

PROBLÈME 1

Partie I - Calcul d'une intégrale

1. • $f_{a,b} : x \rightarrow \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• Au voisinage de 0 : $e^{-ax} = 1 - ax + o(x)$ et $e^{-bx} = 1 - bx + o(x)$ donc $e^{-ax} - e^{-bx} = (b - a)x + o(x)$.

Ainsi $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = (b - a) + o(1)$ au voisinage de 0. Dans ces conditions $\lim_{x \rightarrow 0} f_{a,b}(x) = b - a$.

$f_{a,b}$ est donc prolongeable par continuité en 0. Par conséquent $\int_0^1 f_{a,b}(x) dx$ converge.

• a et b sont strictement positifs donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f_{a,b}(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a} \frac{ax}{e^{ax}} - \frac{1}{b} \frac{bx}{e^{bx}} \right) = 0$ par croissance comparée.

On a donc également $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 |f_{a,b}(x)|) = 0$ et ainsi $|f_{a,b}(x)| = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

De plus $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge et, $|f_{a,b}|$ et $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ sont positives sur $[1, +\infty[$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} f_{a,b}(x) dx$.

Finalement $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(x) dx$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \text{ converge.}}$$

2. a. Soit (ε, X) un élément de $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$.

Notons que $x \rightarrow \frac{e^{-ax}}{x}$ est continue sur $[\varepsilon, X]$ et que la fonction $x \rightarrow ax$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Ceci autorise le changement de variable $y = ax$ dans ce qui suit.

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y/a} \frac{1}{a} dy = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

De manière analogue on obtient : $\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bx}}{x} dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy$.

Pour tout (ε, X) appartenant à $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$:

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy \text{ et } \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bx}}{x} dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

b. Soit (ε, X) un élément de $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$.

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy + \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Pour tout (ε, X) appartenant à $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$:

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

3. a. • $y \rightarrow 1 - e^{-y}$ et $y \rightarrow \frac{1}{y}$ sont continues sur $]0, +\infty[$. Par produit h est continue sur $]0, +\infty[$.

• $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$. Alors $e^{-y} - 1 \underset{y \rightarrow 0}{\sim} -y$ donc $1 - e^{-y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y$. Finalement $\frac{1 - e^{-y}}{y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} 1$.

Alors $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-y}}{y} = 1 = h(0)$. Ceci suffit très largement pour dire que h est continue en 0.

L'application h de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par $\forall y \in [0, +\infty[$, $h(y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

b. Soit ε un réel strictement positif.

h est continue sur $[0, +\infty[$. Considérons alors une primitive H de h sur $[0, +\infty[$.

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y} - 1}{y} dy + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{y} dy = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y) dy + \left[\ln |y| \right]_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + (\ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon)).$$

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + (\ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon)) = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln \left(\frac{b\varepsilon}{a\varepsilon} \right) = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln \frac{b}{a}.$$

Or H est continue en 0 donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon)) = H(0) - H(0) = 0$.

$$\text{Donc } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln \frac{b}{a} \right) = \ln \frac{b}{a}.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \ln \frac{b}{a}.$$

c. Soit X un élément de $]0, +\infty[$.

$$\forall \varepsilon \in]0, X], \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Ce qui précède montre alors que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy \right) = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

$$\text{Donc } \int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

$$\text{Pour tout élément } X \text{ de }]0, +\infty[, \int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

d. Soit X un élément de $]0, +\infty[$.

Nous avons vu que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$ converge donc pour tout réel z strictement positif $\int_z^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$ converge également.

Alors $\int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy = \int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$ car ces deux intégrales convergent puisque aX et bX sont des réels strictement positifs.

De plus $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = 0$ (resp. $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = 0$) comme reste d'une intégrale convergente.

$$\text{Ainsi } \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \right) = 0 - 0 = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy \right) = \ln \frac{b}{a}. \text{ Finalement :}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

Partie II - Étude d'un produit scalaire

1. Notons E' l'espace vectoriel réel des applications de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

- E est contenu dans E' .

- Posons $\forall x \in [0, +\infty[, f_0(x) = 0$. f_0 est bornée sur $[0, +\infty[, f_0$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ et $f_0(0) = 0$.

Ainsi f_0 est un élément de E donc E n'est pas vide.

- Soient f et g deux éléments de E et soit λ un réel.

$\triangleright f$ (resp. g) est bornée sur $[0, +\infty[$. Donc il existe un réel positif M_f (resp. M_g) tel que

$$\forall x \in [0, +\infty[, |f(x)| \leq M_f \text{ (resp. } \forall x \in [0, +\infty[, |g(x)| \leq M_g).$$

$\forall x \in [0, +\infty[$, $|\lambda f(x) + g(x)| \leq |\lambda| |f(x)| + |g(x)| \leq |\lambda| M_f + M_g$ donc $\lambda f + g$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

$\triangleright f$ et g sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ donc $\lambda f + g$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

$\triangleright (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda \times 0 + 0 = 0$.

