
EM LYON 2013

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

PROBLÈME 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale

1. Soit x un réel appartenant à $]0, +\infty[$.

- $t \rightarrow \frac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

- $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{x+t} \leq \frac{1}{x}$ et $e^{-t} \geq 0$ donc $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{1}{x} e^{-t}$.

- Le cours indique que $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge car $\Gamma : z \rightarrow \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ a pour domaine de définition

$]0, +\infty[$ donc est définie en 1. Alors $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} e^{-t}\right) dt$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ converge.

Pour tout réel x appartenant à $]0, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ converge.

2. Soit x un réel appartenant à $]0, +\infty[$.

- $\forall t \in [1, +\infty[$, $\frac{e^{-t}}{x+t} \geq 0$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \geq 0$ car $1 \leq +\infty$!

- $\forall t \in [0, 1]$, $e^{-t} \geq e^{-1}$ (car $t \rightarrow e^{-t}$ est décroissante sur $[0, 1]$) et $\frac{1}{x+t} \geq 0$.

Donc $\forall t \in [0, 1]$, $\frac{e^{-t}}{x+t} \geq \frac{e^{-1}}{x+t}$. Comme $0 \leq 1$: $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt$.

Ainsi $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t} dt = e^{-1} [\ln|x+t|]_0^1 = e^{-1} (\ln|x+1| - \ln|x|) = e^{-1} (\ln(x+1) - \ln x)$.

Par conséquent $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) \geq e^{-1} (\ln(x+1) - \ln x)$.

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln(x)) = +\infty$ et $e^{-1} > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-1} (\ln(x+1) - \ln x)) = +\infty$.

Les deux points précédents permettent alors de dire que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.}$$

3. Soit x un réel appartenant à $]0, +\infty[$.

Comme nous l'avons vu dans la première question $\forall t \in [0, +\infty[, 0 < \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{1}{x} e^{-t}$.

De plus $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et vaut $\Gamma(1)$ donc $(1-1)!$ ou encore 1.

Alors, comme $0 < +\infty$, $0 < \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x}$. Donc $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$.

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}.}$$

$\forall x \in]0, +\infty[, 0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Il vient alors par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.}$$

4. Comme nous l'avons déjà dit $\Gamma : z \rightarrow \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ a pour domaine de définition $]0, +\infty[$ donc est définie en 2. Par conséquent $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \text{ converge.}}$$

Soit x un réel appartenant à $]0, +\infty[$.

$$f(x) - \frac{1}{x} = f(x) - \frac{1}{x} \times 1 = f(x) - \frac{1}{x} \Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} \left[\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x} \right] \right) dt.$$

$$f(x) - \frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} \frac{x - (x+t)}{(x+t)x} \right) dt = \int_0^{+\infty} \frac{-t e^{-t}}{x(x+t)} dt. \text{ Donc } \frac{1}{x} - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t}}{x(x+t)} dt.$$

$\forall t \in [0, +\infty[, x+t \geq x$ et $x > 0$ donc $\forall t \in [0, +\infty[, x(x+t) \geq x^2 > 0$.

Alors $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{x(x+t)} \leq \frac{1}{x^2}$ et $t e^{-t} \geq 0$.

Ainsi $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{t e^{-t}}{x(x+t)} \leq \frac{1}{x^2} t e^{-t}$, $0 \leq +\infty$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge.

En intégrant on obtient alors : $0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t}}{x(x+t)} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$.

Donc $0 \leq \frac{1}{x} - f(x) \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$. Alors $\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} - f(x) \right| = \frac{1}{x} - f(x) \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$.

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt.}$$

► *Remarque* $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \Gamma(2) = (2-1)! = 1$. Donc $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{x^2}}$ ◀

$\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq |x f(x) - 1| = |x| \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{|x|}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \frac{1}{|x|} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt \right) = 0$, il vient par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = 1$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = 1$.

Alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}}$$

Partie II : Une autre expression intégrale de f

► *Remarque* Il convient quand même de noter que les arguments utilisés dans cette partie sont totalement inappropriés.

Le changement de variable $u = x + t$ donne en une ligne le résultat de la question 11. Qui permet, toujours en une ligne, de montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x)$.

