EMLYON 2015 S

Éléments de correction

Premier problème

Première partie

1. On peut vérifier le critère de sous-espace vectoriel ($0 \in E$ et, pour $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda P_1 + P_2)(0) = \lambda P_1(0) + P_2(0) = 0$ et de même $(\lambda P_1 + P_2)(4) = 0$ si bien que $\lambda P_1 + P_2 \in E$) ou identifier E comme noyau de l'application $\mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2, P \longmapsto \big(P(0), P(4)\big)$, clairement linéaire.

2. Pour qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$ donné appartienne à E, il faut et il suffit que 0 et 4 en soient racines, c'est-à-dire que P soit multiple du polynôme $W = X(X-4)$: il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = WQ$ i.e. $P = \phi(Q)$, nécessairement unique (par unicité du quotient dans la division euclidienne de P par W) et vérifiant $\deg Q = \deg P - \deg W \leqslant 2$. L'équivalence précédente prouve d'une part que l'application ϕ est à valeurs dans E et d'autre part qu'elle est bijective. Sa linéarité étant immédiate (pour $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\phi(\lambda Q_1 + Q_2) = W(\lambda Q_1 + Q_2) = \lambda W Q_1 + W Q_2 = \lambda\phi(Q_1) + \phi(Q_2)$), c'est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur E.

3. Puisqu'un isomorphisme préserve la dimension et transforme une base en base, l'espace E est de dimension $\dim E = \dim \mathbb{R}_2[X] = 3$ et les images des vecteurs de la base canonique $\phi(1) = W$, $\phi(X) = WX$ et $\phi(X^2) = WX^2$ en forment une base.

4. a. La linéarité de Δ de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ est immédiate :

$$\begin{aligned}\forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X], \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \Delta(\lambda Q_1 + Q_2) &= (\lambda Q_1 + Q_2)(X+1) - (\lambda Q_1 + Q_2)(X) \\ &= \lambda\big(Q_1(X+1) - Q_1(X)\big) + \big(Q_2(X+1) - Q_2(X)\big) = \lambda\Delta(Q_1) + \Delta(Q_2).\end{aligned}$$

Pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $Q(X+1)$ est de même degré que $Q(X)$ donc $\Delta(Q) = Q(X+1) - Q(X)$ appartient à $\mathbb{R}_2[X]$. L'application Δ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

b. Le calcul donne $\Delta(1) = 0$, $\Delta(X) = 1$ et $\Delta(X^2) = 2X + 1$. Par suite,
- pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ constant, on a donc $\Delta(Q) = 0$;
- pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ de degré 1 : $Q = aX + b$ avec $a \neq 0$, $\Delta(Q) = a\Delta(X)$ est de degré 0 ;
- pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ de degré 2 : $Q = aX^2 + Q_1$ avec $a \neq 0$ et $\deg Q_1 \leqslant 1$, $\Delta(Q) = a\Delta(X^2) + \Delta(Q_1)$ est de degré 1 car on vient de voir que $\deg \Delta(Q_1) \leqslant 0$.

En conclusion,

$$\forall Q \in \mathbb{R}_2[X], \quad \deg \Delta(Q) = \begin{cases} (\deg Q) - 1 & \text{si } \deg Q \geqslant 1 \\ -\infty & \text{si } \deg Q \leqslant 0 \end{cases} \leqslant (\deg Q) - 1.$$

c. Pour $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, $\Delta(Q) = 0$ équivaut à $\deg \Delta(Q) = -\infty$. D'après **b.**, le noyau de Δ est donc constitué des polynômes constants : $\operatorname{Ker} \Delta = \mathbb{R}_0[X]$.
Quant au sous-espace $\operatorname{Im} \Delta$, il est engendré par les images des vecteurs de la base canonique calculées plus haut : il s'agit du sous-espace $\mathbb{R}_1[X]$. On peut aussi le montrer par un argument dimensionnel : la question **b.** met en évidence que $\operatorname{Im} \Delta \subset \mathbb{R}_1[X]$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} \Delta) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \operatorname{Ker} \Delta = 2$. On a ainsi égalité des dimensions dans l'inclusion précédente, qui est donc une égalité : $\operatorname{Im} \Delta = \mathbb{R}_1[X]$.

d. D'après **b.**, on a $\deg \Delta^3(Q) \leqslant (\deg Q) - 3 < 0$ i.e. $\Delta^3(Q) = 0$ pour tout $Q \in \mathbb{R}_2[X]$, ce qui signifie que l'application Δ^3 est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_2[X]$.