Par conséquent $\lambda f + g$ appartient à E . Ceci achève de montrer que :

E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

2. • $\forall x \in [0, +\infty[$, $|f_1(x)| = |\sin x| \leq 1$ donc f_1 est bornée sur $[0, +\infty[$.

f_1 est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$ car \sin est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$f_1(0) = \sin 0 = 0$.

Donc f_1 appartient à E .

• $f_2(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$. f_2 n'appartient pas à E .

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$ donc f_3 n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$. f_3 n'appartient pas à E .

• $\forall x \in [0, +\infty[$, $0 \leq e^{-x} \leq 1$ donc $\forall x \in [0, +\infty[$, $0 \leq f_4(x) = 1 - e^{-x} \leq 1$. f_4 est bornée sur $[0, +\infty[$.

$x \rightarrow 1 - e^{-x}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} donc f_4 est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

$f_4(0) = e^{-0} - 1 = 0$.

Par conséquent f_4 appartient à E .

f_1 et f_4 sont deux éléments de E . f_2 et f_3 n'appartiennent pas à E .

3. a. Soit f un élément de E . f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$. Donc f est dérivable en 0.

En remarquant que f est nulle en 0 il vient : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0)$.

Pour tout élément f de E : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$.

b. Soient f et g deux éléments de E . Posons $\forall x \in]0, +\infty[$, $\varphi(x) = \frac{f(x)g(x)}{x^2}$.

• φ est continue sur $]0, +\infty[$ car f , g et $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ sont continues sur $]0, +\infty[$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{x} \frac{g(x)}{x} \right) = f'(0)g'(0)$.

Ainsi φ est prolongeable par continuité en 0 donc $\int_0^1 \varphi(x) dx$ converge.

• f (resp. g) est bornée sur $[0, +\infty[$. Donc il existe un réel positif M_f (resp. M_g) tel que

$\forall x \in [0, +\infty[, |f(x)| \leq M_f$ (resp. $\forall x \in [0, +\infty[, |g(x)| \leq M_g$).

$\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq |\varphi(x)| = \frac{|f(x)| |g(x)|}{x^2} \leq \frac{M_f M_g}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{M_f M_g}{x^2} dx$ converge (car $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge).

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} |\varphi(x)| dx$. $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$ converge.

Si f et g sont deux éléments de E , $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx$ converge.

4. • Notons que pour tout élément (f, g) de E^2 , $(f | g)$ appartient à \mathbb{R} .

• Soient f, g et ℓ trois éléments de E . Soit λ un réel.

$$(\lambda f + g | \ell) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda f(x) + g(x)) \ell(x)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda f(x) \ell(x) + g(x) \ell(x)}{x^2} dx.$$

$$(\lambda f + g | \ell) = \lambda \int_0^{+\infty} \frac{f(x) \ell(x)}{x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{g(x) \ell(x)}{x^2} dx = \lambda (f | \ell) + (g | \ell) \text{ car toutes les intégrales convergent.}$$

$$\forall (f, g, \ell) \in E^3, (\lambda f + g | \ell) = \lambda (f | \ell) + (g | \ell).$$

• Soient f et g deux éléments de E . $(f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{g(x)f(x)}{x^2} dx = (g | f)$.

$$\forall (f, g) \in E^2, (f | g) = (g | f).$$

• Soit f un élément de E . $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{f(x)f(x)}{x^2} \geq 0$ donc $(f | f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)f(x)}{x^2} dx \geq 0$.

$$\forall f \in E, (f | f) \geq 0.$$

• Soit f un élément de E tel que $(f | f) = 0$.

$$\triangleright \int_0^{+\infty} \frac{(f(x))^2}{x^2} dx = 0.$$

$$\triangleright x \rightarrow \frac{(f(x))^2}{x^2} \text{ est continue sur }]0, +\infty[.$$

$$\triangleright x \rightarrow \frac{(f(x))^2}{x^2} \text{ est positive sur }]0, +\infty[.$$

$$\triangleright 0 \neq +\infty !$$

Les quatre points précédents permettent de dire que $\forall x \in]0, +\infty[, \frac{(f(x))^2}{x^2} = 0$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[, (f(x))^2 = 0$ donc $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = 0$.

Comme $f(0) = 0 : \forall x \in [0, +\infty[, f(x) = 0$. Ainsi $f = 0_E$.

$$\forall f \in E, (f | f) = 0 \Rightarrow f = 0_E.$$

Les cinq points précédents montrent que :

$(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .

5. Soient f et g deux éléments de E . Soient A et B deux réels strictement positifs.

Posons $u = fg$ et $\forall x \in]0, +\infty[$, $v(x) = -\frac{1}{x}$.

u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. De plus $\forall x \in]0, +\infty[$, $u'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x^2}$.

Ceci légitime l'intégration par parties suivantes.

$$\int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx = \left[-\frac{f(x)g(x)}{x} \right]_A^B - \int_A^B \left(-\frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} \right) dx.$$

$$\int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx = \frac{f(A)g(A)}{A} - \frac{f(B)g(B)}{B} + \int_A^B \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx \quad (\star).$$

f (resp. g) est bornée sur $[0, +\infty[$. Donc il existe un réel positif M_f (resp. M_g) tel que

$$\forall x \in [0, +\infty[, |f(x)| \leq M_f \text{ (resp. } \forall x \in [0, +\infty[, |g(x)| \leq M_g).$$

$$\text{Alors } 0 \leq \left| \frac{f(B)g(B)}{B} \right| = \frac{|f(B)||g(B)|}{B} \leq \frac{M_f M_g}{B}.$$

Comme $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{M_f M_g}{B} = 0$ il vient par encadrement $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{f(B)g(B)}{B} = 0$.