Mais pourquoi faire simple lorsque l'on peut faire compliqué ?! ◀

A- Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme intégrale

5. Dans cette question x est un réel strictement positif et h un réel non nul strictement supérieur à $-\frac{x}{2}$.

a. $t \rightarrow \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$\forall t \in [0, +\infty[, x+t \geq x > 0$ donc $\forall t \in [0, +\infty[, (x+t) \geq x^2 > 0$.

Alors $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{1}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{x^2}$ et $e^{-t} \geq 0$.

Par conséquent $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{x^2} e^{-t}$.

Comme nous l'avons déjà vu $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge. Il en est alors de même de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} e^{-t} \right) dt$.

Les deux points précédents et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \text{ converge.}}$$

b. Soit t un réel de l'intervalle $[0, +\infty[$.

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| = \left| \frac{1}{h} \left(\frac{x+t - (x+h+t)}{(x+h+t)(x+t)} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right|.$$

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| = \left| \frac{1}{h} \frac{(-h)}{(x+h+t)(x+t)} + \frac{1}{(x+t)^2} \right|.$$

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| = \left| \frac{1}{(x+t)^2} - \frac{1}{(x+h+t)(x+t)} \right| = \left| \frac{x+h+t - (x+t)}{(x+h+t)(x+t)^2} \right|.$$

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| = \frac{|h|}{|(x+h+t)(x+t)^2|}.$$

$x+h+t \geq x+h \geq x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0$ car $h > -\frac{x}{2}$ et $(x+t)^2 \geq x^2 > 0$ (comme nous l'avons déjà vu).

Donc $(x+h+t)(x+t)^2 \geq \frac{x}{2}x^2 > 0$. Alors $|(x+h+t)(x+t)^2| = (x+h+t)(x+t)^2 \geq \frac{x^3}{2} > 0$.

Par conséquent $\frac{1}{|(x+h+t)(x+t)^2|} \leq \frac{2}{x^3}$.

Comme $|h| \geq 0$: $\left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| = \frac{|h|}{|(x+h+t)(x+t)^2|} \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[, \left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.}$$

c. Posons $\Delta(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ et montrons que $|\Delta(h)| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

► *Remarque* Notons que $\Delta(h)$ a un sens car $x > 0$, $x+h > 0$ (puisque $h > -\frac{x}{2}$ et $x > 0$) et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ converge. ◀

$$\Delta(h) = \frac{1}{h} \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+h+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \right) + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

$$\Delta(h) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right] e^{-t} dt.$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, \left| \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right] e^{-t} \right| = \left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| e^{-t}.$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \left| \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right] e^{-t} \right| \leq \frac{2|h|}{x^3} e^{-t}.$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty} \frac{2|h|}{x^3} e^{-t} dt$ converge également et vaut $\frac{2|h|}{x^3}$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives permettent alors de dire

que $\int_0^{+\infty} \left| \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right] e^{-t} \right| dt$ converge et est majorée par $\int_0^{+\infty} \frac{2|h|}{x^3} e^{-t} dt$.

Ainsi $\int_0^{+\infty} \left(\left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right] e^{-t} \right) dt$ est absolument convergente (donc convergente).

On peut alors majorer $\left| \int_0^{+\infty} \left(\left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right] e^{-t} \right) dt \right|$ par

$$\int_0^{+\infty} \left| \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right] e^{-t} \right| dt.$$

$$\text{Donc } |\Delta(h)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right] e^{-t} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{2|h|}{x^3} e^{-t} dt = \frac{2|h|}{x^3}.$$

Finalement :

$$\boxed{\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.}$$

6. Soit x un réel strictement positif.

$$\forall h \in]-\frac{x}{2}, 0[\cup]0, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

$$\forall h \in]-\frac{x}{2}, 0[\cup]0, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \left(- \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right) \right| \leq \frac{2|h|}{x^3} \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2|h|}{x^3} = 0.$$

$$\text{Alors par encadrement il vient : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

$$\text{Ainsi } f \text{ est dérivable en } x \text{ et } f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.}$$

► *Remarque* Il est aisé de montrer que f' est strictement négative sur $]0, +\infty[$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Ce que l'on peut aussi obtenir en une ligne en utilisant la définition de la stricte décroissance. ◀

7. Soit x un réel strictement positif. Soit $(\varepsilon, A) \in]0, 1] \times [1, +\infty[$.

$$\text{Posons } \forall t \in [0, +\infty[, u_x(t) = -\frac{1}{x+t} \text{ et } v(t) = e^{-t}. u_x \text{ et } v \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[.$$

$$\text{De plus } \forall t \in [0, +\infty[, u'_x(t) = \frac{1}{(x+t)^2} \text{ et } v'(t) = -e^{-t}.$$

Ceci autorise l'intégration par parties suivante.