5. a. Il vient $f^3 = (\phi \circ \Delta \circ \phi^{-1})^3 = \phi \circ \Delta^3 \circ \phi^{-1} = 0$ d'après **4.d.**.

b. On utilise la bijectivité de ϕ. Pour $P \in E$ et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P = WQ$, $f(P) = 0$ équivaut à $\Delta(Q) = 0$ i.e. à Q constant ou encore $P \in \operatorname{Vect} W$. Le noyau de f est donc la droite dirigée par W : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} W$. Connaissant l'image de Δ, il vient ensuite :

$$\operatorname{Im} f = \phi\Big(\Delta\big(\phi^{-1}(E)\big)\Big) = \phi\big(\Delta(\mathbb{R}_2[X])\big) = \phi\big(\mathbb{R}_1[X]\big) = \operatorname{Vect}\big(\phi(1), \phi(X)\big) = \operatorname{Vect}(W, XW).$$

c. Les valeurs propres de f sont racines du polynôme X^3, annulateur de f d'après **a.**. Ainsi 0 est la seule valeur propre éventuelle de f, qui réciproquement est bien valeur propre de sous-espace propre associé $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} W \neq \{0\}$ d'après **b.**.

d. D'après **c.**, $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp} f} \dim E_\lambda(f) = \dim E_0(f) = 1 < \dim E$, d'où l'on déduit que f n'est pas diagonalisable.

Deuxième partie

6. L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est clairement symétrique ($\forall \mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$, $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \langle \mathrm{Q},\mathrm{P}\rangle$) et linéaire à gauche ($\forall \mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}], \forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\langle \lambda\mathrm{P}_1+\mathrm{P}_2,\mathrm{Q}\rangle = \lambda\langle \mathrm{P}_1,\mathrm{Q}\rangle + \langle \mathrm{P}_2,\mathrm{Q}\rangle$) donc bilinéaire. Pour $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$, on a de plus $\langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = \sum_{k=0}^4 \mathrm{P}(k)^2 \geqslant 0$ car $\mathrm{P}(k)^2\geqslant 0$ pour tout $k\in[\![0,4]\!]$ et, si $\langle \mathrm{P},\mathrm{P}\rangle = 0$, alors 0, 1, 2, 3 et 4 constituent 5 racines pour le polynôme P de degré inférieur ou égal à 4, qui est donc nul.
L'application $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

7. Si λ_1, λ_2 et λ_3 sont des réels tels que $\lambda_1\mathrm{L}_1+\lambda_2\mathrm{L}_2+\lambda_3\mathrm{L}_3 = 0$, alors en évaluant la relation en 1 (resp. en 2, resp. en 3), on obtient $\lambda_1 = 0$ (resp. $\lambda_2 = 0$, resp. $\lambda_3 = 0$). La famille $(\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3)$ est donc libre. Formée de $3 = \dim\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ vecteurs de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, c'en est donc une base.

8. a. Pour $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ donné, il existe d'après **7.** des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $\mathrm{P} = \lambda_1\mathrm{L}_1+\lambda_2\mathrm{L}_2+\lambda_3\mathrm{L}_3$. En évaluant la relation précédente en 1, 2 et 3, on obtient les valeurs des coordonnées de P dans la base $(\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3)$: $\lambda_1 = \frac{1}{2}\mathrm{P}(1)$, $\lambda_2 = -\mathrm{P}(2)$ et $\lambda_3 = \frac12\mathrm{P}(3)$.

b. On calcule :

$$\Delta(\mathrm{L}_1) = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)-(\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}-3),\quad \Delta(\mathrm{L}_2) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-2)-(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-3)$$
$$\text{et}\quad \Delta(\mathrm{L}_3) = \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)-(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2).$$