De plus $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{f(A)g(A)}{A} = \lim_{A \rightarrow 0} \left(\frac{f(A)}{A} g(A) \right) = f'(0) \times g(0) = f'(0) \times 0 = 0$ (d'après le résultat de **3. a.** et la continuité de g en 0).

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{f(B)g(B)}{B} = 0, \lim_{A \rightarrow 0} \frac{f(A)g(A)}{A} = 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx \text{ converge.}$$

Il résulte alors de (\star) que $\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx$ converge et vaut $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx$.

$$\text{Ainsi } (f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx.$$

Pour tout couple (f, g) d'éléments de E , $(f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx$ converge et

$$(f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx.$$

6. a. Soit α un réel strictement positif.

$\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq e^{-\alpha x} \leq 1$ donc $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq u_\alpha(x) = 1 - e^{-\alpha x} \leq 1$. u_α est bornée sur $[0, +\infty[$.

$x \rightarrow 1 - e^{-\alpha x}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} donc u_α est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[$.

$u_\alpha(0) = 1 - e^{-\alpha \times 0} = 1 - 1 = 0$. Ceci achève de montrer que u_α appartient à E .

$\forall \alpha \in]0, +\infty[, u_\alpha \in E$.

b. Soient α et β deux réels strictement positifs.

$$(u_\alpha | u_\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{u'_\alpha(x) u_\beta(x) + u_\alpha(x) u'_\beta(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha e^{-\alpha x} (1 - e^{-\beta x}) + (1 - e^{-\alpha x}) \beta e^{-\beta x}}{x} dx.$$

$$(u_\alpha | u_\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha (e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}) + \beta (e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x})}{x} dx.$$

α , β et $\alpha + \beta$ étant strictement positifs, **I.3.d** montre que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx$ convergent et valent respectivement $\ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$ et $\ln \frac{\alpha + \beta}{\beta}$.

$$\text{Alors } (u_\alpha | u_\beta) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx + \beta \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta}.$$

$$(u_\alpha | u_\beta) = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta} = (\alpha + \beta) \ln(\alpha + \beta) - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta.$$

Pour tout couple (α, β) d'éléments de $]0, +\infty[: (u_\alpha | u_\beta) = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta}$.

Pour tout couple (α, β) d'éléments de $]0, +\infty[: (u_\alpha | u_\beta) = (\alpha + \beta) \ln(\alpha + \beta) - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta$.

c. Soient α et β deux réels strictement positifs.

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha} > 1 \text{ et } \frac{\alpha + \beta}{\beta} > 1 \text{ donc } \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} > 0 \text{ et } \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta} > 0.$$

$$\text{Ainsi } (u_\alpha | u_\beta) = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta} > 0.$$

Pour tout couple (α, β) d'éléments de $]0, +\infty[: (u_\alpha | u_\beta) > 0$.

Partie III - Étude de densités de variables aléatoires

1. • $\forall x \in]-\infty, 0]$, $v(x) = 0 \geq 0$!

Soit un x un élément de $]0, +\infty[$. $4c^2x \geq c^2x$ donc $e^{-c^2x} \geq e^{-4c^2x}$. Alors $e^{-c^2x} - e^{-4c^2x} \geq 0$.

$$\text{Comme } x \ln 4 \text{ est strictement positif : } v(x) = \frac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x \ln 4} \geq 0.$$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $v(x) \geq 0$.

• v est nulle sur $] - \infty, 0]$ donc v est continue sur $] - \infty, 0]$.

$x \rightarrow e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}$ et $x \rightarrow \frac{1}{x \ln 4}$ sont continues sur $]0, +\infty[$. Par produit v est continue sur $]0, +\infty[$.

Finalement v est au moins continue sur \mathbb{R}^* donc sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points.

• $\int_{-\infty}^0 v(x) dx$ existe et vaut 0 car v est nulle sur $] - \infty, 0]$.

c^2 et $4c^2$ sont des réels strictement positifs donc, d'après **I.3.d.** : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x} dx$ existe et vaut $\ln \frac{4c^2}{c^2}$ ou $\ln 4$.

Alors $\int_0^{+\infty} v(x) dx$ existe et vaut $\frac{1}{\ln 4} \times \ln 4$ ou 1. Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} v(x) dx$ existe et vaut 1.

Les trois points précédents montrent que :

v est une densité d'une variable aléatoire réelle.

2. $\forall x \in] - \infty, 0]$, $x v(x) = 0$ donc $\int_{-\infty}^0 x v(x) dx$ existe et vaut 0.

$$\forall x \in]0, +\infty[, x v(x) = \frac{1}{\ln 4} (e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}).$$

Si λ est un réel strictement positif le cours sur les lois exponentielles nous autorise à dire que $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$ existe et vaut 1.