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = \left[-\frac{1}{x+t} \times e^{-t} \right]_{\varepsilon}^A - \int_{\varepsilon}^A \left(-\frac{1}{x+t} \right) (-e^{-t}) dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \forall (\varepsilon, A) \in]0, 1] \times [1, +\infty[, \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.}$$

► *Remarque* Le ε n'était pas franchement utile ici...

On pouvait directement obtenir $\forall x \in]0, +\infty[, \forall A \in [0, +\infty[\int_0^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt \blacktriangleleft$

8. Soit x un réel strictement positif.

- $\forall (\varepsilon, A) \in]0, 1] \times [1, +\infty[, \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt \quad (\star).$
- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ converge et vaut $-f'(x)$.
- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$ converge et vaut $f(x)$.
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} = \frac{1}{x}$.
- $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{e^{-A}}{x+A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(e^{-A} \frac{1}{x+A} \right) = 0 \times 0 = 0$.

En faisant tendre successivement ε vers 0 par valeurs supérieures et A vers $+\infty$ dans (\star) on obtient :

$$-f'(x) = \frac{1}{x} - f(x). \text{ Donc } f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).$$

9. $x \rightarrow -\frac{1}{x}$ et f sont dérivables sur $]0, +\infty[$ donc $x \rightarrow -\frac{1}{x} + f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Ainsi f' est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Alors f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) + f'(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x)$.

f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc est continue sur $]0, +\infty[$. Comme $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, par somme f'' est continue sur $]0, +\infty[$. Finalement :

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).$$

B- Intervention d'une fonction auxiliaire g

10. $x \rightarrow e^{-x}$ et f sont dérivables sur $]0, +\infty[$ donc, par produit, g est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)) = e^{-x} \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

$$g \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

11. Soit x un réel appartenant à $]0, +\infty[$. $u \rightarrow \frac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $[x, +\infty[$.

$$\forall A \in [x, +\infty[, \int_x^A \frac{e^{-u}}{u} du = \int_x^A (-g'(u)) du = [-g(u)]_x^A = g(x) - g(A).$$

Or $\lim_{A \rightarrow +\infty} g(A) = \lim_{A \rightarrow +\infty} (e^{-A} f(A)) = 0 \times 0 = 0$.

Donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_x^A \frac{e^{-u}}{u} du = \lim_{A \rightarrow +\infty} (g(x) - g(A)) = g(x) - 0 = g(x)$.

Par conséquent $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge et vaut $g(x)$.

$$\text{Pour tout élément } x \text{ de }]0, +\infty[, \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \text{ converge et } g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

$\forall x \in]0, +\infty[, g(x) = e^{-x} f(x)$ donc $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = e^x g(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du .$$

12. Nous avons vu dans la question **4** que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Donc $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = g(x) = e^{-x} f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} \frac{1}{x} = \frac{e^{-x}}{x}$.

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x} .$$

13. D'après la question précédente $n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \frac{e^{-n}}{n} = n e^{-n} = \frac{1}{e} n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$.

- $n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{e} n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{e} n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \geq 0$.

- La série de terme général $n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ converge car $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ (série géométrique dérivée) donc la série de terme général $\frac{1}{e} n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ converge également.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général

$n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge.

$$\text{La série } \sum_{n \geq 1} \left(n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \right) \text{ converge.}$$

Partie III : Étude d'une densité

14. • Nous avons vu dans la question **3.** que $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) > 0$. Donc $f(1) > 0$.

Alors pour tout élément t de $[0, +\infty[, f(1)(1+t) > 0$ et $e^{-t} > 0$.

Donc pour tout élément t de $[0, +\infty[$, $\frac{e^{-t}}{f(1)(1+t)}$ est un réel strictement positif.

Ainsi h est définie et strictement positive sur $[0, +\infty[$. De plus h est nulle sur $] -\infty, 0[$.

Alors h est définie sur \mathbb{R} et $\forall t \in \mathbb{R}$, $h(t) \geq 0$.