La décomposition de $\Delta(\mathrm{L}_1) = \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1$ sur la base $(\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3)$ est évidente et justifie la première colonne de la matrice A représentant Δ dans la base $(\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3)$. Pour celles de $\Delta(\mathrm{L}_2)$ et $\Delta(\mathrm{L}_3)$, on utilise le résultat de la question **a.** :

$$\Delta(\mathrm{L}_2) = \frac12\big(\Delta(\mathrm{L}_2)\big)(1)\mathrm{L}_1 - \big(\Delta(\mathrm{L}_2)\big)(2)\mathrm{L}_2 + \frac12\big(\Delta(\mathrm{L}_2)\big)(3)\mathrm{L}_3 = -\frac12\mathrm{L}_1-\mathrm{L}_2+\frac32\mathrm{L}_3$$

et, de la même manière, $\Delta(\mathrm{L}_3) = -2\mathrm{L}_2+2\mathrm{L}_3$, d'où le résultat.

9. a. Pour $i\in[\![1,3]\!]$ donné, le réel i n'annule ni W ni L_i donc pas non plus leur produit M_i : $\mathrm{M}_i(i)\neq 0$.

b. On vérifie que :

$$\forall i\in[\![1,3]\!],\quad \forall k\in[\![0,4]\!],\quad \mathrm{N}_i(k) = \begin{cases}0 & \text{si } k\neq i\\ 1 & \text{si } k=i\end{cases}. \tag{1}$$

Il en ressort que

$$\forall i,j\in[\![1,3]\!],\quad \langle \mathrm{N}_i,\mathrm{N}_j\rangle = \sum_{k=0}^4 \mathrm{N}_i(k)\mathrm{N}_j(k) = \begin{cases}0 & \text{si } i\neq j\\ 1 & \text{si } i=j\end{cases}$$

car, dans la somme précédente, tous les termes sont nuls si $i\neq j$ (car on aura toujours $k\neq i$ ou $k\neq j$) et, si $i=j$, le seul terme non nul est celui d'indice $k=i=j$ qui vaut 1.
Ainsi la famille $(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3)$ est orthonormale donc libre. Formée de $3 = \dim \mathrm{E}$ vecteurs de E d'après **2.** et **3.**, c'est en fait une base orthonormale de E.

10. Par définition, $\phi(\mathrm{L}_j) = \mathrm{W}\mathrm{L}_j = \mathrm{M}_j = \mathrm{M}_j(j)\mathrm{N}_j$ pour tout $j\in[\![1,3]\!]$, d'où la matrice représentative de ϕ dans les bases $(\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3)$ et $(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3)$:

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix}\mathrm{M}_1(1) & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{M}_2(2) & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{M}_3(3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}.$$

11. La matrice C de la composée $f = \phi\circ\Delta\circ\phi^{-1}$ dans la base $(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3)$ s'obtient à partir de celles de l'endomorphisme Δ en base $(\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3)$ et de l'application linéaire ϕ dans les bases $(\mathrm{L}_1,\mathrm{L}_2,\mathrm{L}_3)$ et $(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3)$, toutes deux déterminées dans les questions **8.b.** et **10.** :

$$\mathrm{C} = \mathrm{BAB}^{-1} = \begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -\frac12 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & \frac32 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac16 & 0 & 0\\ 0 & \frac14 & 0\\ 0 & 0 & -\frac16\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & \frac34 & 0\\ 0 & -1 & \frac43\\ 1 & -\frac94 & 2\end{pmatrix}.$$

12. a. Pour $\mathrm{P}\in\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$, $u(\mathrm{P})$ appartient à $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$. La linéarité de u étant immédiate, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.

b. Vu (1) et sachant que la famille $(\mathrm{N}_1,\mathrm{N}_2,\mathrm{N}_3)$ est orthonormale, il vient :

$$\forall \mathrm{P}\in\mathbb{R}_4[\mathrm{X}],\quad \forall j\in[\![1,3]\!],\quad \langle u(\mathrm{P}),\mathrm{N}_j\rangle = \mathrm{P}(j) = \langle \mathrm{P},\mathrm{N}_j\rangle, \tag{2}$$

d'où le résultat.