Ainsi pour tout réel strictement positif λ , $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ existe et vaut $\frac{1}{\lambda}$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-c^2x} dx$ et $\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x} dx$ existent et valent respectivement $\frac{1}{c^2}$ et $\frac{1}{4c^2}$.

Alors $\int_0^{+\infty} x v(x) dx$ existe et vaut $\frac{1}{\ln 4} \frac{1}{c^2} - \frac{1}{\ln 4} \frac{1}{4c^2}$ ou $\frac{3}{4c^2 \ln 4}$.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} x v(x) dx$ converge et vaut $\frac{3}{4c^2 \ln 4}$. Par conséquent :

X admet une espérance qui vaut $\frac{3}{4c^2 \ln 4}$.

3. a. Nous noterons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y .

Y prend ses valeurs dans \mathbb{R}^+ donc $\forall x \in] - \infty, 0[, F_Y(x) = 0$.

$$\forall x \in [0, +\infty[, F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} F_X(x^2) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrons que F_Y est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 au moins sur \mathbb{R}^* .

• $x \rightarrow x^2$ et F_X sont continues sur \mathbb{R} donc par composition $x \rightarrow F_X(x^2)$ est continue sur \mathbb{R} . Alors F_Y est continue sur $[0, +\infty[$ donc continue en tout point de $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0.

F_Y est nulle sur l'intervalle ouvert $] - \infty, 0]$, donc F_Y est continue en tout point de $] - \infty, 0]$.

Observons que $F_Y(0) = F_X(0) = \int_{-\infty}^0 v(x) dx = 0$. Alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$; F_Y est continue à gauche en 0.

Ceci achève de montrer que F_Y est continue en tout point de \mathbb{R} .

• v est continue sur \mathbb{R}^* donc F_X est au moins de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'_X(x) = v(x)$.

$x \rightarrow x^2$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 \in \mathbb{R}^*$. Donc par composition $x \rightarrow F_X(x^2)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* . Ainsi F_Y est de classes \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

F_Y étant nulle sur $] - \infty, 0[$ elle est également de classe \mathcal{C}^1 sur $] - \infty, 0[$.

F_Y est donc au moins de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* donc sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points. Ceci achève de montrer que :

$$Y = \sqrt{X} \text{ est une variable aléatoire à densité.}$$

$\forall x \in] - \infty, 0[$, $F_Y(x) = 0$ donc $\forall x \in] - \infty, 0[$, $F'_Y(x) = 0$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $F_Y(x) = F_X(x^2)$ donc $\forall x \in]0, +\infty[$, $F'_Y(x) = 2x F'_X(x^2) = 2x v(x^2)$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, F'_Y(x) = 2x \frac{e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}}{x^2 \ln 4} = 2x \frac{e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}}{x^2 2 \ln 2} = \frac{e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}}{x \ln 2}.$$

$$\text{Posons } \forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \begin{cases} \frac{e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}}{x \ln 2} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

f_Y est positive sur \mathbb{R} et coïncide avec F'_Y sur \mathbb{R}^* donc sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points. Ainsi f_Y est une densité de Y .

La fonction f_Y définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \begin{cases} \frac{e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}}{x \ln 2} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, est une densité de Y .

b. $Y^2 = X$ et X possède une espérance. Ainsi $E(Y^2)$ existe donc Y possède un moment d'ordre 2 donc une espérance et une variance.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx = \int_0^{+\infty} x f_Y(x) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} (e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}) dx.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}c}} e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}c}\right)^2}}.$$

Ainsi $x \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 x^2}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres 0 et $\left(\frac{1}{\sqrt{2}c}\right)^2$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 x^2} dx$ existe et vaut 1. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2 x^2} dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{c}$.

Par parité $\int_0^{+\infty} e^{-c^2 x^2} dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2c}$.

En remplaçant c par $2c$ on peut dire que $\int_0^{+\infty} e^{-4c^2 x^2} dx$ existe et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4c}$. Alors :

$$E(Y) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} (e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} e^{-c^2 x^2} dx - \frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} e^{-4c^2 x^2} dx.$$

$$E(Y) = \frac{1}{\ln 2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2c} - \frac{\sqrt{\pi}}{4c} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4c \ln 2}.$$

$$Y \text{ possède une espérance qui vaut : } \frac{\sqrt{\pi}}{4c \ln 2}.$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = E(X) - (E(Y))^2 = \frac{3}{4c^2 \ln 4} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4c \ln 2} \right)^2 = \frac{3}{4c^2 \ln 4} - \frac{\pi}{16c^2 (\ln 2)^2}$$

$$Y \text{ possède une variance qui vaut : } \frac{3}{4c^2 \ln 4} - \frac{\pi}{16c^2 (\ln 2)^2} \text{ ou } \frac{6 \ln 2 - \pi}{16c^2 (\ln 2)^2}.$$

PROBLÈME 2

Partie I - Deux exemples

$$1. (R_\theta)^2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix}.$$

$$(R_\theta)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$(R_\theta)^2 = I_2.$$

La fonction cos prend une infinité de valeurs donc $\{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$ est un ensemble infini et tous ses éléments sont des racines carrées de I_2 . Ainsi :

I_2 admet une infinité de racines carrées.

$$2. \text{ Supposons qu'il existe une matrice } R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}.$$

Donc $a^2 + bc = c(a + d) = d^2 + bc = 0$ et $b(a + d) = 1$.

