+1)\, H_k$.

IV 3. donne alors $f\big(g(H_k)\big) = \big((2\, k + 1) + 2\big)\, g(H_k)$.

Comme $g(H_k) = H_{k+1}$: $f(H_{k+1}) = (2k+3)\, H_{k+1} = \big(2(k+1)+1\big)\, H_{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N} : f(H_k) = (2k+1)\, H_k.}$$

5. Soient P et Q deux éléments de F. Soient α et β deux réels.

Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_P(x) = P'(x)\, e^{-x^2}$. ℓ_P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notons aussi que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_p'(x) = P''(x)\, e^{-x^2} + P'(x)\, (-2\, x)\, e^{-x^2} = -\big(- P''(x) + 2\, x\, P'\big)\, e^{-x^2} = -\big(f(P)(x) - P(x)\big)\, e^{-x^2}$.

En posant $T = f(P) - P$ on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_p'(x) = -T(x)\, e^{-x^2}$.

Intégrons alors par parties.

$$\int_\alpha^\beta P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \ell_P(x)\, Q'(x)\, \mathrm{d}x = \Big[\ell_P(x)\, Q(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \ell_P'(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\int_\alpha^\beta P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \Big[P'(x)\, Q(x)\, e^{-x^2}\Big]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta T(x)\, Q(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

$$\int_\alpha^\beta P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = P'(\beta)\, Q(\beta)\, e^{-\beta^2} - P'(\alpha)\, Q(\alpha)\, e^{-\alpha^2} + \int_\alpha^\beta T(x)\, Q(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x \quad (***).$$

Ne reste plus qu'à faire tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$.

P' et Q' sont deux éléments de F donc de E, ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ existe.

Pour des raisons analogues $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\, Q(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ existe également.

De plus $P'\, Q$ est un élément de F ; le lemme 1 donne alors :

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \left(P'(\alpha)\, Q(\alpha)\, e^{-\alpha^2}\right) = 0 \text{ et } \lim_{\beta \to +\infty} \left(P'(\beta)\, Q(\beta)\, e^{-\beta^2}\right) = 0.$$

En faisant tendre successivement α vers $-\infty$ er β vers $+\infty$ dans $(***)$ il vient :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\, Q(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$. En multipliant par $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ on obtient : $(P' \,|\, Q') = (T \,|\, Q)$.

Alors $(P' \,|\, Q') = (f(P) - P \,|\, Q) = (f(P) \,|\, Q) - (P \,|\, Q)$.

$$\boxed{\forall (P, Q) \in F^2,\ (P' \,|\, Q') = (f(P) \,|\, Q) - (P \,|\, Q).}$$

6. Dans cette question n est un élément de $\mathbb{N}$.

a. Soit P un élément de F_n.

P'' est un élément de F_n. P' est un polynôme de degré strictement inférieur à n donc XP est également un élément de F_n.

P'', XP et P sont donc trois éléments du sous-espace vectoriel F_n. Alors $f(P) = -P'' + 2\,X\,P' + P$ est un élément de F_n.

$$\boxed{\forall P \in F_n,\ f(P) \in F_n.}$$

b. Soient P et Q deux éléments de F_n.

D'après IV 5. : $(f(P) \,|\, Q) = (P' \,|\, Q') + (P \,|\, Q)$ et $(f(Q) \,|\, P) = (Q' \,|\, P') + (Q \,|\, P)$.

La symétrie de $(.\,|\,.)$ donne alors $(f(P) \,|\, Q) = (f(Q) \,|\, P)$ puis $(f(P) \,|\, Q) = (P \,|\, f(Q))$ et enfin :

$(f_n(P) \,|\, Q) = (P \,|\, f_n(Q))$.

$$\boxed{f_n \text{ est un endomorphisme symétrique de } F_n.}$$

Remarque *f est également un endomorphisme symétrique de F !*

c. Rappelons que $(H_0, H_1, \cdots, H_n)$ est une base orthogonale de F_n.

De plus $\forall k \in [\![0, n]\!],\ f_n(H_k) = f(H_k) = (2k+1)\, H_k$ et $H_k \neq 0_{F_n}$; ainsi pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, H_k est un vecteur propre de f_n (associé à la valeur propre $2\,k+1$).

$(H_0, H_1, \cdots, H_n)$ est une base orthogonale de F_n contituée de vecteurs propres de f_n.