c. Pour $P \in \mathbb{R}_4[X]$ donné, le vecteur $u(P)$ vérifie $u(P) \in E$ (comme combinaison linéaire d'éléments de E) et $P - u(P) \perp E$ (car $P - u(P)$ est orthogonal aux vecteurs de base N_1, N_2 et N_3 de E d'après **b.**), deux propriétés caractéristiques du projeté orthogonal de P sur E. L'endomorphisme u est donc la projection orthogonale sur E.
Remarque. En utilisant (2), on peut aussi reconnaître dans la définition de $u(P) = \sum_{i=1}^{3} \langle N_i, P\rangle N_i$ l'expression du projeté orthogonal de P sur E rapporté à la base orthonormale (N_1, N_2, N_3) et conclure directement.

d. D'après la question **c.**, le projeté orthogonal de Q sur E est donné par $u(Q) = \sum_{i=1}^{3} Q(i)N_i = 2N_1$.

Deuxième problème

Première partie

On peut noter pour commencer que pour $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t^p} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u(t) = o(t^p),\, t \to +\infty.$$

1. Il suffit de vérifier le critère de sous-espace. La fonction nulle appartient clairement à E et, étant donnés un réel α, deux éléments $u, v \in E$ et des entiers $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $u(t) = o(t^p)$ et $v(t) = o(t^q)$ lorsque $t \to +\infty$, on a pour $r = p + q$ (n'importe quel entier $r \geqslant \max(p, q)$ convient) :

$$\frac{\alpha u(t) + v(t)}{t^r} = \alpha \frac{1}{t^q}\frac{u(t)}{t^p} + \frac{1}{t^p}\frac{v(t)}{t^q} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

ce qui assure que la fonction continue $\alpha u + v$ appartient à E.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $u(t) = o(t^p)$ lorsque $t \to +\infty$. Pour $x > 0$ donné, la fonction $t \longmapsto u(t)\mathbf{e}^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et l'on a :

$$t^2 u(t)\mathbf{e}^{-xt} = \left(t^{p+2}\mathbf{e}^{-xt}\right)\frac{u(t)}{t^p} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

car les deux facteurs tendent vers 0, le premier par croissances comparées et le second par hypothèse. Ainsi $u(t)\mathbf{e}^{-xt} = o(\frac{1}{t^2})$ lorsque $t \to +\infty$, d'où l'on déduit la convergence absolue (et donc la convergence) de l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(t)\mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

3. Étant donnés $u, v \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\big(L(\alpha u + v)\big)(x) &= \int_0^{+\infty} \big(\alpha u(t) + v(t)\big)\mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \alpha \int_0^{+\infty} u(t)\mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} v(t)\mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \alpha\big(L(u)\big)(x) + \big(L(v)\big)(x),\end{aligned}$$

toutes intégrales convergentes d'après **2.**, ce qui traduit l'égalité de fonctions $L(\alpha u+v) = \alpha L(u)+L(v)$.

Deuxième partie

4. Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, la fonction v_i est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $v_i(t) = o(t^p)$ avec $p = 0$ lorsque $t \to +\infty$, c'est donc un élément de E. En considérant, pour $x > 0$ donné, une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre $a + x$, dont on note f la densité, il vient :

$$\big(L(v_0)\big)(x) = \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-(a+x)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+x},$$

$$\big(L(v_1)\big)(x) = \int_0^{+\infty} t\mathbf{e}^{-(a+x)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+x}\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a+x}\,\mathbb{E}(X) = \frac{1}{(a+x)^2}$$

et, sur le même principe,

$$\big(L(v_2)\big)(x) = \frac{1}{a+x}\,\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{a+x}\big(\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2\big) = \frac{2}{(a+x)^3}.$$

5. La fonction w_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et vérifie $w_n(t) = o(t^{n+1})$ lorsque $t \to +\infty$, c'est donc un élément de E. De plus, par changement de variable affine $s = xt$,

$$\forall x > 0, \quad \big(\mathrm{L}(w_n)\big)(x) = \int_0^{+\infty} t^n \mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{x}\right)^n \mathbf{e}^{-s}\frac{\mathrm{d}s}{x} = \frac{\Gamma(n+1)}{x^{n+1}} = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Troisième partie