Nécessairement $a + d$ n'est pas nul. Ainsi $c = 0$. Alors $a^2 = d^2 = 0$. Donc $a = d = 0$, ce qui contredit $a + d \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'admet pas de racine carrée.}$$

Partie II - Racine carrées d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente

1. $\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}t^2 + \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!}t^3 + o(t^3)$ au voisinage de 0.

$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$ au voisinage de 0.

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3) \text{ au voisinage de 0.}$$

2. • **Version 1.** On calcule !

Posons $S = 1 + X - (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2$. Alors $S = 1 + X - \left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3\right)^2$.

$$S = 1 + X - \left(1 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{64}X^4 + \frac{1}{256}X^6 + X - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{8}X^3 - \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{16}X^4 - \frac{1}{64}X^5\right).$$

$$S = -\frac{1}{64}X^4 - \frac{1}{256}X^6 - \frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{64}X^5 = -\frac{5}{64}X^4 + \frac{1}{64}X^5 - \frac{1}{256}X^6 = X^4 \left(-\frac{5}{64} + \frac{1}{64}X - \frac{1}{256}X^2\right).$$

$$\text{Donc } 1 + X = \left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3\right)^2 + X^4 \left(-\frac{5}{64} + \frac{1}{64}X - \frac{1}{256}X^2\right).$$

$$Q = -\frac{5}{64} + \frac{1}{64}X - \frac{1}{256}X^2 \text{ est un élément de } \mathbb{R}[X] \text{ tel que : } 1 + X = \left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3\right)^2 + X^4 Q(X)$$

ou tel que $1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X)$.

• **Version 2.** Avec peu de calculs et surtout avec la possibilité de généraliser à l'ordre p ...

$$\text{Posons } P = a_0 + a_1 X + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3. \quad P = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3.$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3) = P(t) + o(t^3) \text{ au voisinage de 0.}$$

Alors il existe un réel α appartenant à $]0, 1[$ et une application ε de $] - \alpha, \alpha[$ dans \mathbb{R} tels que $\forall t \in] - \alpha, \alpha[$, $\sqrt{1+t} = P(t) + t^3 \varepsilon(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

$$\forall t \in] - \alpha, \alpha[, \quad 1 + t = (P(t))^2 + 2P(t)t^3 \varepsilon(t) + t^6 (\varepsilon(t))^2.$$

$$\forall t \in] - \alpha, \alpha[\setminus \{0\}, \quad \frac{1+t - (P(t))^2}{t^3} = 2P(t)\varepsilon(t) + t^3 (\varepsilon(t))^2.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t - (P(t))^2}{t^3} = 2 \times P(0) \times 0 + 0^3 \times 0^2 = 0.$$

$1 + X - P^2$ est un polynôme de degré au plus 6 (en fait de degré 6...). $1 + X - P^2 = \sum_{k=0}^6 b_k X^k$ où $(b_0, b_1, \dots, b_6) \in \mathbb{R}^6$.

Supposons qu'il existe un élément i_0 de $\llbracket 0, 3 \rrbracket$ tel que $b_{i_0} \neq 0$. Notons alors j le plus petit élément de $\{k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \mid b_k \neq 0\}$.

$1 + X - P^2 = \sum_{k=j}^6 b_k X^k$ et b_j n'est pas nul.

Alors $1 + t - P^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} b_j t^j$. Donc $\frac{1 + t - P^2(t)}{t^3} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} b_j t^{j-3}$.

Or $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + t - (P(t))^2}{t^3} = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} (b_j t^{3-j}) = 0$. Comme b_j n'est pas nul : $\lim_{t \rightarrow 0} t^{3-j} = 0$.

En particulier $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{3-j} = 0$. Or $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{3-j} = +\infty$ si $j < 3$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{3-j} = 1$ si $j = 3$. Une légère contradiction apparaît !!

Ainsi $\forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, $b_j = 0$. Donc $1 + X - P^2 = \sum_{j=4}^6 b_j X^j = X^4 \sum_{j=4}^6 b_j X^{j-4}$.

Ainsi $Q = \sum_{j=4}^6 b_j X^{j-4}$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X = P^2 + X^4 Q(X)$ donc tel que $1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X)$.

Il existe un élément Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X)$.

3. $I_n + N = (a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3)^2 + N^4 Q(N)$ et $N^4 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Donc $(a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3)^2 = I_n + N$.

Par conséquent $a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3$ ou $I_n + \frac{1}{2} N - \frac{1}{8} N^2 + \frac{1}{16} N^3$ est une racine carrée de $I_n + N$.

$I_n + \frac{1}{2} N - \frac{1}{8} N^2 + \frac{1}{16} N^3$ est une racine carrée de $I_n + N$.