Posons $\forall k \in [\![0, n]\!],\ G_k = \dfrac{1}{\|H_k\|}\, H_k = \dfrac{1}{\sqrt{2^k\, k!}}\, H_k$.

$(G_0, G_1, \cdots, G_n)$ est une base orthonormale de F_n encore contituée de vecteurs propres de f_n.

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2^k\, k!}}\, H_k\right)_{k \in [\![0,n]\!]} \text{ est une base orthonormale de } F_n \text{ contituée de vecteurs propres de } f_n.}$$

Partie V : Intervention d'exponentielles

---

1. Soit a un réel.

• D'abord φ_a est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $\big(\varphi_a(x)\big)^2\, e^{-x^2} = e^{2\,a\,x - x^2} = e^{-(x^2+2\,a\,x+a^2)+a^2} = e^{a^2}\, e^{-(x-a)^2}$.

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2}\, \mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{\pi}$ d'après le préliminaire.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a^2}\, e^{-(x-a)^2}\, \mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{\pi}\, e^{a^2}$.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi_a(x)\big)^2\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{\pi}\, e^{a^2}$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\varphi_a \text{ est un élément de } E.}$$

Remarque *Retenons également que :* $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi_a(x)\big)^2\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\, e^{a^2}$.

2. Soient a et b deux réels. $(\varphi_a \,|\, \varphi_b) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(x)\, \varphi_b(x), e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_a(x)\, \varphi_b(x) = e^{a\,x}\, e^{b\,x} = e^{(a+b)\,x} = \left(e^{(\frac{a+b}{2})\,x}\right)^2 = \left(\varphi_{\frac{a+b}{2}}(x)\right)^2$.

La remarque de la première question permet de dire que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi_{\frac{a+b}{2}}(x)\right)^2 e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\, e^{(\frac{a+b}{2})^2}$.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(x)\,\varphi_b(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,e^{(\frac{a+b}{2})^2}$. Ainsi $(\varphi_a\,|\,\varphi_b) = e^{(\frac{a+b}{2})^2}$.

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ (\varphi_a\,|\,\varphi_b) = e^{(\frac{a+b}{2})^2}.}$$

3. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^2 = (\varphi_{\sqrt{\ln n}}\,|\,\varphi_{\sqrt{\ln n}}) = e^{\left(\frac{\sqrt{\ln n}+\sqrt{\ln n}}{2}\right)^2} = e^{\ln n} = n.$

Ainsi $\|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2} = \dfrac{1}{n}\cdot$ Plus de doute :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2} \text{ diverge.}}$$

4. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^2 = (\varphi_{\sqrt{n}}\,|\,\varphi_{\sqrt{n}}) = e^{\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{2}\right)^2} = e^n$. Alors : $\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.

La série géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$ est convergente car $\left|\dfrac{1}{e}\right| < 1$.

De plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}\cdot$

$$\boxed{\text{La série de terme général } \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty}\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = \frac{e}{e-1}\cdot}$$

Partie VI Une limite de probabilité conditionnelle

---

1. w est continue sur $\mathbb{R}$. Posons $\forall x\in\mathbb{R},\ W(x) = \displaystyle\int_0^x w(t)\,\mathrm{d}t$.

W est la primitive sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0. W est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R},\ W'(x) = w(x)$.

Notons que la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ donne la convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x.

$\forall x\in]0,+\infty[,\ \Phi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -W(x) + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

W étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

De plus $\forall x\in]0,+\infty[\ \Phi'(x) = -W'(x) = -w(x) = -e^{-x^2}$.

$$\boxed{\Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x\in]0,+\infty[\ \Phi'(x) = -e^{-x^2}.}$$

2. a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Phi(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ comme reste d'une intégrale convergente.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x^2}}{2}\right) = 0,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\,x^3}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\,x} = 0.$

Alors par produit $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} K(x) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} G(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} K(x) = 0.}$$