6. Par hypothèse, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u(t) = o(t^p)$ lorsque $t \to +\infty$. En écrivant la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, on obtient l'existence d'un réel $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \geqslant \mathrm{A}$, $|\frac{u(t)}{t^p}| \leqslant 1$ i.e. $|u(t)| \leqslant t^p$. La fonction u étant par ailleurs continue sur le segment $[0, \mathrm{A}]$, elle y est bornée : il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [0, \mathrm{A}]$, $|u(t)| \leqslant \mathrm{M}$. On en déduit immédiatement (en distinguant les cas $t \leqslant \mathrm{A}$ et $t \geqslant \mathrm{A}$) que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|u(t)| \leqslant \mathrm{M} + t^p$.
On a alors (toutes intégrales convergentes) :

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad \big|\big(\mathrm{L}(u)\big)(x)\big| &\leqslant \int_0^{+\infty} |u(t)|\,\mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} (\mathrm{M} + t^p)\mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{M}\big(\mathrm{L}(w_0)\big)(x) + \big(\mathrm{L}(w_p)\big)(x) = \frac{1}{x} + \frac{p!}{x^{p+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

d'après **5.**, d'où l'on déduit par encadrement que $\big(\mathrm{L}(u)\big)(x)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

7. a. Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral appliqué à la fonction u continue sur $\mathbb{R}_+$ indique que la fonction $t \longmapsto \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s$ est une primitive de u sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. On en déduit que

$$\mathrm{R} : t \longmapsto \int_t^{+\infty} u(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{+\infty} u(s)\,\mathrm{d}s - \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs il apparaît clairement sur l'expression précédente, sachant l'intégrale $\int_0^{+\infty} u(s)\,\mathrm{d}s$ convergente, que $\mathrm{R}(t)$ tend vers 0 i.e. que $\mathrm{R}(t) = o(t^p)$ avec $p = 0$ lorsque $t \to +\infty$. La fonction R appartient donc à E.

b. Il résulte de l'argument développé en **a.** que la fonction R est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $\mathrm{R}' = -u$, continue par hypothèse. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

c. Pour $x > 0$ donné, une intégration par parties sur $[0, t] \subset \mathbb{R}_+$ donne, d'après **b.** :

$$\int_0^t u(s)\mathbf{e}^{-sx}\,\mathrm{d}s = \big[-\mathrm{R}(s)\mathbf{e}^{-sx}\big]_{s=0}^{t} - x\int_0^t \mathrm{R}(s)\mathbf{e}^{-sx}\,\mathrm{d}s = \mathrm{R}(0) - \mathrm{R}(t)\mathbf{e}^{-tx} - x\int_0^t \mathrm{R}(s)\mathbf{e}^{-sx}\,\mathrm{d}s.$$

En passant à la limite lorsque $t \to +\infty$, on obtient d'après **a.** :

$$\big(\mathrm{L}(u)\big)(x) = \int_0^{+\infty} u(s)\mathbf{e}^{-sx}\,\mathrm{d}s = \mathrm{R}(0) - x\int_0^{+\infty} \mathrm{R}(s)\mathbf{e}^{-sx}\,\mathrm{d}s = \mathrm{R}(0) - x\big(\mathrm{L}(\mathrm{R})\big)(x).$$

d. Puisque $\mathrm{R}(t)$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$ d'après **a.**, il existe $\mathrm{B} \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [\mathrm{B}, +\infty[$, $|\mathrm{R}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. D'après **c.**, on a alors pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}\big|\big(\mathrm{L}(u)\big)(x) - \mathrm{R}(0)\big| &= x\left|\int_0^{\mathrm{B}} \mathrm{R}(t)\mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + \int_{\mathrm{B}}^{+\infty} \mathrm{R}(t)\mathbf{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant x\left|\int_0^{\mathrm{B}} \mathrm{R}(t)\mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| + x\left|\int_{\mathrm{B}}^{+\infty} \mathrm{R}(t)\mathbf{e}^{-st}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant x\int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|\,\mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t + x\int_{\mathrm{B}}^{+\infty} |\mathrm{R}(t)|\,\mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant x\int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|\,\mathrm{d}t + x\frac{\varepsilon}{2}\int_{\mathrm{B}}^{+\infty} \mathbf{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant x\int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

e. On conserve les notations de la question **d.**. Puisque le réel B ne dépend pas de x, le majorant tend vers $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ lorsque $x \to 0$ dans la dernière inégalité de **d.**. Il existe donc $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0, \delta[, \quad \big|\big(\mathrm{L}(u)\big)(x) - \mathrm{R}(0)\big| \leqslant x\int_0^{\mathrm{B}} |\mathrm{R}(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On a donc établi que :

$$\lim_{x\to 0}\big(\mathrm{L}(u)\big)(x) = \mathrm{R}(0) = \int_0^{+\infty} u(t)\,\mathrm{d}t.$$