Partie III - Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

1. a. Soit SEP (f, λ) un sous-espace propre de f et x un élément de ce sous-espace propre. $f(x) = \lambda x$.

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. Donc $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$. Donc $g(x)$ appartient à SEP (f, λ) .

Pour tout élément x de SEP (f, λ) , $g(x)$ appartient à SEP (f, λ) ; SEP (f, λ) est stable par g .

Chaque sous-espace propre de f est stable par g .

Remarque De même chaque sous-espace propre de g est stable par f .

b. Notons que f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n admettant n valeurs propres deux à deux distinctes et que n est la dimension de \mathbb{R}^n .

Alors non seulement f est diagonalisable mais ses sous espaces propres sont des droites vectorielles.

Soit x un vecteur propre de f et λ la valeur propre associée. x est un vecteur non nul de SEP (f, λ) et SEP (f, λ) est une droite vectorielle. Ainsi SEP $(f, \lambda) = \text{Vect}(x)$.

D'après ce qui précède $g(x)$ appartient à SEP (f, λ) donc à $\text{Vect}(x)$. Alors il existe un réel α tel que : $g(x) = \alpha x$. Comme x n'est pas nul, x est un vecteur propre de g .

Tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .

c. f est un endomorphisme de \mathbb{R}^n admettant n valeurs propres deux à deux distinctes et n est la dimension de \mathbb{R}^n . Ainsi :

f est diagonalisable.

Soit \mathcal{B} une base de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de f . \mathcal{B} est encore une base de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de g . Ainsi la matrice de g dans la base \mathcal{B} est diagonale.

La matrice de g dans une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de f est diagonale.

f est diagonalisable donc il existe au moins une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de f . La matrice de g dans cette base étant diagonale, nécessairement :

g est diagonalisable.

2. a. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes donc A est diagonalisable. Ainsi :

il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Remarque Si nous ne le redisons pas, dans la suite P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale et $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

b. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

$D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. $\text{Sp } A = \text{Sp } D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Comme les valeurs propres de A sont des réels (strictement) positifs : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i \geq 0$.

Posons $\Delta_0 = \text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$ et $R_0 = P\Delta_0P^{-1}$.

Notons que $A = PDP^{-1}$. De plus :

$$\Delta_0^2 = (\text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n}))^2 = \text{Diag}\left((\sqrt{d_1})^2, (\sqrt{d_2})^2, \dots, (\sqrt{d_n})^2\right) = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = D.$$

Alors $R_0^2 = (P\Delta_0P^{-1})^2 = P\Delta_0^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$. R_0 est une racine carrée de A .

Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Si $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ alors $P\text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})P^{-1}$ est une racine carrée de A .

c. $AR = R^2R = R^3 = RR^2 = RA$.

Si R est une racine carrée de A : $AR = RA$.

Soit \mathcal{B}_0 la base canonique de \mathbb{R}^n . Notons f et g les endomorphismes de \mathbb{R}^n de matrices A et R dans la base \mathcal{B}_0 . f a n valeurs propres deux à deux distinctes car c'est le cas pour A par hypothèse. De plus $f \circ g = g \circ f$ car $AR = RA$.

P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^n et une seule telle que P soit la matrice de passage de \mathcal{B}_0 à \mathcal{B} .

Remarque Si $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et si $P = (p_{i,j})$, $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ avec, pour tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i$.

$D = P^{-1}AP$ est alors la matrice de f dans la base \mathcal{B} . Comme D est diagonale, \mathcal{B} est une base de \mathbb{R}^n constituée de vecteurs propres de f . **1.c** permet alors de dire que la matrice de g dans la base \mathcal{B} est diagonale.

Or la matrice de g dans la base \mathcal{B} est $P^{-1}RP$. Ainsi $P^{-1}RP$ est diagonale.

Si R est une racine carrée de A et si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale alors $P^{-1}RP$ est diagonale.

d. P est toujours une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Notons que $\text{Sp } A = \text{Sp } D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Par hypothèse les valeurs propres de A sont strictement positives. Par conséquent les réels d_1, d_2, \dots, d_n sont strictement positifs.

Ce qui précède montre que si R est une racine carrée de A alors il existe une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}RP = \Delta$ ou $R = P\Delta P^{-1}$.

Ainsi les racines carrées de A sont du type $P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est donc légitime de rechercher les racines carrées de A sous la forme $P\Delta P^{-1}$ où Δ est une matrice diagonale.

Soit alors une matrice diagonale $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $R = P\Delta P^{-1}$.

$$R^2 = A \iff (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta P^{-1} \iff P\Delta^2 P^{-1} = P\Delta P^{-1} \iff \Delta^2 = D.$$

Notons que la dernière équivalence est justifiée par le fait que P est inversible.

$$R^2 = A \iff (\text{Diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n))^2 = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \iff \text{Diag}(\delta_1^2, \delta_2^2, \dots, \delta_n^2) = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n).$$

$$R^2 = A \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_i^2 = d_i \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, \delta_i = \varepsilon_i \sqrt{d_i}.$$

Ainsi l'ensemble des racines carrées de A est l'ensemble

$$\mathcal{R} = \left\{ P \text{Diag} \left(\varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{d_n} \right) P^{-1}; (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \right\}.$$

Comme $\{-1, 1\}^n$ a 2^n éléments il semble assez clair que \mathcal{R} a également 2^n éléments.