- $t \rightarrow e^{-t}$ et $t \rightarrow \frac{1}{1+t}$ sont continues sur $[0, +\infty[$, donc $t \rightarrow \frac{1}{f(1)} \frac{e^{-t}}{1+t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

Alors h est continue sur $[0, +\infty[$.

Comme h est nulle sur $] -\infty, 0[$, h est continue sur $] -\infty, 0[$.

Par conséquent h est au moins continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$ donc sur \mathbb{R} privé d'un ensemble fini de points.

- $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt$ converge et vaut $f(1)$ Alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(1)} \frac{e^{-t}}{1+t} dt$ converge et vaut $\frac{1}{f(1)} f(1)$ donc 1.

Par conséquent $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge et vaut 1.

Comme h est nulle sur $] -\infty, 0[$, $\int_{-\infty}^0 h(t) dt$ converge et vaut 0.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$ converge et vaut 1. Ceci achève de montrer que :

h est une densité de probabilité.

15. $t \rightarrow th(t)$ est nulle sur $] -\infty, 0[$ donc $\int_{-\infty}^0 th(t) dt$ converge et vaut 0.

$$\forall t \in [0, +\infty[, th(t) = \frac{1}{f(1)} \frac{te^{-t}}{1+t} = \frac{1}{f(1)} \frac{(1+t-1)e^{-t}}{1+t} = \frac{1}{f(1)} e^{-t} - \frac{1}{f(1)} \frac{e^{-t}}{1+t} = \frac{1}{f(1)} e^{-t} - h(t).$$

$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et vaut $\Gamma(1)$ donc 1 et $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge et vaut 1.

Alors $\int_0^{+\infty} th(t) dt$ converge comme combinaison linéaire de deux intégrales convergentes.

$$\text{De plus } \int_0^{+\infty} th(t) dt = \frac{1}{f(1)} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} h(t) dt = \frac{1}{f(1)} \times 1 - 1 = \frac{1}{f(1)} - 1.$$

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} th(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{f(1)} - 1$. Par conséquent :

X possède une espérance qui vaut $\frac{1}{f(1)} - 1$.

PROBLÈME 2

Dans ce qui suit (E_1, E_2, \dots, E_n) est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Rappelons alors que si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j(M) = ME_j$.

Dans les parties I, II, III, IV $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...

Partie I : Un exemple

1. $\forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $C_j(A_0) = A_0 E_j = U_0 {}^t V_0 E_j = {}^t V_0 E_j U_0$ (car ${}^t V_0 E_j$ est assimilable à un réel).

$\forall j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, $C_j(A_0) = A_0 E_j = \langle V_0, E_j \rangle U_0$.

$\langle V_0, E_1 \rangle = 1$, $\langle V_0, E_2 \rangle = -1$, $\langle V_0, E_3 \rangle = 2$ et $\langle V_0, E_4 \rangle = -1$.

Ainsi $C_1(A_0) = A_0 E_1 = U_0$, $C_2(A_0) = A_0 E_2 = -U_0$, $C_3(A_0) = A_0 E_3 = 2U_0$ et $C_4(A_0) = A_0 E_4 = -U_0$.

Alors $\text{Vect}(C_1(A_0), C_2(A_0), C_3(A_0), C_4(A_0)) = \text{Vect}(U_0, -U_0, 2U_0, -U_0) = \text{Vect}(U_0)$.

Donc $\text{rg } A_0 = \dim \text{Vect}(C_1(A_0), C_2(A_0), C_3(A_0), C_4(A_0)) = \dim \text{Vect}(U_0) = 1$ (car U_0 n'est pas nul).

Par conséquent $\text{rg } A_0 < 4$. Alors la matrice A_0 n'est pas inversible et 0 est valeur propre de A_0 .

0 est valeur propre de A_0 .

Remarque $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

$\dim \text{SEP}(A_0, 0) = 4 - \text{rg } A_0 = 3$. De plus $A(E_1 + E_2) = AE_1 + AE_2 = U_0 - U_0 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$, $A(E_1 + E_4) = AE_1 + AE_4 = U_0 - U_0 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ et $A(2E_1 - E_3) = 2AE_1 - AE_3 = 2U_0 - 2U_0 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\mathcal{B}_1 = (E_1 + E_2, E_1 + E_4, 2E_1 - E_3)$ est une famille de trois éléments de $\text{SEP}(A_0, 0)$. Montrons que \mathcal{B}_1 est une base de $\text{SEP}(A_0, 0)$.