8. a. D'après la question **6.** appliquée à la fonction $u' \in \mathrm{E}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in [\mathrm{A}, +\infty[$, $|u'(t)| \leqslant t^p$. Il vient alors :

$$\forall t \in [\mathrm{A}, +\infty[, \quad |u(t)| = \left|u(\mathrm{A}) + \int_{\mathrm{A}}^{t} u'(s)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant |u(\mathrm{A})| + \int_{\mathrm{A}}^{t} |u'(s)|\,\mathrm{d}s$$
$$\leqslant |u(\mathrm{A})| + \int_{\mathrm{A}}^{t} s^p\,\mathrm{d}s \leqslant |u(\mathrm{A})| + \frac{t^{p+1}}{p+1}.$$

b. Il ressort de la question précédente que $u(t) = o(t^{p+2})$ lorsque $t \to +\infty$, si bien que la fonction continue u appartient à E.

c. On procède par intégration par parties comme dans la question **7.c.**, en primitivant u' en u.

9. a. Par hypothèse, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u(t) = o(t^p)$ lorsque $t \to +\infty$, ce qui entraîne $u_n(t) = o(t^{n+p})$ lorsque $t \to +\infty$, et la fonction continue u_n appartient donc à E.

b. Pour $a \in \mathbb{R}$ donné, la fonction exp est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, a]$ avec (en distinguant les cas $a \geqslant 0$ et $a \leqslant 0$) :

$$\forall x \in [0, a], \quad |\exp''(x)| = \mathbf{e}^x \leqslant \mathbf{e}^{|a|}.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à exp à l'ordre 1 sur le segment $[0, a]$, on a donc :

$$|\mathbf{e}^a - 1 - a| = \left|\mathbf{e}^a - \mathbf{e}^0 - \exp'(0)a\right| \leqslant \Big(\sup_{x\in[0,a]} |\exp''(x)|\Big)\frac{a^2}{2} \leqslant \mathbf{e}^{|a|}\frac{a^2}{2}.$$

c. Pour $t \in [0, +\infty[$, l'inégalité de la question **b.** appliquée à $a = -ht$ donne, puisque $|h| \leqslant \frac{x}{2}$:

$$\left|\frac{\mathbf{e}^{-(x+h)t} - \mathbf{e}^{-xt}}{h} + t\mathbf{e}^{-xt}\right| = \left|\frac{\mathbf{e}^{-xt}}{h}\right| \left|\mathbf{e}^{-ht} - 1 + ht\right| \leqslant \left|\frac{\mathbf{e}^{-xt}}{h}\right| \frac{(ht)^2}{2}\mathbf{e}^{|h|t} \leqslant \frac{|h|}{2} t^2 \mathbf{e}^{-xt/2}$$

d'où

$$\left|\frac{\big(\mathrm{L}(u)\big)(x+h) - \big(\mathrm{L}(u)\big)(x)}{h} + \big(\mathrm{L}(u_1)\big)(x)\right| = \left|\int_0^{+\infty} u(t)\Big(\frac{\mathbf{e}^{-(x+h)t} - \mathbf{e}^{-xt}}{h} + t\mathbf{e}^{-xt}\Big)\,\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \int_0^{+\infty} |u(t)| \left|\frac{\mathbf{e}^{-(x+h)t} - \mathbf{e}^{-xt}}{h} + t\mathbf{e}^{-xt}\right| \mathrm{d}t \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,|u(t)|\,\mathbf{e}^{-xt/2}\,\mathrm{d}t,$$

toutes intégrales convergentes.