Démontrons le (cela ne s'impose pas le jour du concours!!) en prouvant que $\{-1, 1\}^n$ et \mathcal{R} sont équipotents c'est à dire qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre.

$$\text{Posons } \forall (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = P \text{Diag} \left(\varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{d_n} \right) P^{-1}.$$

Le résultat obtenu plus haut indique clairement que ψ est une application surjective de $\{-1, 1\}^n$ dans \mathcal{R} .

Montrons qu'elle est injective. Soient $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ et $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ deux éléments de $\{-1, 1\}^n$ tels que $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \psi(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$.

$$P \text{Diag} \left(\varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{d_n} \right) P^{-1} = P \text{Diag} \left(\varepsilon'_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon'_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon'_n \sqrt{d_n} \right) P^{-1}.$$

En multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1} il vient :

$$\text{Diag} \left(\varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{d_n} \right) = \text{Diag} \left(\varepsilon'_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon'_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon'_n \sqrt{d_n} \right).$$

Alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varepsilon_i \sqrt{d_i} = \varepsilon'_i \sqrt{d_i}$. Or $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sqrt{d_i} \neq 0$. Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varepsilon_i = \varepsilon'_i$.

Donc $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$. Ceci achève de montrer l'injectivité de ψ .

ψ est donc bijective et ainsi le cardinal de \mathcal{R} est celui de $\{-1, 1\}^n$ c'est à dire 2^n .

A possède exactement 2^n racines carrées.

Partie IV - Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans la suite $\|\cdot\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit λ une valeur propre de S . Soit X un vecteur propre associé.

Comme S est positive : ${}^tX S X \geq 0$. Alors $0 \leq {}^tX S X = {}^tX(\lambda X) = \lambda {}^tX X = \lambda \|X\|^2$.

Donc $0 \leq \lambda \|X\|^2$ et $\|X\|^2 > 0$ car X n'est pas nul. Par conséquent : $\lambda \geq 0$.

Toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

2. S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après le cours :

il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1} S P$ soit diagonale.

3. Posons $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$. $\text{Sp } A = \text{Sp } D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$.

Comme les valeurs propres de S sont positives ou nulles, les réels d_1, d_2, \dots, d_n sont positifs ou nuls.

Posons $\Delta_0 = \text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$ et $R_0 = P \Delta_0 P^{-1}$.

Notons que $S = P D P^{-1}$. De plus :

$$\Delta_0^2 = (\text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n}))^2 = \text{Diag}((\sqrt{d_1})^2, (\sqrt{d_2})^2, \dots, (\sqrt{d_n})^2) = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = D.$$

Alors $R_0^2 = (P \Delta_0 P^{-1})^2 = P \Delta_0^2 P^{-1} = P D P^{-1} = S$. R_0 est une racine carrée de S .

Montrons alors que R_0 est symétrique et positive. Rappelons que P est orthogonale ; ainsi $P^{-1} = {}^t P$. Notons également que Δ_0 est symétrique car elle diagonale.

$${}^t R_0 = {}^t (P \Delta_0 P^{-1}) = {}^t (P \Delta_0 {}^t P) = {}^t ({}^t P) {}^t \Delta_0 {}^t P = P {}^t \Delta_0 {}^t P = P \Delta_0 {}^t P = P \Delta_0 P^{-1} = R_0 ; R_0 \text{ est symétrique.}$$

Soit X un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = P^{-1} X$.

Il existe un élément (y_1, y_2, \dots, y_n) de \mathbb{R}^n tel que $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. De plus $Y = {}^t P X$.

$$\text{Alors } {}^t X R_0 X = {}^t X P \Delta_0 P^{-1} X = {}^t X P \Delta_0 {}^t P X = {}^t ({}^t P X) \Delta_0 {}^t P X = {}^t Y \Delta_0 Y.$$

$${}^t X R_0 X = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} y_1 \\ \sqrt{d_2} y_2 \\ \vdots \\ \sqrt{d_n} y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (y_i \sqrt{d_i} y_i).$$

Alors ${}^t X R_0 X = \sum_{i=1}^n \sqrt{d_i} y_i^2$ donc ${}^t X R_0 X$ est positif ou nul. Ceci achève de montrer que R_0 est positive.

Donc R_0 est une racine carrée symétrique et positive de S .

Soit P une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1} S P$ soit une matrice diagonale.

Si $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ alors $P \text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n}) P^{-1}$ est une racine carrée symétrique et positive de S .

4. a. Soit λ une valeur propre de R . Soit X un élément de $\text{SEP}(R, \lambda)$.

$$S X = R^2 X = R(R X) = R(\lambda X) = \lambda R X = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X ; S X = \lambda^2 X.$$

Ainsi $\text{SEP}(R, \lambda) \subset \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid S X = \lambda^2 X\}$. Comme $\text{SEP}(R, \lambda)$ n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il en est de même pour $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid S X = \lambda^2 X\}$.