Comme $\text{SEP}(A_0, 0)$ est de dimension 3 il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha(E_1 + E_2) + \beta(E_1 + E_4) + \gamma(2E_1 - E_3) = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$.

$(\alpha + \beta + 2\gamma)E_1 + \alpha E_2 - \gamma E_3 + \beta E_4 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ et (E_1, E_2, E_3, E_4) est libre donc $\alpha + \beta + 2\gamma = \alpha = -\gamma = \beta = 0$.

$\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ceci achève de montrer que \mathcal{B}_1 est famille libre.

\mathcal{B}_1 est une famille libre de SEP $(A_0, 0)$, dont le cardinal coïncide avec la dimension de SEP $(A_0, 0)$. C'est donc une base de SEP $(A_0, 0)$.

$\mathcal{B}_1 = (E_1 + E_2, E_1 + E_4, 2E_1 - E_3)$ ou $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base du sous-espace propre de A_0 associé à la valeur propre 0.

2. a. $A_0 U_0 = U_0 {}^t V_0 U_0 = {}^t V_0 U_0 U_0 = \langle V_0, U_0 \rangle U_0 = (1 - 2 + 6 - 4) U_0 = U_0$

$A_0 U_0 = U_0.$

b. $A_0 U_0 = U_0$ et $U_0 \neq 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc 1 est une valeur propre de A_0 et U_0 un vecteur propre associé. Notons que $\dim \text{SEP}(A_0, 1) \geq 1!$

Alors $4 \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp } A_0} \dim \text{SEP}(A_0, \lambda) \geq \dim \text{SEP}(A_0, 0) + \dim \text{SEP}(A_0, 1) = 3 + \dim \text{SEP}(A_0, 1) \geq 3 + 1 = 4.$

Donc $4 = \sum_{\lambda \in \text{Sp } A_0} \dim \text{SEP}(A_0, \lambda) = \dim \text{SEP}(A_0, 0) + \dim \text{SEP}(A_0, 1) = 3 + \dim \text{SEP}(A_0, 1).$

Ceci montre que :

1. 0 et 1 sont les seules valeurs propres de A_0 .
2. $\dim \text{SEP}(A_0, 1) = 1$. Ainsi $\mathcal{B}_2 = (U_0)$ est une base de SEP $(A_0, 1)$.
3. A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

c. $\mathcal{B}_1 = (E_1 + E_2, E_1 + E_4, 2E_1 - E_3)$ est une base de SEP $(A_0, 0)$, $\mathcal{B}_2 = (U_0)$ est une base de SEP $(A_0, 1)$ et $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = \text{SEP}(A_0, 0) \oplus \text{SEP}(A_0, 1)$.

Alors $\mathcal{B} = \text{"}\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2\text{"} = (E_1 + E_2, E_1 + E_4, 2E_1 - E_3, U_0)$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_0 respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, 0 et 1.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base \mathcal{B} .

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

2. P est inversible car c'est une matrice de passage.

3. $P^{-1} A_0 P$ est la matrice diagonale $D = \text{Diag}(0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$ $D = P A_0 P^{-1}.$

$$D = \text{Diag}(0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est une matrice diagonale de } \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est une matrice inversible de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Exercice Montrer que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -8 & 5 \\ 3 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

3. Soit λ un réel. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\lambda A + B = (\lambda a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \text{ donc } \text{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,i} + b_{i,i}) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \text{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$. Ainsi :

Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} . Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Posons $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = AB$ et $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = BA$.

$$\text{Tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^n d_{k,k} = \text{Tr}(D).$$

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

5. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons ${}^tA = (a'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et ${}^tAA = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a'_{i,j} = a_{j,i} \text{ et } h_{i,j} = \sum_{k=1}^n a'_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}.$$

$$\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n h_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$.

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. a. U est V sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors U est une matrice ayant n lignes et une colonne à coefficients réels, et tV est une matrice ayant une ligne et n colonnes à coefficients réels.