d. Soit $x > 0$. On déduit de la dernière majoration de la question **c.**, par encadrement (le majorant tend vers 0 lorsque $h \to 0$ car l'intégrale ne dépend pas de h), que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\big(\mathrm{L}(u)\big)(x+h) - \big(\mathrm{L}(u)\big)(x)}{h} = -\big(\mathrm{L}(u_1)\big)(x),$$

ce qui établit la dérivabilité de $\mathrm{L}(u)$ en x, de dérivée $\big(\mathrm{L}(u)\big)'(x) = -\big(\mathrm{L}(u_1)\big)(x)$. Ainsi $\mathrm{L}(u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\big(\mathrm{L}(u)\big)' = -\mathrm{L}(u_1)$.

e. On démontre par récurrence sur n que, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{L}(u)$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $\big(\mathrm{L}(u)\big)^{(n)} = (-1)^n\mathrm{L}(u_n)$. Le cas $n = 1$ a été traité en **d.** et si le résultat est acquis au rang n alors, toujours d'après **d.** appliquée à la fonction u_n, $\mathrm{L}(u_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $\big(\mathrm{L}(u_n)\big)' = -\mathrm{L}(u_{n+1})$ si bien, par hypothèse de récurrence, que $\mathrm{L}(u)$ est $n+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $\big(\mathrm{L}(u)\big)^{(n+1)} = (-1)^{n+1}\mathrm{L}(u_{n+1})$.

Quatrième partie

10. a. Sachant que $u'' \in \mathrm{E}$, la question **8.** montre que $u' \in \mathrm{E}$ puis $u \in \mathrm{E}$ avec :

$$\forall x > 0, \quad \big(\mathrm{L}(u'')\big)(x) = -u'(0) + x\big(\mathrm{L}(u')\big)(x) = -u'(0) - xu(0) + x^2\big(\mathrm{L}(u)\big)(x).$$

b. Puisque u est solution du problème, on a plus précisément :

$$\forall x > 0, \quad \big(\mathrm{L}(u')\big)(x) = -u(0) + x\big(\mathrm{L}(u)\big)(x) = -1 + x\big(\mathrm{L}(u)\big)(x)$$

et

$$\forall x > 0, \quad \big(\mathrm{L}(u'')\big)(x) = 2 - x + x^2\big(\mathrm{L}(u)\big)(x)$$

d'où, par linéarité de L,

$$\forall x > 0, \quad \big(\mathrm{L}(u'' + 5u' + 6u)\big)(x) = -3 - x + (x^2 + 5x + 6)\big(\mathrm{L}(u)\big)(x).$$

Vu le calcul de transformée de Laplace effectué en **4.**, on a donc :

$$\forall x > 0, \quad (x^2 + 5x + 6)\big(\mathrm{L}(u)\big)(x) = \big(\mathrm{L}(t \mapsto \mathbf{e}^{-t})\big)(x) + 3 + x = \frac{1}{x+1} + 3 + x.$$

On vérifie alors, en divisant par $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3) > 0$,

$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad \big(\mathrm{L}(u)\big)(x) &= \frac{1}{x^2 + 5x + 6}\Big(\frac{1}{x+1} + 3 + x\Big) = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{x+2}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+3}\end{aligned}$$

où la dernière égalité se justifie en remettant au même dénominateur le membre de droite.

11. Par linéarité de L et d'après les exemples étudiés en **4.**,

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+3} = \Big(\mathrm{L}\Big(t \mapsto \frac{\mathbf{e}^{-t} + \mathbf{e}^{-3t}}{2}\Big)\Big)(x).$$

D'après **10.b.**, on est conduit à s'intéresser à la fonction $u : t \longmapsto \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{-t} + \mathbf{e}^{-3t})$, qui n'est pour l'instant qu'un candidat et dont il convient de vérifier soigneusement qu'elle est solution. Il s'agit tout d'abord d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ dont les dérivées sont données par :

$$u' : t \longmapsto \frac{-\mathbf{e}^{-t} - 3\mathbf{e}^{-3t}}{2} \quad \text{et} \quad u'' : t \longmapsto \frac{\mathbf{e}^{-t} + 9\mathbf{e}^{-3t}}{2}.$$

On constate bien que $u''(t) + 5u'(t) + 6u(t) = \mathbf{e}^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et d'autre part que $u(0) = 1$ et $u'(0) = -2$. La fonction $u : t \longmapsto \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{-t} + \mathbf{e}^{-3t})$ est donc solution du problème posé.
Remarque. Bien qu'on n'ait pas les moyens de le démontrer ici, cette solution est unique.