Alors λ^2 est une valeur propre de S et : $\text{SEP}(R, \lambda) \subset \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid S X = \lambda^2 X\} = \text{SEP}(S, \lambda^2)$.

Si λ est une valeur propre de R , λ^2 est une valeur propre de S et $\text{SEP}(R, \lambda) \subset \text{SEP}(S, \lambda^2)$.

b. Soit X un élément de $\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i)$.

Il existe un élément (X_1, X_2, \dots, X_p) de $\prod_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i)$ tel que $X = \sum_{i=1}^p X_i$.

Or $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{SEP}(R, \lambda_i) \subset \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$ donc $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $X_i \in \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$.

Alors $X = \sum_{i=1}^p X_i \in \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$. Finalement :

$$\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2).$$

c. $\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$ donc $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i) \right) \leq \dim \left(\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2) \right)$.

Ces sommes étant directes : $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP}(R, \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ sont LES valeurs propres de R et R est diagonalisable car R est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors : $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP}(R, \lambda_i) = n$.

$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2$ sont DES valeurs propres de S et la somme des dimensions des sous-espaces propres de S n'exède pas n (en fait elle vaut ici n , car S est diagonalisable !); ainsi $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2) \leq n$.

$$n = \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2) \leq n.$$

d. Dans ces conditions $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2) = n$. Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de S est inférieure ou égale à n , S ne peut pas avoir d'autres valeurs propres que $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2$.

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2 \text{ sont les seules valeurs propres de } S.$$

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{SEP} (R, \lambda_i) \subset \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$ donc $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\dim \text{SEP} (R, \lambda_i) \leq \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$.

Rappelons que $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) = n = \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$.

Supposons alors qu'il existe un élément i_0 de $\llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\dim \text{SEP} (R, \lambda_{i_0}) < \dim \text{SEP} (S, \lambda_{i_0}^2)$.

$$\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) = \sum_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket - \{i_0\}} \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) + \text{SEP} (R, \lambda_{i_0}).$$

$$\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) \leq \sum_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket - \{i_0\}} \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2) + \text{SEP} (R, \lambda_{i_0}).$$

$$\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) < \sum_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket - \{i_0\}} \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2) + \text{SEP} (S, \lambda_{i_0}^2).$$

Alors $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) < \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$. D'où une légère contradiction.

Ainsi $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\dim \text{SEP} (R, \lambda_i) = \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$. De plus $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{SEP} (R, \lambda_i) \subset \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$.

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ étant un espace vectoriel de dimension finie, on a alors :

$$\text{pour tout élément } i \text{ de } \llbracket 1, p \rrbracket, \text{SEP} (R, \lambda_i) = \text{SEP} (S, \lambda_i^2).$$

e. Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, notons C_i la $i^{\text{ème}}$ colonne de P . Comme P est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, (C_1, C_2, \dots, C_n) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notons que P est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base (C_1, C_2, \dots, C_n) .

De plus $P^{-1}SP$ est une matrice diagonale donc (C_1, C_2, \dots, C_n) est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de S .

$\text{Sp } R = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$, $\text{Sp } S = \{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2\}$ et $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{SEP} (R, \lambda_i) = \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$. Alors R et S ont les mêmes vecteurs propres.

Ainsi (C_1, C_2, \dots, C_n) est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de R .

Comme P est alors la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base (C_1, C_2, \dots, C_n) :

$$P^{-1}RP \text{ est une matrice diagonale.}$$

f. Supposons que R' soit une seconde racine carrée symétrique et positive de S .

D'après ce qui précède : $P^{-1}RP$ et $P^{-1}R'P$ sont deux matrices diagonales.

Posons $P^{-1}RP = \text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ et $P^{-1}R'P = \text{Diag}(r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$.

$$\text{Diag}(r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2) = (\text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_n))^2 = (P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}SP.$$

De même $\text{Diag}(r_1'^2, r_2'^2, \dots, r_n'^2) = P^{-1}S'P$. Ainsi $\text{Diag}(r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2) = \text{Diag}(r_1'^2, r_2'^2, \dots, r_n'^2)$.

Alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $r_i^2 = r_i'^2$.

R est une matrice symétrique positive. On montre alors comme dans **1.** que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

$$\text{Or : } \{r_1, r_2, \dots, r_n\} = \text{Sp Diag}(r_1, r_2, \dots, r_n) = \text{Sp}(P^{-1}RP) = \text{Sp } R.$$

Ainsi r_1, r_2, \dots, r_n sont des réels positifs ou nuls. On montre de même que r'_1, r'_2, \dots, r'_n sont des réels positifs ou nuls.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $r_i^2 = r_i'^2$ donne alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $r_i = r_i'$.

Dans ces conditions $\text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_n) = \text{Diag}(r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$ et ainsi $P^{-1}RP = P^{-1}R'P$.

En multipliant à droite par P^{-1} et à gauche par P il vient $R = R'$.

$$S \text{ admet une unique racine carrée symétrique positive.}$$

Remarque Résultat on ne peut plus classique mais obtenu de manière bien laborieuse...