Alors le produit U^tV a un sens et est une matrice ayant n lignes et n colonnes à coefficients réels. Ainsi :

$$U^tV \text{ appartient à } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Posons $U^tV = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Soit (i,j) un couple d'éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$\alpha_{i,j}$ est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U qui est la matrice (u_i) de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de tV qui est la matrice (v_j) de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc $\alpha_{i,j} = u_i v_j$.

$$U^tV = (u_i v_j)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

$$\text{b. } \text{Tr}(U^tV) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i} = \sum_{i=1}^n (u_i v_i).$$

$$\text{Tr}({}^tU^tV) = \sum_{i=1}^n (u_i v_i).$$

$$\text{c. } \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j(U^tV) = U^tV E_j = ({}^tV E_j) U = \langle V, E_j \rangle U = v_j U.$$

Alors $\text{Vect}(C_1(U^tV), C_2(U^tV), \dots, C_n(U^tV)) = \text{Vect}(v_1 U, v_2 U, \dots, v_n U) \subset \text{Vect}(U)$.

V n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc il existe un élément j_0 de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v_{j_0} \neq 0$.

Alors $C_{j_0}(U^tV) = v_{j_0} U$ donne $U = \frac{1}{v_{j_0}} C_{j_0}(U^tV)$ donc $U \in \text{Vect}(C_1(U^tV), C_2(U^tV), \dots, C_n(U^tV))$.

Ainsi $\text{Vect}(U) \subset \text{Vect}(C_1(U^tV), C_2(U^tV), \dots, C_n(U^tV))$.

Finalement $\text{Vect}(C_1(U^tV), C_2(U^tV), \dots, C_n(U^tV)) = \text{Vect}(U)$.

Alors $\text{rg}(U^tV) = \dim \text{Vect}(C_1(U^tV), C_2(U^tV), \dots, C_n(U^tV)) = \dim \text{Vect}(U) = 1$ car $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$$\text{Le rang de } U^tV \text{ est } 1.$$

$$\text{7. a. } \text{rg } A = 1 \text{ donc } \dim \text{Vect}(C_1(U^tV), C_2(U^tV), \dots, C_n(U^tV)) = 1.$$

Nécessairement il existe un élément j_0 de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C_{j_0}(A) \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi $(C_{j_0}(A))$ est une base de la droite vectorielle $\text{Vect}(C_1(U^tV), C_2(U^tV), \dots, C_n(U^tV))$.

Alors pour tout élément j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un réel α_j tel que $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.

Il existe un élément j_0 de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que, pour tout élément j de $\llbracket 1, n \rrbracket$, il existe un réel α_j vérifiant :
 $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.

b. Posons $U = C_{j_0}(A)$ et considérons la matrice V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ égale à $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ou à $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Si $U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ou si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 : \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; alors $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\text{rg } A = 0!!$

Par conséquent $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $V \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j(U^t V) = U^t V E_j = \langle V, E_j \rangle U = \alpha_j U = \alpha_j C_{j_0}(A) = C_j(A)$.

$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, C_j(U^t V) = C_j(A)$ donc $U^t V = A$.

Il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$.

8. Les résultats des deux questions précédentes montrent que :

une matrice A de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices non nulles U et V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U^t V$.

Partie IV : Une application en probabilités

9. $U_X = (P(X = i))_{1 \leq i \leq n}$ et $U_Y = (P(Y = i))_{1 \leq i \leq n}$.

Alors d'après **Q6 a**, $U_X^t U_Y = (P(X = i) P(Y = j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Or X et Y sont indépendantes donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, P(X = i) P(Y = j) = P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = m_{i,j}$.

Donc :

$$U_X^t U_Y = M.$$

$\sum_{i=1}^n P(X = i) = 1$ et $\sum_{j=1}^n P(Y = j) = 1$ donc il existe deux éléments i_1 et j_1 de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $P(X = i_1) \neq 0$ et $P(Y = j_1) \neq 0$.

Alors U_X et U_Y sont des matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $M = U_X^t U_Y$. **Q6** montre que :

M est de rang 1.

10. a. Posons $C_1(M) + C_2(M) + \dots + C_n(M) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\gamma_i = m_{i,1} + m_{i,2} + \dots + m_{i,n} = \sum_{j=1}^n P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = P(X = i)$ car $(\{Y = j\})_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements. Alors

$$\boxed{C_1(M) + C_2(M) + \dots + C_n(M) = U_X.}$$

b. M est une matrice de rang 1 donc $\text{Vect}(C_1(M), C_2(M), \dots, C_n(M))$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension 1 qui contient $C_1(M) + C_2(M) + \dots + C_n(M)$ donc U_X .