b. Φ, G et K sont dérivables sur $]0,+\infty[$, donc $G-\Phi$ et $\Phi-K$ sont également dérivables sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ (G-\Phi)'(x) = G'(x) - \Phi'(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{2\,x^4}\right)\ \dfrac{e^{-x^2}}{2} + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\,x^3}\right)(-2\,x)\,\dfrac{e^{-x^2}}{2} + e^{-x^2}.$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ (G-\Phi)'(x) = \left(-\dfrac{1}{2\,x^2} + \dfrac{3}{4\,x^4} - 1 + \dfrac{1}{2\,x^2} + 1\right) e^{-x^2} = \dfrac{3}{4\,x^4}\, e^{-x^2}.$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ (G-\Phi)'(x) \geqslant 0$ donc $G-\Phi$ est croissante sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ (\Phi-K)'(x) = \Phi'(x) - K'(x) = -e^{-x^2} - \left(-\dfrac{1}{2\,x^2}\, e^{-x^2} + \dfrac{1}{2\,x}\,(-2\,x)\, e^{-x^2}\right).$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ (\Phi-K)'(x) = \left(-1 + \dfrac{1}{2\,x^2} + 1\right) e^{-x^2} = \dfrac{1}{2\,x^2}\, e^{-x^2}.$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ (\Phi-K)'(x) \geqslant 0$ donc $\Phi-K$ est croissante sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{G-\Phi \text{ et } \Phi-K \text{ sont croissantes sur }]0,+\infty[.}$$

c. $G-\Phi$ est croissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty}(G-\Phi)(x) = 0-0=0$; ainsi $\forall x \in]0,+\infty[,\ (G-\Phi)(x) \leqslant 0$.

$\Phi-K$ est croissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty}(\Phi-K)(x) = 0-0=0$; ainsi $\forall x \in]0,+\infty[,\ (\Phi-K)(x) \leqslant 0$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ G(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant K(x)$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ G(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant K(x).}$$

d. Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $G(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant K(x)$ et $\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}} \geqslant 0$.

Alors $\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}\, G(x) \leqslant \dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}\, \Phi(x) \leqslant \dfrac{2\,x}{e^{-x^2}} K(x)$.

Or : $\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}\, G(x) = 1 - \dfrac{1}{2\,x^2}$ et $\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}} K(x) = 1$.

Finalement : $\forall x \in]0,+\infty[,\ 1 - \dfrac{1}{2\,x^2} \leqslant \dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}\, \Phi(x) \leqslant 1$.

Comme $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2\,x^2}\right) = 1$, il vient par encadrement $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}\, \Phi(x)\right) = 1$.

Alors $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\Phi(x)}{\frac{e^{-x^2}}{2\,x}}\right) = 1$ et : $\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2\,x}$.

$$\boxed{\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2\,x}.}$$

3 a. $\psi_0 : x \to \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(1/\sqrt{2})}\, e^{-\frac{(x-0)^2}{2\,(1\sqrt{2})^2}}$ est une densité de X. Notons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ P(X \leqslant x) = 1 - P(X > x) = 1 - \displaystyle\int_x^{+\infty} \psi_0(x)\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(x).$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P(X \leqslant x) = 1 - P(X > x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(x).}$$

Remarque *On a également :* $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X > x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(x).$

b. Soit c un réel positif. Soit x un réel.

$P_{(X>x)}(X \leqslant x+c) = \dfrac{P\big(\{X \leqslant x+c\} \cap \{X > x\}\big)}{P(X > x)} = \dfrac{P(x < X \leqslant x+c)}{P(X > x)} = \dfrac{P(x < X) - P(X > x+c)}{P(X > x)}.$

$P_{(X>x)}(X \leqslant x+c) = 1 - \dfrac{P(X > x+c)}{P(X > x)} = 1 - \dfrac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(x+c)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(x)} = 1 - \dfrac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)}.$

$\Phi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2\,x}$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\Phi(x)}{\frac{e^{-x^2}}{2\,x}} \right) = 1.$

Par composition des limites : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\Phi(x+c)}{\frac{e^{-(x+c)^2}}{2\,(x+c)}} \right) = 1.$ Ainsi $\Phi(x+c) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{e^{-(x+c)^2}}{2\,(x+c)}.$

Alors $\dfrac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\frac{e^{-(x+c)^2}}{2\,(x+c)}}{\frac{e^{-x^2}}{2\,x}} = \dfrac{x}{x+c}\, e^{-(x+c)^2+x^2} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-(x+c)^2+x^2} = e^{-2\,x\,c - c^2}.$

Par conséquent : $\dfrac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-(x+c)^2+x^2} = e^{-2\,x\,c-c^2}.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \right) = \lim_{x \to +\infty} e^{-2\,x\,c+c^2} = 0$ car c est strictement positif.

Donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} P_{(X>x)}(X \leqslant x+c) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \right) = 1.$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } c \text{ strictement positif : } \lim_{x \to +\infty} P_{(X>x)}(X \leqslant x+c) = 1.}$$