Comme nous l'avons vu plus haut U_X n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc (U_X) est une base de $\text{Vect}(C_1(M), C_2(M), \dots, C_n(M))$. Alors :

$$\boxed{\text{pour tout élément } j \text{ de } \llbracket 1, n \rrbracket, \text{ il existe un réel } \beta_j \text{ tel que } C_j(M) = \beta_j U_X.}$$

c. $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j(M) = \beta_j U_X$. Donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = m_{i,j} = \beta_j P(X = i)$.

Or $(\{X = i\})_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(Y = j) = \sum_{i=1}^n P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = \sum_{i=1}^n (\beta_j P(X = i)) = \beta_j \sum_{i=1}^n P(X = i) = \beta_j \times 1 = \beta_j.$$

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(Y = j) = \beta_j.}$$

d. Nous avons vu plus haut que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = m_{i,j} = \beta_j P(X = i)$.

Alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = P(Y = j) P(X = i) = P(X = i) P(Y = j)$. Ainsi :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

Finalement :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes si et seulement si la matrice } (P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}))_{1 \leq i, j \leq n} \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de rang 1.}$$

Partie V : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisable

11. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\text{rg } A = 1 < n$ (car $n \geq 2$). Donc A n'est pas inversible et ainsi :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A.}$$

$\dim \text{SEP}(A, 0) = n - \text{rg}(A - 0 \cdot I_n) = n - \text{rg } A = n - 1$.

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre } 0 \text{ est de dimension } n - 1.}$$

12. Posons $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Comme nous l'avons déjà vu : $A = U^t V = (u_i v_j)_{1 \leq i, j \leq n}$. Donc $a = \text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n (u_i v_i)$.

De plus ${}^t UV = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Mieux ${}^t UV = (c)$ avec $c = \sum_{i=1}^n (u_i v_i)$.

Alors ${}^t UV = (a)$.

$$\boxed{{}^t UV = (a) \text{ avec } a = \text{Tr}(A).}$$

$A^2 = (U^t V)(U^t V) = U({}^t V U){}^t V = ({}^t V U) U^t V$ car ${}^t V U$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ assimilable à un réel.

Donc $A^2 = (a) A = a A$.

$$\boxed{A^2 = a A.}$$

13. Supposons que a est nul. Alors $A^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. X^2 est alors un polynôme annulateur de A dont la seule racine est 0. Ainsi $\text{Sp } A \subset \{0\}$. Comme 0 est valeur propre de A , $\text{Sp } A = \{0\}$.

Mais le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 est de dimension $n - 1$ donc A n'est pas diagonalisable puisque $\sum_{\lambda \in \text{Sp } A} \dim \text{SEP}(A, \lambda) \neq n$.

$$\boxed{\text{Si } a = 0, A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

14. $AU = (U^t V)U = U({}^t V U) = ({}^t V U)U = aU$.

$$\boxed{AU = aU.}$$

$U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $AU = aU$ donc a est valeur propre de A . Ainsi $\{0, a\} \subset \text{Sp } A$.

$A^2 = aA$ donc $X^2 - aX$ est un polynôme annulateur de A dont les racines sont 0 et a . Par conséquent $\text{Sp } A \subset \{0, a\}$.

Finalement $\text{Sp } A = \{0, a\}$ et $a \neq 0$.

Rappelons que la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est inférieure ou égale à n et que la dimension de $\text{SEP}(A, a)$ est supérieure ou égale à 1.

Alors $n \geq \dim \text{SEP}(A, 0) + \dim \text{SEP}(A, a) = n - 1 + \dim \text{SEP}(A, a) \geq n - 1 + 1 = n$.

Donc $n = \dim \text{SEP}(A, 0) + \dim \text{SEP}(A, a)$. A est diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si } a \text{ n'est pas nul, } A \text{ est diagonalisable.}}$$

15. Les deux questions précédentes permettent de dire que :

une matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.

Exercice A est une matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$).

Q1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si elle admet une valeur propre non nulle.

Q2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie VI : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

16. • $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} .

• Soit λ un réel et soit (M, N, P) un triplet d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\langle M, \lambda N + P \rangle = \text{Tr}({}^t M(\lambda N + P)) = \text{Tr}(\lambda {}^t M N + {}^t M P) = \lambda \text{Tr}({}^t M N) + \text{Tr}({}^t M P)$ car Tr est linéaire.

Donc $\langle M, \lambda N + P \rangle = \lambda \langle M, N \rangle + \langle M, P \rangle$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (M, N, P) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3$ $\langle M, \lambda N + P \rangle = \lambda \langle M, N \rangle + \langle M, P \rangle$.

• Soit (M, N) un couple d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

${}^t M N$ et sa transposée ont les mêmes éléments diagonaux donc ont même trace.

Alors $\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t M N) = \text{Tr}({}^t({}^t M N)) = \text{Tr}({}^t N {}^t({}^t M)) = \text{Tr}({}^t N M) = \langle N, M \rangle$.

$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\langle M, N \rangle = \langle N, M \rangle$.

• Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

D'après **Q5**, $\langle M, M \rangle = \text{Tr}({}^t M M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i}^2$ donc $\langle M, M \rangle \geq 0$.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, M \rangle \geq 0$.

• Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\langle M, M \rangle = 0$. Posons $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Alors $\langle M, M \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i}^2 = 0$ et $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{j,i}^2 \geq 0$. Donc $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{j,i}^2 = 0$.

Ainsi $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $m_{j,i} = 0$ et M est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, M \rangle = 0 \Rightarrow M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

17. Comme nous l'avons vu dans **Q8 a**, S est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus ${}^tS = {}^t(V^tV) = {}^t({}^tV)^tV = V^tV = S$ donc S est symétrique.

$$S^2 = (V^tV)(V^tV) = V({}^tVV)^tV. \text{ Or } {}^tVV = \sum_{j=1}^n v_j^2 = 1, \text{ donc } S^2 = V^tV = S.$$

S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S^2 = S$.

18. a. • Pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, SM est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi Φ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soit λ un réel et soit (M, N) un couple d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\Phi(\lambda M + N) = S(\lambda M + N) = \lambda SM + SN = \lambda \Phi(M) + \Phi(N).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, \Phi(\lambda M + N) = \lambda \Phi(M) + \Phi(N)$. Φ est linéaire.

Ainsi Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit (M, N) un couple d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\langle \Phi(M), N \rangle = \text{Tr}({}^t\Phi(M)N) = \text{Tr}({}^t(SM)N) = \text{Tr}({}^tM^tSN).$$

Or S est symétrique donc $\langle \Phi(M), N \rangle = \text{Tr}({}^tMSN) = \langle M, SN \rangle = \langle M, \Phi(N) \rangle$.

$\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R})), \langle \Phi(M), N \rangle = \langle M, \Phi(N) \rangle$. Φ est symétrique.

Φ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \Phi^2(M) = \Phi(\Phi(M)) = \Phi(SM) = S(SM) = S^2M = SM = \Phi(M)$. Ainsi :

$$\Phi^2 = \Phi.$$

Remarque Notons que Φ est une projection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Mieux c'est la projection sur $\text{Ker}(\Phi - e)$ ou sur $\text{Im } \Phi$ parallèlement à $\text{Ker } \Phi$.

$X^2 - X$ est un polynôme annulateur de Φ dont les racines sont 0 et 1, donc :

les valeurs propres de Φ sont contenues dans $\{0, 1\}$.

• $\sum_{j=1}^n v_j^2 = 1$ donc V n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors $S = V^tV$ est une matrice de rang 1 d'après **Q8**. Ainsi S n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi(S) = SS = S^2 = S$.

Alors 1 est valeur propre de Φ et S est un vecteur propre associé.

• Soit D la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendrée par V . $\dim D^\perp = n - \dim D = n - 1 > 0$.

Donc D^\perp contient une matrice U différente de $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Posons $M_0 = U^t U$. Toujours d'après **Q6**, M_0 est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 donc M_0 est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\Phi(M_0) = S M_0 = V^t V U^t U$. Or ${}^t V U = \langle V, U \rangle = 0$ donc $\Phi(M_0) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $M_0 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors 0 est valeur propre de Φ et M_0 est un vecteur propre associé.

Les valeurs propres de Φ sont 0 et 1.

16. Φ est une projection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\text{Ker } \Phi$ et $\text{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Φ est symétrique donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Or $\text{Ker } \Phi = \text{SEP}(\Phi, 0)$ et $\text{Ker}(\Phi - e) = \text{SEP}(\Phi, 1)$. Ainsi $\text{Ker } \Phi$ et $\text{Ker}(\Phi - e)$ sont orthogonaux.

Les sous-espaces vectoriels $\text{Ker } \Phi$ et $\text{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires et orthogonaux.